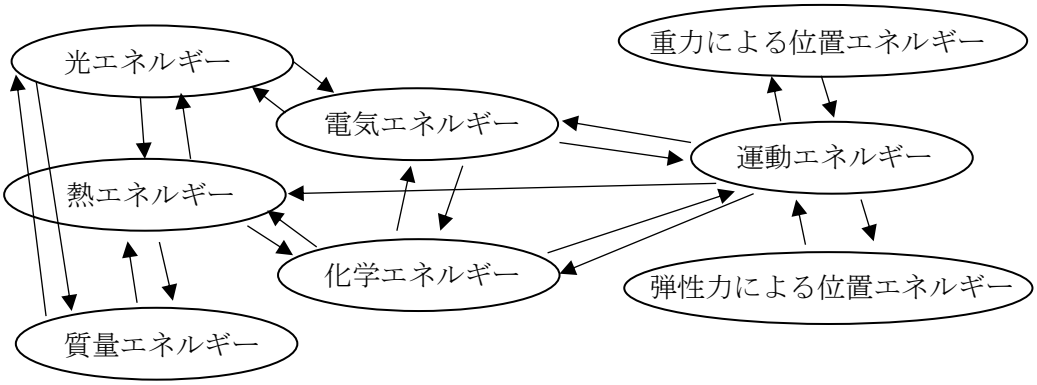
§ 力学Ⅰ-3 章　仕事とエネルギー

テーマ 1　エネルギーとは

エネルギーとは、様々な種類のものがあり、それぞれに柔軟に変換できる量のことである。

《イメージ》



エネルギーはこのように、柔軟に姿を変えられる量なのである。この量の直接の計測・観測は難しいが、我々はその大小を、経験と直感で感じることができる。

CocepTest 1　エネルギーの大小

次の中で、より危なそうなものはどれか、直感で考えてみよう。

重力による位置エネルギー

ベランダの植木鉢

棚に置いた植木鉢

屋上に干された洗濯物

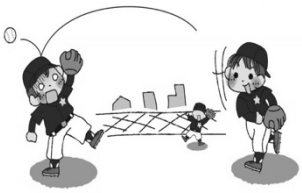
弾性力による位置エネルギー

すごく伸ばしたゴム

あんまり伸ばしてないゴム

運動エネルギー

プロピッチャーの球



キャッチボールの球

砲丸投げの球

CocepTest 1 解説

Point

なんとなく感じる『危なそうレベル』が、物理でいう『エネルギー』である。

ベランダの植木鉢　VS　棚に置いた植木鉢　VS　屋上に干された洗濯物

『重力による位置エネルギー』部門

『より高く』『より重い』方がエネルギーが高い。このようなエネルギーを『重力による位置エネルギー』という。棚の植木鉢と、屋上の洗濯物の順位は、高さでは洗濯物、質量では植木鉢が勝っている。総合的な順位はつけられない。

伸ばしたゴム　VS　伸びてないゴム　　『弾性力による位置エネルギー』部門

弾性力がはたらく、ゴムのようなものが持つエネルギーを『弾性力による位置エネルギー』という。より伸びているゴムの方が高エネルギーである。これはゴムではなく『バネ』でも同じであり、固いバネとゆるいバネで行うと、固いほうが危なそうである（固いバネはバネ定数 k が大きい）。

弾性力による位置エネルギーは**『のび』『ばね定数』**が関わる。

プロの球　VS　キャッチボールの球　VS　砲丸投げの球　　『運動エネルギー』部門

動いている物体がもつエネルギーを『運動エネルギー』という。プロの球とキャッチボールの球なら、プロの方が速いので高エネルギーである。砲丸投げの球はこの画像だけでは順位がつけられない。重い分、遅くても危ないのだ。

運動エネルギーは**『より重く』『より速い』**方がエネルギーが高くなる。

CocepTest 2（議論してみるだけ）　エネルギーを増やす要素

次のエネルギーを増やすには何をすればよいだろう？自由に議論してみよう。

(1) 運動エネルギー　(2) 重力による位置エネルギー　(3) 弾性力による位置エネルギー

Point

力 F を加えて、物体を動かすことでエネルギーは増やすことができる。『力を加えて物を動かすこと』を物理では『仕事』という。

テーマ２ 仕事の定義・運動エネルギーの定義

仕事は力をかけて物体を動かすこと。運動エネルギーは動いているものが持っているエネルギーだが、次のような計算式で量を計算することにした。

仕事の定義　覚える！

文字：大文字 W　ワークの頭文字　　単位：〔J〕　読み：ジュール

計算式　（仕事）＝（力）×（移動距離）

$$W = Fx$$

運動エネルギーの定義　覚える！

文字：大文字 K キネティックの頭文字　　単位：〔J〕　読み：ジュール

計算式

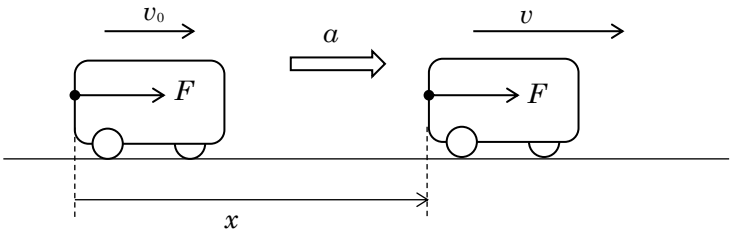
$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

質量が２倍ならエネルギー２倍、速度２倍ならエネルギー４倍という変化！！

自動車でスピードを出しすぎると危険な理由がこれだ。
速度が２倍になると、エネルギーが４倍になり、ブレーキから停止までにかかる距離が４倍になる。３倍になると９倍になる。スピードによる影響の変化は、ちょっとの変化で急激に大きくなってしまうのだ。

問題 1 運動エネルギーと仕事の関係式

なめらかな水平面上に質量 m の台車がある。速度 v_0 で運動している台車に力 F を加え、速度を v まで上昇させた。仕事と運動エネルギーの関係式を立てる。以下の文章の空欄を埋めよ。



STEP 1　力 F から、物体の加速度 a の大きさを求める

運動方程式を立式すると、 ア　　より、

$a =$ イ　　・・・①

STEP 2　加速度 a と、速度 v の関係式を立てる

等加速度運動の 3 公式のうち、時刻 t がない公式　$v^2 - v_0^2 = 2ax$　を立式すると

ウ　＝　エ　　・・・②

STEP 3　①式と②式を連立して、F と v の関係式を立てる。（a を消去する）

②式 $v^2 - v_0^2 = 2ax$ の a に①式を代入

オ　＝　カ

両辺に m をかける（分母を払う）と

キ　＝　ク

ここで、力 F と距離 x だけ独立させる（右辺 $2Fx$ の 2 を左辺に移動）

ケ ＝ コ

$\frac{1}{2}mv^2$、$\frac{1}{2}m{v_0}^2$ など　　仕事 Fx が式に現れた。

運動エネルギーが式に現れた。

（後−前）は変化量

後運動エネ − 前運動エネ ＝ 仕事

運動エネルギーの変化

さらに式変形をすると　『前 ＋ 仕事 ＝ 後』 という形にもできる。

サ ＝ シ

前のエネルギーに仕事を足したら後のエネルギーになることを「エネルギーの原理」という

問題１解答　ア：$ma = F$　イ：$\frac{F}{m}$　ウ：$v^2 - {v_0}^2$　エ：$2ax$　オ：$v^2 - {v_0}^2$

カ：$\frac{2Fx}{m}$　キ：$mv^2 - m{v_0}^2$　ク：$2Fx$　ケ：$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m{v_0}^2$　コ：Fx

サ：$\frac{1}{2}m{v_0}^2 + Fx$　シ：$\frac{1}{2}mv^2$

問題１解説　誘導にうまく従って、空欄を埋めていきましょう。誘導なしで、この式を導けるようにしておいた方が良いです。

≪読み物≫エネルギーの原理のイメージ

エネルギーの原理は、貯金と給料に例えられることが多い。貯金額が運動エネルギーで、給料が仕事なのだ。

例えば、700 円の貯金があって、300 円の給料をもらったら

『前の貯金額(700 円)　＋　給料(300 円)　＝　後の貯金額(1000 円)』

というイメージである

言葉の意味まとめ

仕事・・・力を加えて物体を移動させること。エネルギーを増減させる作用のこと。

仕事 ＝ 力 × 距離

$$W = Fx$$

エネルギー・・・様々な種類のものがある物理量。仕事をする能力ともいわれる。

（危険度で大小関係をイメージできる。『仕事をする能力』の意味の理解は後回し）

運動エネルギー・・・物体が動いているときに持っているエネルギー

運動エネルギー$K = \frac{1}{2}mv^2$

仕事やエネルギーの単位・・・〔J〕読み：ジュール

エネルギーの原理・・・仕事は、物体の運動エネルギーを増減させる。
（運動エネルギーと仕事の関係式）

前の運動エネルギー ＋ 仕事 ＝ 後の運動エネルギー

$$\frac{1}{2}mv_0{}^2 + W = \frac{1}{2}mv^2$$

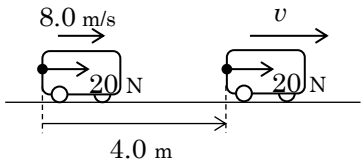
注：セミナーでは距離 x を s と置いてあるので、仕事の式は $W = Fs$ と記されている。

また、エネルギーの原理は、$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0{}^2 = W$ と記されている。

後－前 ＝ 仕事 という形で示されているだけで、『まとめ』と内容は同じである。

問題 2 エネルギーの原理の利用

図のように、右向きを正とするなめらかな一直線上で、質量 2.0 kg の台車が速度 8.0 m/s で運動している。この台車に一定の力 20 N を加え続け、台車が 4.0 m だけ変位したとき、速度の大きさが v になったとする。



(1) 力を加えている間、物体の加速度はいくらか。

(2) 等加速度運動の式、$v^2 - v_0{}^2 = 2ax$ を用いて、速度 v の大きさを求めよ。

(3) 運動エネルギーと仕事の関係式を用いて、速度 v の大きさを求めよ。

問題２　解答　(1) 10 m/s^2　　(2) $v^2 - 8.0^2 = 2\times10\times4.0$ を立式した上で、$v = 12$ m/s

(3) $\frac{1}{2}\times2.0\times8.0^2+20\times4.0=\frac{1}{2}\times2.0\times v^2$を立式した上で、$v = 12$ m/s

問題２　解説

(1) 加速度の大きさを a とおくと、運動方程式 $ma = F$ より、

$2.0 \times a = 20$

a について解いて

$a = 10$ m/s^2

(2) 前問(1)で求めた $a = 10$ m/s^2 を用いて等加速度運動の式 $v^2 - v_0^2 = 2ax$ を立式すると、

$v^2 - 8.0^2 = 2\times10\times4.0$

v^2 について解いて

$v^2 = 144$

$v = \pm12$

$v > 0$ なので、$v = 12$ m/s

(3) ㊀運動エネルギー　＋　仕事　＝　㊁運動エネルギー　　を立式すると、

$$\frac{1}{2}mv_0{}^2 \quad + \quad W \quad = \quad \frac{1}{2}mv^2$$

$$\frac{1}{2}\times2.0\times8.0^2+20\times4.0=\frac{1}{2}\times2.0\times v^2$$

v について解いて

$v^2 = 144$

$v = \pm12$

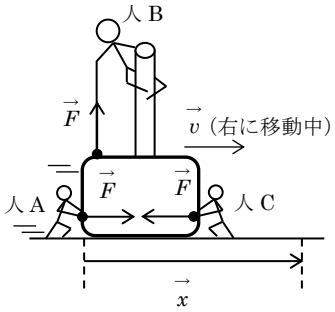
$v > 0$ なので、$v = 12$ m/s

エネルギーは、加速度の計算をせずに、後の速度を求めることができる概念なのだ！！

テーマ 3　仕事の種類

仕事には、正の仕事、負の仕事、斜めの場合の仕事、などバリエーションがある。

種類まとめ



A の仕事は $W_A = Fx$

B の仕事は $W_B = 0$

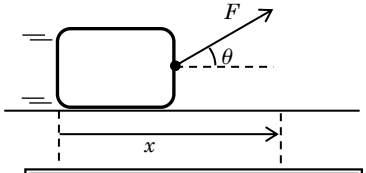
C の仕事は $W_C = -Fx$

進行方向が正!!

進行方向と垂直は 0!!

このとき仕事は

$W = F\cos\theta \times x$



斜めは進行方向分力のみ!!

人 A は、物体を加速させようとしている。→エネルギーを増やす役割をしている。

人 B は、物体を加速することも減速させることもない。→遊んでるだけ。

人 C は、物体を止めようとしている。→エネルギーを減らす役割をしている。

→W はマイナスになる

人 C のように、物体のエネルギーを減らす仕事を、「負の仕事」という。

斜めの仕事は、進行方向成分に分解して、仕事の計算を行う。斜めの力のうち、エネルギーを増減させるのが、進行方向に分けた力だけなのだ。

問題 3　斜面上の物体とエネルギーの原理

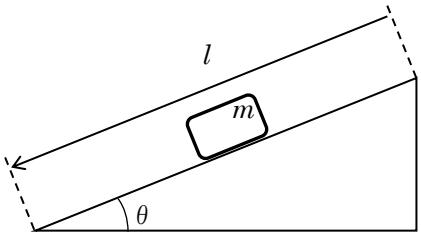
傾角 θ、長さ l のあらい斜面の上端に、質量 m の物体を置いたところ、下端まですべりおりた。物体と斜面の動摩擦係数を μ'、重力加速度の大きさを g とする。

(1) 重力のする仕事 W_{mg} はいくらか。

(2) 垂直抗力のする仕事 W_N はいくらか。

(3) 摩擦力のする仕事 W_R はいくらか。

(4) 物体の下端での速度を v として、上端から下端に到達するまでの、エネルギーの原理の式をたてよ。

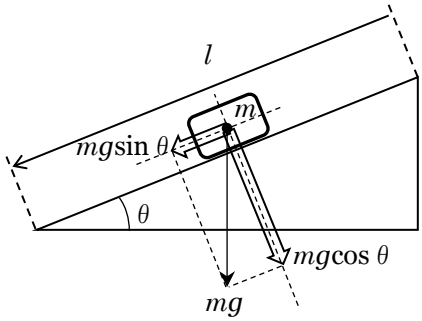


問題 3 解答　(1) $mgl\sin\theta$　(2) 0　(3) $-\mu' mgl\cos\theta$

(4) $0 + mgl\sin\theta + 0 - \mu' mgl\cos\theta = \frac{1}{2}mv^2$

問題 3 解説

(1) mg は進行方向に対して斜めの力であり、力を分解して考える必要がある。



左図のように力を分解できるので、

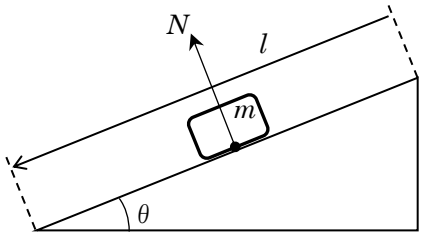
$W = Fx$ で計算すると

$W_{mg} = mg\sin\theta \times l$

$W_{mg} = mgl\sin\theta$

＊$\sin\theta$ 、$\cos\theta$ は式の最後に書く。

(2) N は進行方向に対して垂直な力なので、エネルギーを増やしも減らしもしない。



左図のように力を作図でき、

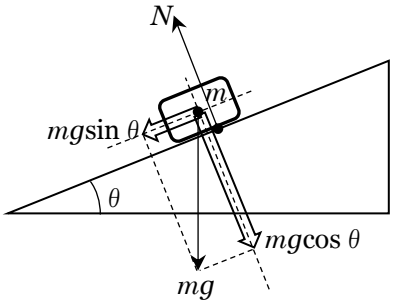
$W_N = 0$ となる。

＊進行方向と垂直なので、$N \times l$ ではなく、
0 になる。N は加速に関わっていないのだ。

(3) 摩擦力 R に関して復習が必要である。

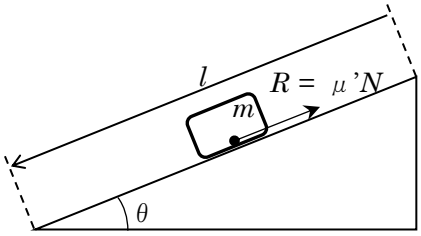
動摩擦力は $R = \mu' N$ で計算できる。そのために、最初に垂直抗力 N を求める。

垂直抗力 N は、斜面垂直方向のつりあいから求めることができる。



斜面垂直方向のつりあいより、

$N = mg\cos\theta$



摩擦の公式 $R = \mu' N$ より

$R = \mu' mg\cos\theta$

進行方向と逆向きの力なので、負の仕事になることに注意して、$W = Fx$ で計算すると

$W_R = -\mu' mg\cos\theta \times l$

$W_R = -\mu' mgl\cos\theta$

問題 3 解説続き

(4) エネルギーの原理の式は、

（前の運動エネルギー） ＋ 仕事 ＝ （後の運動エネルギー） のことである。

◇前の運動エネルギーについて

問題文より、前の速さは 0 と考えられる。よって運動エネルギーは 0。

◇仕事について

仕事は、(1)〜(3)で求めたものの合計となる。よって、

$W_{mg} = mgl\sin\theta$ 、$W_N = 0$ 、$W_R = -\mu' mgl\cos\theta$ の合計となる。

◇後の運動エネルギーについて

後の速さを v とすると、後の運動エネルギーは、$\frac{1}{2}mv^2$ となる。

◇3 つの要素をまとめて、エネルギーの原理の式を立てると、

$$\underbrace{0}_{\text{前}} + \underbrace{mgl\sin\theta + 0 + (-\mu' mgl\cos\theta)}_{\text{仕事}} = \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{\text{後}}$$

となる。

$(-\mu' mgl\cos\theta)$ を整理して、

$$0 + mgl\sin\theta + 0 - \mu' mgl\cos\theta = \frac{1}{2}mv^2$$

としてもよい。

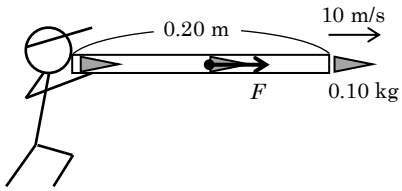
ちなみにこの式を v についてとけば、物体が斜面の一番下に達したときの速度を求めることができ、

$v = \sqrt{2gl(\sin\theta - \mu'\cos\theta)}$

と計算できる。

問題 4 エネルギーの原理

吹き矢を使って、矢を飛ばす運動を考える。質量 0.10 kg の矢を長さ 0.20 m の筒にいれ、息を思い切り吹き込み発射する。発射された矢の速さは、10 m/s であった。

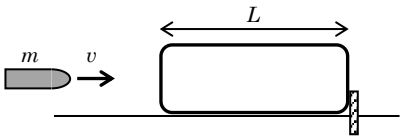


(1) 息を吹き込んでいるときに物体が受ける力が常に一定だとすると、物体が受ける力 F はいくらか。

(2) 筒の長さを 2 倍にして、同じように息を吹き込んだとき、発射された矢の速さはいくらになるか。ただし、筒が長くなっても、矢に加わる力は変わらないとする。

問題 5 ちょっと応用 負の仕事と運動エネルギー

水平でなめらかな床の上に、長さ L の直方体の木材を固定する。この木材に質量 m の弾丸を水平に打ち込む。弾丸が木材にめり込んでいく際、弾丸は一定の抵抗力を受けるとし、次の問いに答えよ。ただし、解答は m、L および、下記の v、v_2 を用いて表せ。



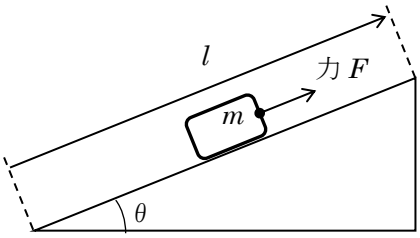
(1) はじめ弾丸を速さ v で打ち込むと、木材の $\frac{L}{2}$ の深さで止まった。弾丸が木材から受ける抵抗力の大きさはいくらか。

(2) 弾丸の速さを変えて、この弾丸が木材を貫通するようにしたい。貫通するのに必要な最小の速さ v_1 はいくらか。

(3) 弾丸を貫通するのに必要な最小の速さ v_1 よりもおおきな速さ v_2 で打ち込んだ。木材を貫通した後の弾丸の速さ v_3 はいくらか。

問題 6 応用 斜面上の物体とエネルギーの原理２

傾角 θ、長さ l のあらい斜面の下端に、質量 m の物体を置き、力 F を斜面に沿った方向に加えて上端まで一定の速度で引き上げた。物体と斜面の動摩擦係数を μ'、重力加速度の大きさを g とする。



(1) 力 F の大きさはいくらか。

（ヒント：一定の速度→力は○○○○
→○○○○の式を立てる）

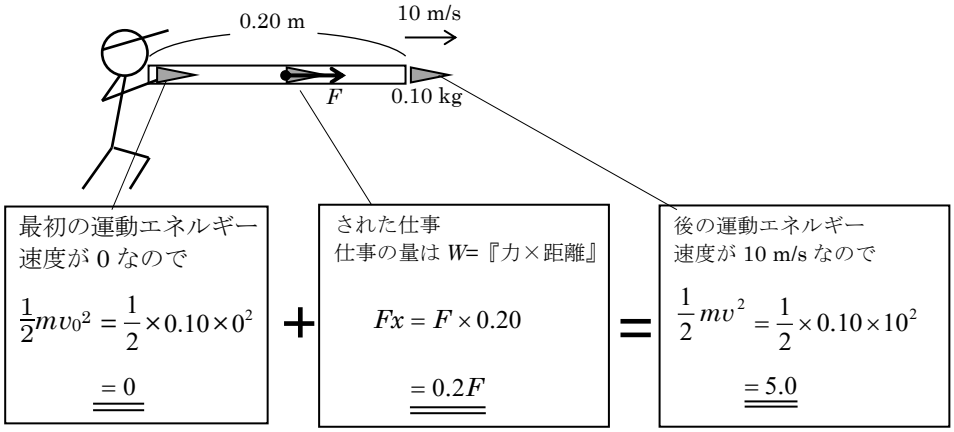
(2) 力 F のする仕事 W_F、重力のする仕事 W_{mg}、垂直抗力のする仕事 W_N、摩擦力のする仕事 W_R を答えよ。

(3) 物体がされた仕事の合計($W_F + W_{mg} + W_N + W_R$)の大きさはいくらか。

問題 4 解答　(1) 25 N　(2)　14 m/s

問題 4 解説　仕事とエネルギーの関係をしっかりイメージできるようにしておこう。

(1) 前の運動エネ ＋ された仕事 ＝ 後の運動エネ　というエネルギーの原理の式を立てる。



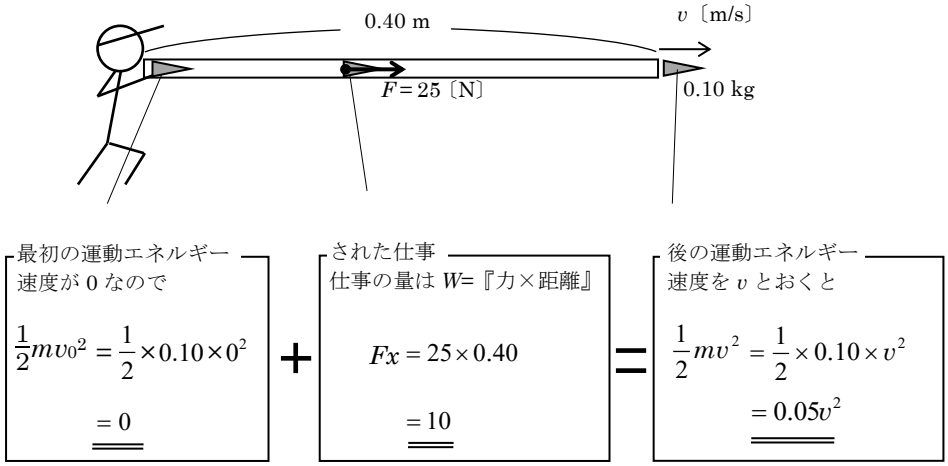
見やすく書き直して、

$0 + 0.2F = 5.0$

F について解くと

$F = 25$〔N〕

(2) 前の運動エネルギー ＋ された仕事 ＝ 後の運動エネルギー　である。



上のように、前の運動エネルギー ＋ された仕事 ＝ 後の運動エネルギー　と立式すると

$0 + 10 = 0.05v^2$　　v^2 について解くと

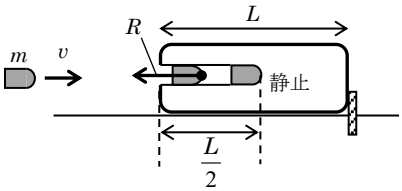
$v = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$ m/s (≒ 14.1 ≒ 14〔m/s〕)

問題 5 解答 (1) $R=\dfrac{mv^2}{L}$ (2) $v_1=\sqrt{2}v$ (3) $v_3=\sqrt{v_2{}^2-2v^2}$

問題 5 解説 『抵抗力』とは、つまり摩擦力のことである。適当な文字で置いて、仕事とエネルギーの関係式を立てよう。今回は R とする。

(1)

途中で静止する状況



弾丸は、摩擦力 R により、負の仕事をされ、静止するのだ。エネルギーの原理の式を立てると、

前 + 仕事 = 後

$$\frac{1}{2}mv^2+(-R\times\frac{L}{2})=\frac{1}{2}m\times 0^2$$

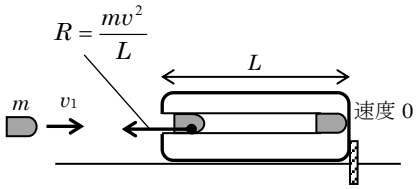
進行方向と逆向きなので、負の仕事!!

整理して、$\dfrac{1}{2}mv^2-\dfrac{RL}{2}=0$

R について解いて、$R=\dfrac{mv^2}{L}$

(2) ギリギリ貫通する速さ v_1 で打ち込まれた弾丸は、L 突き進んで速度が 0 になると考える。

ギリギリ貫通するときの状況



エネルギーと仕事の式を立てると、

前 + 仕事 = 後

$$\frac{1}{2}mv_1{}^2+(-R\times L)=\frac{1}{2}m\times 0^2$$

整理して、$\dfrac{1}{2}mv_1{}^2-RL=0$

(1)より $R=\dfrac{mv^2}{L}$ なので、

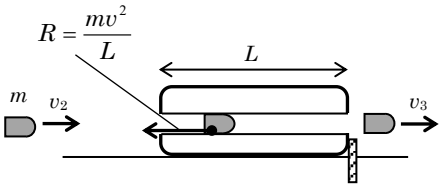
$$\frac{1}{2}mv_1{}^2-\frac{mv^2}{L}\cdot L=0$$

v_1 について解いて、

$$v_1{}^2=2v^2 \quad\Rightarrow\quad v_1=\sqrt{2}v$$

(3) 絵を書くと下図のようになる。

貫通しても速度がのこる状況



エネルギーと仕事の式を立てると、

前 + 仕事 = 後

$$\frac{1}{2}mv_2{}^2+(-R\times L)=\frac{1}{2}m\times v_3{}^2$$

(1) より $R=\dfrac{mv^2}{L}$ なので、整理して代入すると、

$$\frac{1}{2}mv_2{}^2-\frac{mv^2}{L}\times L=\frac{1}{2}mv_3{}^2$$

v_3 について解いて、

$$v_3{}^2=v_2{}^2-2v^2 \quad\Rightarrow\quad v_3=\sqrt{v_2{}^2-2v^2}$$

問題 6 解答 (1) $mg\ (\sin\theta + \mu'\cos\theta)$

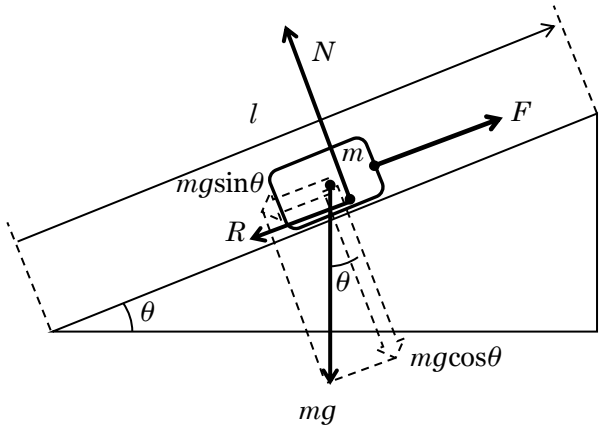
(2) $W_F = mgl\ (\sin\theta + \mu'\cos\theta)$ 、$W_{mg} = -mgl\sin\theta$

$W_N = 0$ 、$W_R = -\mu' mgl\cos\theta$

(3) 0

問題 6 解説

(1) 一定の速度 ⇒ 力はつりあっている ⇒ つりあいの式をたてよう。



左図のように、力は働く。
力の書き出しの仕方を思い出そう。
① 物体を○で囲む
② 触れているものから、力を書く
③ 重力を書く
という手順で力を書くのだ。
重力 mg は、進行方向と、進行方向と垂直な向きに分解しよう。

それぞれの方向でつりあいの式を立てると

垂直方向のつりあい：$N = mg\cos\theta$ ・・・①式

進行方向（平行方向）のつりあい：$F = mg\sin\theta + R$ ・・・②式

①式 $N = mg\cos\theta$ から N の大きさを求め、動摩擦力の公式 $R = \mu' N$ に代入すると、

$R = \mu' mg\cos\theta$

これを②式 $F = mg\sin\theta + R$ に代入すると、

$F = mg\sin\theta + \mu' mg\cos\theta$

整理して、

$F = \underline{mg\ (\sin\theta + \mu'\cos\theta)}$

(2) それぞれの力がする仕事を $W = Fx$ で計算する。

力 F のする仕事 ・・・進行方向にはたらく力なので、そのまま計算できる。

$W_F = mg\ (\sin\theta + \mu'\cos\theta) \times l$ （力 F は前問(1)で求めたものを使う）

$= \underline{mgl\ (\sin\theta + \mu'\cos\theta)}$

重力 mg のする仕事 ・・・進行方向成分が仕事をする、進行方向と逆向きなので負の仕事。

$W_{mg} = -mg\sin\theta \times l$

$= \underline{-mgl\sin\theta}$

問題 6 解説続き

垂直抗力 N のする仕事・・・進行方向と垂直なので、仕事は 0

$W_N = \underline{0}$

動摩擦力 R のする仕事・・・進行方向と逆向きなので負の仕事

$W_R = -\mu' mg\cos\theta \times l$ （動摩擦力 R は前問(1)で求めたものを使う）

$= \underline{-\mu' mgl\cos\theta}$

(3) 前問(2)で求めた W を合計して $W_F + W_{mg} + W_N + W_R$ を求めると

$\{mgl(\sin\theta + \mu'\cos\theta)\} + (-mgl\sin\theta) + 0 + (-\mu' mgl\cos\theta)$

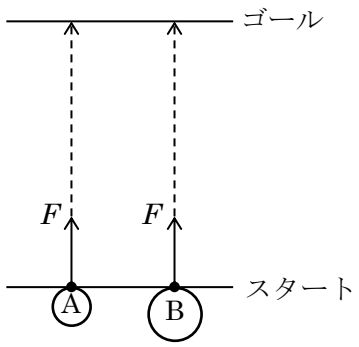
$= mgl\sin\theta + \mu' mgl\cos\theta - mgl\sin\theta - \mu' mgl\cos\theta$

$= \underline{0}$

＊ 速度が変化していないので運動エネルギーに変化がない。運動エネルギーに変化がないということは、された仕事の合計は 0 である。と考えて即答することもできる。

ConcepTest 3 エネルギーの原理

質量が m の物体 A と、質量が M ($M > m$)の物体 B に力 F を加えて、スタートからゴールまで移動させた。2 つの物体に加えている力 F の大きさは、同じであるとする。



(1) ゴールするときの物体の運動エネルギーの大きさは、A、B のどちらが大きいか、記号で答えよ。同じ場合は『同じ』と答えよ。

↓

(1)を考えるために、(2) を参考にしてみよう。

(2) スタートからゴールまで移動する間に、力 F から受ける仕事は A、B のどちらが大きいか、記号で答えよ。同じ場合は『同じ』と答えよ。

↓

(2) (1) の後に、さらに考えてみよう。

(3) ゴールするときの物体の速さは A、B のどちらが大きいか、記号で答えよ。同じ場合は『同じ』と答えよ。

ConcepTest 3 エネルギーの原理

解答 (1) 同じ　(2) 同じ　(3) A

解説

(1) この問題を考えるためには、先に(2)を考えた方がよい。

(2) 仕事 W は $W = Fx$ から考えることができ、A、B に加える力 F も、移動させる距離 x も同じなので、仕事 W の大きさは同じになるとわかる。

↓再び(1)へ

(1) された仕事 W の分だけ、物体のエネルギーは増える。そして、前問(1)で W が同じとわかったので、運動エネルギーの大きさは等しいといえるのだ。

(3) 前問(2)より物体 A、B の運動エネルギーは等しいとわかった。そこから速度を考える。

運動エネルギーは $\frac{1}{2}mv^2$ で示せ、質量に差があるのに運動エネルギーが等しいことから、

A : 質量 m が小さい分、速度 v が大きい

B : 質量 M が大きい分、速度 V が小さい

と考えることができる。よってゴール時は A の方が速度が大きいことがわかる。

---

(3)に関して、より数学的に説明をすることができる。物体 A の速度を v、物体 B の速度を V とおくと、それぞれの運動エネルギーは、

A : $\frac{1}{2}mv^2$ 、B : $\frac{1}{2}MV^2$　と示すことができ、この 2 つのエネルギーは同じであったので

$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}MV^2$　という関係式を立てることができる。これを整理して、

$mv^2 = MV^2$

$v^2 = \frac{M}{m}V^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{M}{m}V^2} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{M}{m}} \cdot V$　と v を示せる。

↑

$M > m$ なので、$\sqrt{\frac{M}{m}}$ は 1 より大きく、そのことから、

$v > V$ といえる。よって A の方が速いとわかる。

読み物　仕事率

短い時間で多くの仕事ができるほど、仕事の能率が大きいといえる。そして、1 秒あたりにする仕事のことを仕事率という。

文字：P　パワーの頭文字　　単位：〔W〕　読み：ワット

＊仕事 W と同じ文字を使うから紛らわしい。

〔J/s〕　読み：ジュール毎秒　でもよい。

計算方法は２通り。

① 1 秒あたりの仕事量なので、

$$P = \frac{W}{t}$$

② 1 秒あたりの移動距離で仕事を計算すればよく「1 秒あたりの移動距離 x」は「速さ v」のことなので

$$P = Fv$$

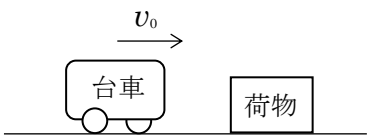
この方法①、②を数式的につなげると、

$P = \frac{W}{t}$ の式に、$W = Fx$ を代入すると、$P = \frac{W}{t} = \frac{Fx}{t}$ となり、$\frac{x}{t}$ は距離÷時間のことなので、

$\frac{x}{t} = v$ とかけ、$P = \frac{W}{t} = \frac{Fx}{t} = Fv$ とかけて、①から②の式に変形できる。

読み物　エネルギーの定義は「仕事をする能力」

『エネルギー』を辞書で引くと『仕事をする能力』と説明されている。今まで学習してきた『仕事をされることで運動エネルギーが増える』の逆回しで、『運動エネルギーを消費をして仕事をする』という考え方である。

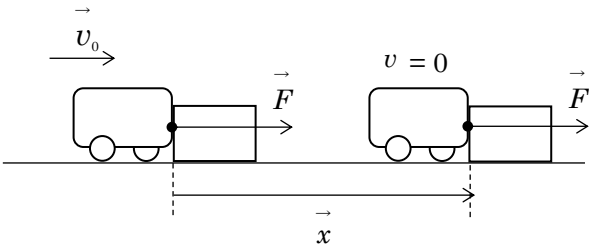


運動エネルギーを持つ物体は、そのいきおいで他の物体に仕事ができるのだ。次のページで、実際に計算をしてみる。

読み物続き　エネルギーを消費して仕事をする、ということを計算で示す。

STEP1 動いている台車が荷物に仕事をして停止するまでのメカニズムを図にして立式する。

台車はぶつかった勢いで、荷物を力$\vec{F}$で押し x だけ動かし、停止した。

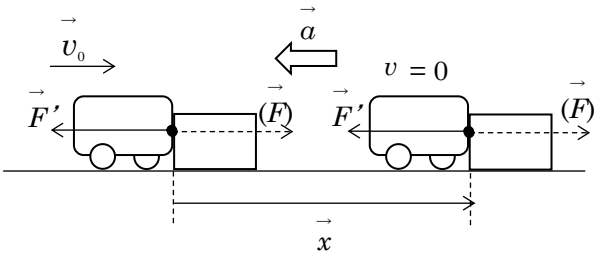


台車がした仕事 W は、

$W =$ Fx ・・・①

この Fx を、台車の持つ物理量である m と v を用いて表したい。

台車は荷物から反作用$\vec{F}'$ で押し返され、減速する。



運動方程式より

ma = F' ・・・②

公式 $v^2 - v_0^2 = 2ax$ より

$0^2 - v_0^2$ = $2(-a)x$ ・・・③

＊v_0 に対して a が逆向きなことに注意

STEP2 ①式で示した W を、②や③を用いて m や v で示してみる。

・①式の F と②式の F' は、作用反作用の関係より、大きさが同じ。よって①式の F に②式 $ma=F'$ をそのまま代入できる。

・③式を変形し、『$x =$ $\dfrac{{v_0}^2}{2a}$ 』の形にすると、①式の x に代入できる。

・①式 $W = Fx$ にこれらの式を代入し、

$$W = ma \times \frac{{v_0}^2}{2a}$$ 整理して $$W = \frac{1}{2}m{v_0}^2$$

このことから

台車が速度 v_0 を持って荷物にぶつかり、速度が 0 になるまで荷物を押し続けたとすると、台車がした仕事 W は運動エネルギー分であったといえる!!

テーマ 4 重力による位置エネルギー

重力による位置エネルギーは次のように計算できる。覚えよう。

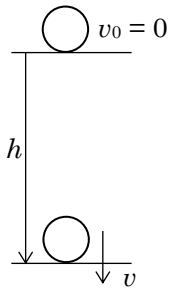
重力による位置エネルギー 覚える！

文字：大文字 $U_{重力}$　頭文字由来ではない　　単位：〔J〕 読み：ジュール

計算式 $U = mgh$

＊ 基準面を設定し、そこからの高さを h とする。基準面より下に物体があると、重力による位置エネルギーは負になる。

なぜ公式が $U = mgh$ となるのかを考えてみる。

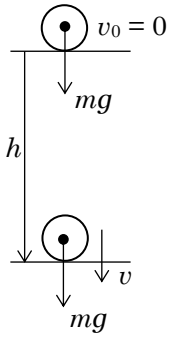


高さ h の地点に物体があったとして、その物体は落下することで、速度を得る。ここで、物体では、

重力による位置エネルギー → 運動エネルギー

というエネルギーの種類の変換が起きている。

では、どのくらいの運動エネルギーになっているかという計算をしてみる。



重力 mg により引っ張られ、距離 h だけ移動しているので、

$W = mg \times h$

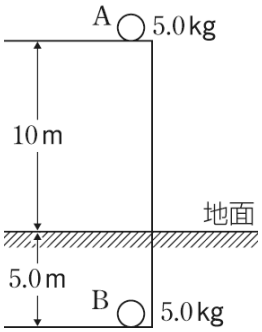
という仕事をされている。これが到達時の運動エネルギーといえるのだ。

このことから、高いところにあった物体は mgh のエネルギーを持っていたということがいえ、それが重力による位置エネルギーなのだ。

＊位置エネルギーは、運動エネルギーに一旦変換されることで、そこからさらに色々なエネルギーに変換できるようになるので、海外ではポテンシャル（潜在的）エネルギーと言われる、日本語訳がだいぶ違うので、海外で勉強するときは気をつけよう。

問題 7　基準面

質量 5.0 kg の物体 A が高さ 10 m の建物の屋上にあり，同じ質量の物体 B が地下 5.0 m の地下室の床上にある。次の各場合について，物体 A と物体 B の重力による位置エネルギーU_A〔J〕，U_B〔J〕を求めよ。重力加速度の大きさを 9.8m/s² とする。



(1) 地面を基準面としたとき

(2) 地下室の床を基準面としたとき

問題 7　解答　(1) $U_A = 490$ J　　$U_B = -250$ J

(2) $U_A = 740$ J　　$U_B = 0$ J

問題 7　解説

(1) 重力による位置エネルギーの式 $U = mgh$ より

$U_A = 5.0 \times 9.8 \times 10 = 490$ J

$U_B = 5.0 \times 9.8 \times (-5.0) = -245 \fallingdotseq -250$ J

Point

基準面は、基準面に物体があるとき重力による位置エネルギーを 0 にする、という基準だ。

① 基準面より高いと正の値

② ちょうど基準面なら 0

③ 基準面より低いと負の値

と整理しておこう。

基準面より低いときは、基準面まで持ち上げるために、仕事をしてあげる必要があり、仕事でエネルギーを増やした結果、エネルギーが 0 になっている、ということから、元々のエネルギーが負だったと考えられるのだ。

(2) 重力による位置エネルギーの式 $U = mgh$ より

$U_A = 5.0 \times 9.8 \times 15 = 735 \fallingdotseq 740$ J

$U_B = 0$ J

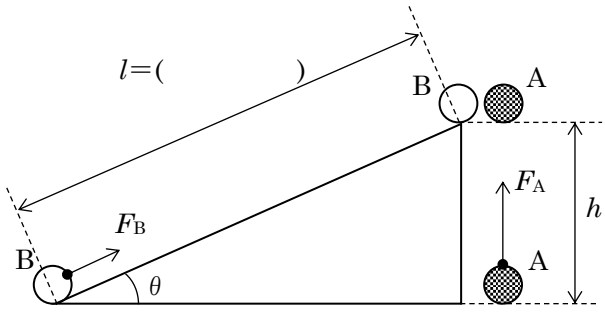
Point

基準面は、自分で勝手に設定してよく、問題の中で一番低くなるところを基準にすれば、(2)のように重力による位置エネルギーが負になることはないので、計算しやすくなる。

テーマ 5　仕事の原理

問題 8　斜面を使って持ち上げる仕事

傾角 θ のなめらかな斜面がある。水平面から、斜面の上端までの高さは h である。物体 A、B を斜面の上端までゆっくりと持ち上げる。重力加速度の大きさを g として、以下の問いに答えよ。



(1) m、g、h、θ から必要な文字を用いて、図中の空欄に適切な文字式を入れよ。

F_B = (　　)　F_A = (　　)

(2) 力 F_A が物体 A にした仕事 W_A を m、g、h を用いて表せ。

(3) 力 F_B が物体 B にした仕事 W_B を m、g、h を用いて表せ。

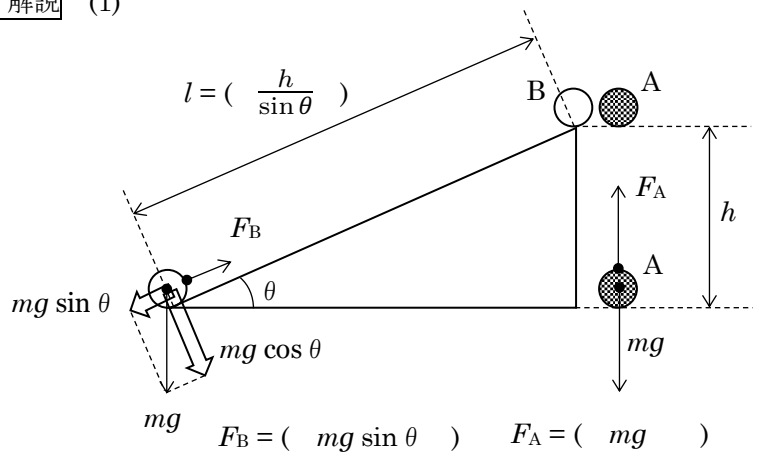
(4) 持ち上げた物体 A を静かに手ばなした。物体が床に到達するまでに、重力が物体にする仕事はいくらか。m、g、h を用いて表せ。

(5) 持ち上げた物体 B を静かに手ばなした。物体が斜面を下り、床に到達するまでに、重力が物体にした仕事はいくらか。m、g、h を用いて表せ。

この問題は、答えは全て一緒で、計算過程が異なるタイプの問題なので、よく解説を読むことを大切にしましょう。

問題８　解答　(1) 下図参照　(2) mgh　(3) mgh　(4) mgh　(5) mgh

問題８　解説　(1)



『ゆっくりと』は『一定の速さ（加速してない速さ）』という意味。つまり『つりあった状態で移動』している。すると上図のように力を書いて、つりあいの式を立てられる。

Aのつりあい　$F_A = mg$　　Bのつりあい　$F_B = mg \sin\theta$

斜面の長さ l は、三角比の関係から、$\sin\theta = \dfrac{h}{l}$　となるので、$l = \dfrac{h}{\sin\theta}$　となる。

(2) $W = Fx$ より

$W_A = mg \times h = mgh$

(3) $W = Fx$ より

$W_B = mg \sin\theta \times \dfrac{h}{\sin\theta} = mgh$

(4) 物体Aにかかる重力の進行方向成分は mg なので、F には mg をそのまま代入する。

$W = mg \times h = mgh$

(5) 物体にBにかかる重力の進行方向成分は $mg\sin\theta$ なので、F には $mg\sin\theta$ を代入する。

$W = mg \sin\theta \times \dfrac{h}{\sin\theta} = mgh$

ポイント

重力に逆らって持ち上げるための仕事や、落ちるときに重力による仕事は、**経路が異なっても、同じ高さなら同じ仕事量**になっている。これを『**仕事の原理**』という。また、力の種類によって、仕事の原理が成り立つ力と、成り立たない力があり、成り立つ力を『**保存力**』、成り立たない力を『**非保存力**』と分類する。

（保存力は斜面など、長い距離を移動する経路だと、その分小さい力でよくなり、仕事量が変わらない。）

（摩擦力などは、長い距離を動く経路にしても、力の大きさは同じなので、その分仕事量が大きくなってしまう。こういう力が非保存力である。）

テーマ 6 保存力による仕事

前の問題 8 の(4) (5)に注目してみよう。

(4) 持ち上げた物体 A を静かに手ばなした(高さ h から真下に落下)。物体が床に到達するまでに、重力が物体にする仕事はいくらか。m、g、h を用いて表せ。

⇒ 解答は mgh

(5) 持ち上げた物体 B を静かに手ばなした。物体が斜面（距離は l だが、高さは h）を下り、床に到達するまでに、重力が物体にした仕事はいくらか。m、g、h を用いて表せ。

⇒ 解答は mgh

重力は保存力に分類され、『仕事の量が経路によらずに高さだけで決まる』という特徴がある。その結果、(4)も(5)も、重力がした仕事の量は mgh となっている。

そして、mgh という大きさは、重力による位置エネルギーの大きさと同じである。
このような計算から次のようなことがいえる。

『重力による仕事は、重力による位置エネルギーを消費して行なっている仕事である』

さらに問題 8 の(2) (3)に注目してみる。

(2) 力 F_A（重力に逆らう力）が物体 A にした仕事 W_A を m、g、h を用いて表せ。

⇒ 解答は mgh

(3) 力 F_B（斜面方向の重力に逆らう力）が物体 B にした仕事 W_B を m、g、h を用いて表せ。

⇒ 解答は mgh

重力に逆らって持ち上げる仕事が、重力による位置エネルギーと同じ大きさになっている。

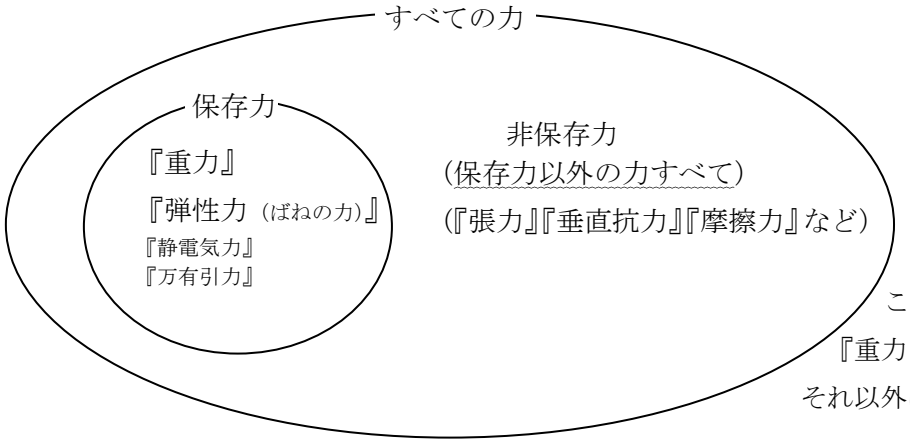
このような計算から次のようなことがいえる。

『重力に逆らってした仕事は、その仕事分、重力による位置エネルギーを増やしている』

この性質は、重力以外の保存力（弾性力など）でも成り立つので、『保存力に関する仕事の特徴』として覚えておこう。

読み物　保存力と非保存力

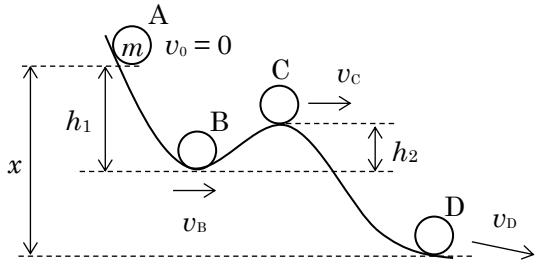
力は全て、『保存力』と『非保存力』に分けられる。以下のようなイメージ。



この章では、
『重力と弾性力は保存力
それ以外はすべて非保存力』
と考えよう。

問題 9 保存力の特徴の利用

右図のようななめらかな斜面上を、質量 m のボールが A 点から静かにスタートした。重力加速度の大きさを g とする。



以下の文章の空欄に当てはまる文字式を答えよ。

物体が A から B まで移動する際に、物体がされる仕事を考える。A→B の移動では、物体の持つ重力による位置エネルギー（以降、重力エネと呼ぶ）の変化 ΔU_{AB} は（①　　）（符号も考慮せよ）といえる。失った重力エネの分だけ物体は仕事 W_{AB} をされるので、物体は（②　　）だけ仕事をされている。エネルギーの原理の式をたてると、（③　　）となるので、$v_B =$（④　　）となる。

同様に、A→C の移動では、物体の失った重力エネは（⑤　　）といえ、その分だけ仕事 W_{AC} をされるので、エネルギーの原理の式を立てると（⑥　　）となり、$v_C =$（⑦　　）となる。

A→D の移動において、失った重力エネは（⑧　　）であり、エネルギーの原理の式をたてると（⑨　　）となるので、x の大きさを g と v_D を用いて表すと、$x =$（⑩　　）と示すことができる。

問題 9　解答　① $-mgh_1$　② mgh_1　③ $0 + mgh_1 = \frac{1}{2}mv_B{}^2$　④ $\sqrt{2gh_1}$

⑤ $mg(h_1 - h_2)$　⑥ $0 + mg(h_1 - h_2) = \frac{1}{2}mv_C{}^2$　⑦ $\sqrt{2g(h_1 - h_2)}$

⑧ mgx　⑨ $0 + mgx = \frac{1}{2}mv_D{}^2$　⑩ $\frac{v_D{}^2}{2g}$

問題 9　解説　保存力に関する仕事は、経路に関係がないので、斜面の角度が分からなくても考えることができるということがポイントになる。

① 『変化といえば、後－前』である。B の位置を基準面とすると、

A での重力エネ：mgh_1　、　B での重力エネ：0

よってエネルギーの変化 ΔU_{AB} は

$$\Delta U_{AB} = 0 - mgh_1$$
$$= -mgh_1$$

② エネルギーの変化 ΔU_{AB} が、①より $\Delta U_{AB} = -mgh_1$ ということは、mgh_1 だけエネルギーが減ったということである。よって、失ったエネルギーの量は mgh_1

これが、物体がされた仕事 W_{AB} といえる。

③ ㊀運動エネ ＋ $\boxed{\text{された仕事}}$ ＝ ㊁運動エネ という立式をすると、

$$0 + mgh_1 = \frac{1}{2}mv_B^2$$ となる。

④ 前問③の式を v_B について解いて

$$v_B = \sqrt{2gh_1}$$

⑤ 前問①、②と同様に考える。

（B の位置を基準面とすると）

A での重力エネ：mgh_1　　C での重力エネ：mgh_2　であるから

$\Delta U_{AC} = mgh_2 - mgh_1 = mg(h_2 - h_1)$

となる。$h_2 < h_1$ なので、$(h_2 - h_1)$は負の値になるので、

$\Delta U_{AC} = mgh_2 - mgh_1 = mg(h_2 - h_1) = -mg(h_1 - h_2)$

と書いた方が、頭についた符号で ΔU_{AC} が＋なのか － なのか判断できるので美しい。

このことから、エネルギーは $mg(h_1 - h_2)$だけ減ったということがわかり、

これが A→C でされた仕事 W_{AC} である。$W_{AC} = mg(h_1 - h_2)$

⑥ ㊀運動エネ ＋ $\boxed{\text{された仕事}}$ ＝ ㊁運動エネ という立式をすると、

$$0 + mg(h_1 - h_2) = \frac{1}{2}mv_C^2$$ となる。

⑦ 前問⑥を v_C について解いて、

$$v_C = \sqrt{2g(h_1 - h_2)}$$

⑧ D の位置を基準面として、失った重力エネを考える。

A での重力エネ：mgx　　D での重力エネ：0　　であるから

(減少量) = mgx

となる。これが A→D でされた仕事 W_{AD} である。

＊基準面を B の位置にして計算しても同じ結果になる！！試してみよう。これが基準面が指示されなかったとき、自分で勝手に決めていい理由である。

⑨ ㊀運動エネ ＋ $\boxed{\text{された仕事}}$ ＝ ㊁運動エネ という立式をすると、

$$0 + mgx = \frac{1}{2}mv_D^2$$ となる。

⑩ 前問⑨を x について解いて、　$x = \dfrac{v_D^2}{2g}$

ConcepTest 4 ポテンシャルエネルギー

大きさの違う大理石の石を 2 つ用意する。大きい石は小さい石の 2 倍の質量である。ビルの屋上から地面に向かって 2 つの石を静かに落下させたとき、地面にぶつかる直前の、大きい石と小さい石の持つ運動エネルギーの関係はどうなるか。

(ア) 大きい石は小さい石と同じエネルギーを持っている。
(イ) 大きい石は小さい石の 2 倍のエネルギーを持っている。
(ウ) 大きい石は小さい石の半分のエネルギーを持っている。
(エ) 大きい石は小さい石の 4 分の 1 のエネルギーを持っている。
(オ) 解答には情報が足りない。

ConcepTest 5 保存力の特徴

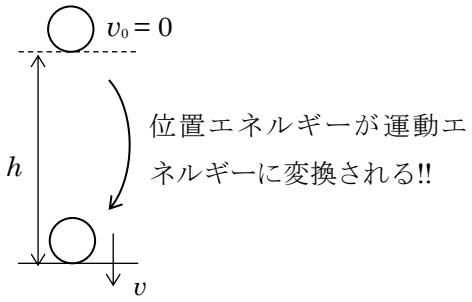
マウンテンバイクに乗って、丘の上まで上る。このとき丘のふもとから頂上に続く道が 2 本あり、一方の道は、もう一方の坂の 2 倍の長さがある。道のりの短い坂を登る時に必要な平均の力を F とすると、長い坂を登る時に必要な平均の力はいくらか。

(ア) $\frac{F}{4}$　(イ) $\frac{F}{3}$　(ウ) $\frac{F}{2}$　(エ) F　(オ) $2F$

ConcepTest 4 解答　イ

ConcepTest 4 解説

高い位置にある物体は、最初に持っていた重力による位置エネルギーが変換されて運動エネルギーになる。



よって、最初に持っていた重力エネを比べればいい。

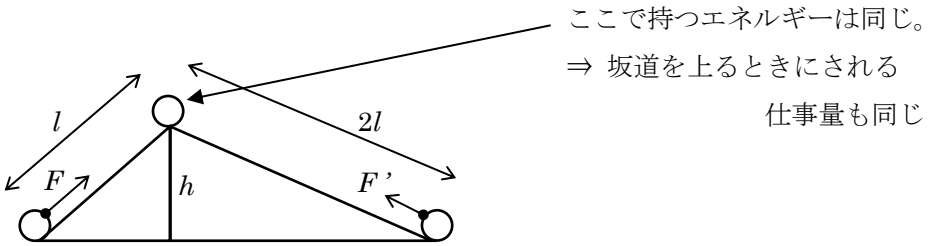
質量が 2 倍なら、重力による位置エネルギーの公式 mgh より、エネルギーは 2 倍もっているといえる。

よってイ。

ConcepTest 5 解答　ウ

ConcepTest 5 解説

重力は保存力であり、保存力に関する仕事は、経路によらない。そのことから、重力による位置エネルギーも経路によらず、高さだけで仕事やエネルギーの量が決まる。



傾きが違う坂道でも、同じ高さまで上がるなら、必要になる仕事量は同じなので、

(急な坂道での仕事)　＝ (緩やかな坂道での仕事)　という式が成り立ち

$$Fl = 2F'l$$

と立式できる。ここから $F' = \frac{1}{2}F$　となる。

よってウ。

坂が緩やかだと力が楽になる分、距離で損をするのだ。

テーマ 7　弾性力による位置エネルギー

弾性力による位置エネルギーは次のように計算できる。覚えよう。

弾性力による位置エネルギー　覚える！

文字：大文字 $U_{弾性}$　重力による位置エネと文字が同じ　単位：〔J〕 読み：ジュール

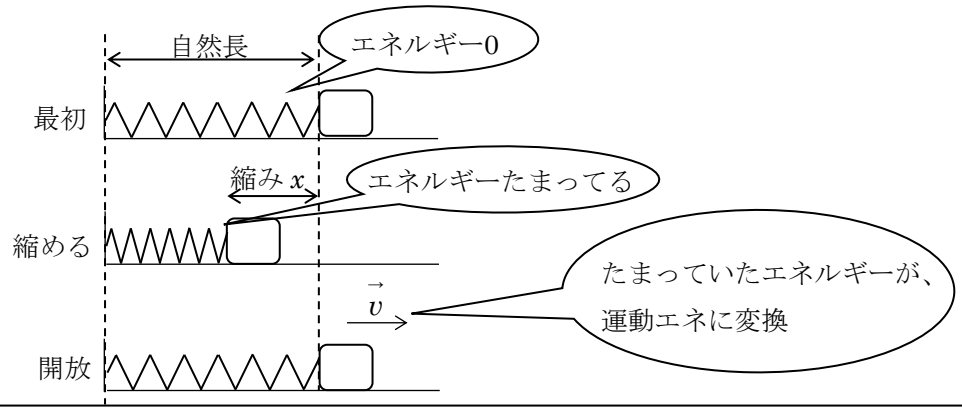
計算式　$U = \frac{1}{2}kx^2$　(k はばね定数　x は自然長からの伸び縮み)

＊ 伸びている場合も、縮んでいる場合もエネルギーの値は正になるので注意する。

なぜ公式が $U = \frac{1}{2}kx^2$ となるのかを考えてみる。

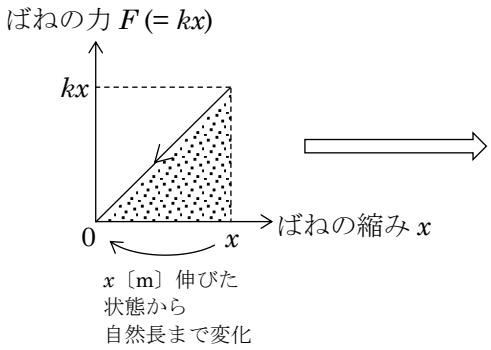
モデル

ばね定数 k のばねに、おもりをつけ、自然長から x 縮めた。縮めた状態からばねが自由に動けるように開放すると、物体が押し出された。



縮まったばねに押されて、物体は運動エネルギーを得ている。
（ばねの持っていたエネルギー）＝（物体の得た運動エネルギー）
といえることを利用し、運動エネルギーを計算することで、ばねの持っていたエネルギーを計算しよう。

エネルギーの原理より、ばねが物体にする仕事 $W = Fx$ の分だけ運動エネルギーを得る。しかし、F の大きさが、一定ではなく、単純に計算することができない（フックの法則より、$F = kx$ といえるので、ばねの縮みが大きいほど F が大きい)。
そこで $F-x$ グラフを書き、その面積を求める手法をとる。



グラフの面積は、(縦軸)×(横軸)の物理量を示すので、$F-x$ グラフの面積は(力)×(距離)、つまり、仕事を示すのだ。

今回の面積は、$\frac{1}{2}\times kx\times x$

$= \frac{1}{2}kx^2$

これが、ばねが物体にした仕事であり、ばねの持っていたエネルギーといえる。

＊ ばねを伸ばして手を離したときも、物体は速度を得る動きをするため、エネルギーはプラスの値となる。

公式

弾性力による位置エネルギー：$\frac{1}{2}kx^2$

x は自然長からの『のび』や『縮み』。必ず正の値をとる。

問題 10 弾性力による位置エネルギー

ばね定数が 20 N/m のばねの一端を壁に接続し、もう一方に質量 0.20 kg の物体をくくりつけた。ばねを自然長から 0.50 m 縮めて手ばなすと物体はばねに押し出され運動した。

(1) ばねを 0.50 m 縮めているとき、ばねの持つ弾性力による位置エネルギーはいくらか。

(2) ばねが自然長まで戻るまでの間に、ばねが物体にする仕事はいくらか。

(3) ばねが自然長に戻ったときの物体の速さはいくらか。

(4) 0.50 m の縮みから 0.30 m の縮みになるまでの間に、ばねが物体にする仕事はいくらか。

問題 10　解答　(1) 2.5 J　(3) 2.5 J　(3) 5.0 m/s　(4) 1.6 J

問題 10　解説

(1) 弾性力による位置エネルギーの公式 $\frac{1}{2}kx^2$ を用いて計算する。

(弾性力による位置エネルギーU) = $\frac{1}{2}\times 20\times 0.50^2$ = 2.5 J

(2) 弾性力も保存力であるため、保存力のする仕事と同じ特徴を持つ。つまり、重力エネルギーを失った分、重力が仕事をするように、**弾性エネルギーを失った分だけ、ばねは仕事をする**のだ。

最初は、前問(1)で求めた 2.5 J の弾性エネを持っていて、自然長のときには 0 になる。

よって、ばねは 2.5 J の弾性エネを失っている。ばねは物体に 2.5 J の仕事をする。

(3) 物体は前問(2)より 2.5 J の仕事をされたとわかるので、運動エネルギーと仕事の関係より、

前運動エネ　＋　仕事　＝　後運動エネ

$$0 + 2.5 = \frac{1}{2}\times 0.20\times v^2$$

v について解いて、　v = 5.0 m/s

(4) ばねが 0.50 m の縮みから 0.30 m の縮みになったときに、弾性エネがどれくらい減ったかを考える。

前 0.50 m の縮みのとき: $\frac{1}{2}\times 20\times 0.50^2$　　後 0.30 m の縮みのとき: $\frac{1}{2}\times 20\times 0.30^2$

弾性力による位置エネルギーの変化量 ΔU は、変化＝後−前なので

$$\Delta U = 後\ \frac{1}{2}\times 20\times 0.30^2 - 前\ \frac{1}{2}\times 20\times 0.50^2$$

$$= 0.90 - 2.5$$

$$= -1.6$$

このことから、1.6 J エネルギーが減っているということがわかるので、

ばねが物体にした仕事は 1.6 J

計算のテクニック　　減少量は前－後で計算

エネルギーの分野でのみ、「減少量」がキーになることが多い。変化＝後−前の計算をした後、マイナスの符号をとり、「減少量」を求めていたが、これは前−後という計算をすれば一発で答えがでる。例えば、今回の(4)での計算は以下のようになる。

(弾性エネの減少量) = 前 $\frac{1}{2}\times 20\times 0.50^2$ − 後 $\frac{1}{2}\times 20\times 0.30^2$

= 2.5 − 0.90 = 1.6 J

覚えて損なし

減少量 ＝ 前−後