§ 力学Ⅰ−4 章　剛体

テーマ 1　質点と剛体

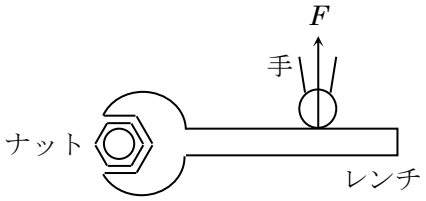
質点 … 体積のない物体　　剛体 … 体積のある物体

実は、いままで扱ってきた物体は、『質点』といい、大きさのない物体を想定していた。だから移動距離を考えるときも物体の中心から測っているのか、端っこから測っているのか、など細かいことを考えなくてよかったのだ。

しかし実際には、物体には大きさがある。そして大きさがあると、質点の時とは違う動きをすることがある。それを考えていくのがこの章『剛体』である。

テーマ 2　モーメント

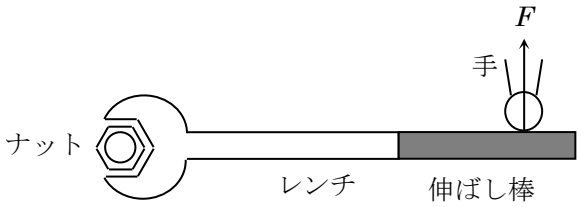
剛体に力を加えたとき、剛体は回転をする。これは質点にはない性質だ。そして、回転させる作用のことを、『モーメント』という。モーメントの特徴を見ていこう。



左図は、ナットをレンチで回している様子であるが、この人がナットをより強く回すためにはどうすればよいか考えてみよう。

単純に思い浮かぶのは、『力 F を大きくする』こと。
マッチョが回した方が、より力強く回せる。しかし急にはマッチョになれない！！

もう一つの方法がコレである。



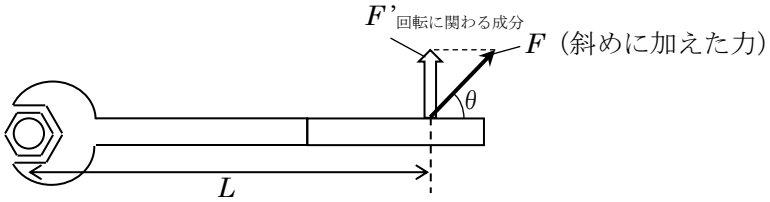
『ナットから遠い位置で力を加える』と、同じ力でも力強く回せるのだ。

このことからモーメントは以下の式で示される。

モーメント M = 力 F × 距離 L　(一般に、反時計周りが正の向き)

力が斜めの場合のモーメントの計算。２通りあるので両方マスターしよう。

① 力 F の『回転に関わる成分』を考える。



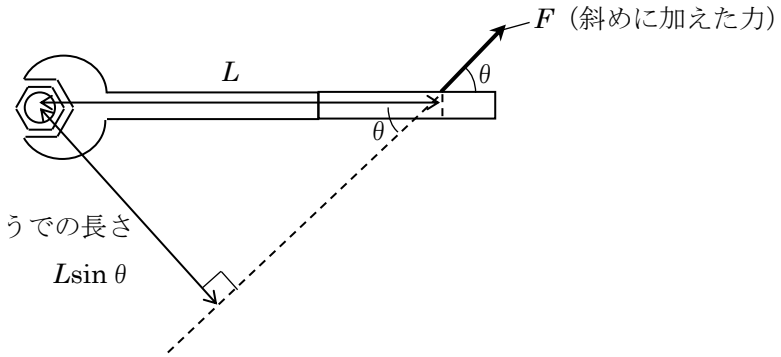
$F'_{\text{回転に関わる成分}}$は、$F\sin\theta$ なので、この場合のモーメント M は、

$M = F\sin\theta \times L$

と計算できる。

② 『うでの長さ』で考える。

力のベクトルを延長し、回転の中心から垂線を下ろしたときの長さを「うでの長さ L」という。(「うでの長さ」は回転の中心からの最短距離となっている)



うでの長さが、$L\sin\theta$ なので、この場合のモーメント M は、

$M = F \times L\sin\theta$

と計算できる。

①、②どちらの方法で計算しても同じ結果になるので OK！

テーマ 3 剛体の動かない条件

剛体の問題では、剛体が静止している場合が多い。動いている場合は大学分野になってしまうからだ。
なので、『動かない条件』を頭に入れておくと、ほとんどの問題に対応できる。

以下の①、②をどちらも満たした場合に、物体は動かない。

① 力のベクトルの和が 0　(移動しない条件)

(x 方向の合計、y 方向の合計が 0。今までの力のつりあい的なイメージ)

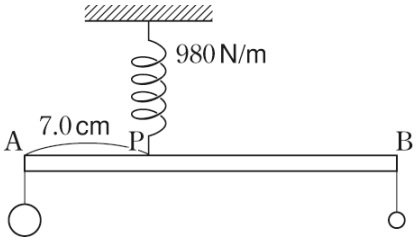
② モーメントの和が 0 (回転しない条件)

(超重要ポイント : 静止している場合は、回転の中心はどこに設定してもよい。未知数がたくさん作用している点にするのがコツ)

問題を解くときは、この 2 式を立てて連立方程式を解く形になる。

問題 1 棒のつりあい

長さ 20 cm で質量 1.0 kg の一様な棒 AB の両端におもりをつるし、A から 7.0 cm の点 P にばね定数が 980 N/m のばねの一端をつけた。ばねの他端を天井に固定して静かに離すと、ばねは 10 cm 伸びて、棒は水平につりあった。A、B につるしたおもりの質量 m_A、m_B〔kg〕を求めてみよう。重力加速度の大きさを $g = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$ とする。



STEP① 棒にはたらく力を全て書き込む。

（棒を丸で囲んで、触れているものを探す。→重力を書き込む。の流れ）

（棒の重さも忘れない）（長さはメートルに直す）

STEP② 『動かない条件 1 』のベクトルの和が 0 の式を立てる。

（上向きの力）　　（下向きの力）

ア	＝	イ

整理して

ウ	＝	エ	・・・(a)式

STEP③ 『動かない条件２』のモーメントの和が０の式を立てる。

回転の中心は『ばねがつながっている点』としてみる

（反時計回りのモーメント）　　（時計回りのモーメント）

オ ＝ カ

整理して

キ ＝ ク ・・・(b)式

STEP④ (a)式、(b)式を連立して、m_A、m_B を求める。

(a)式を変形して、　m_A = ケ ・・・(c)式

これを(b)式に代入して、

コ ＝ サ

m_B について解いて

m_B ＝ シ

これを（c）式に代入して、

m_A = ス ＝ セ

問題１ 解答

(ア) 98　(イ) $m_A \times 9.8 + 9.8 + m_B \times 9.8$　(ウ) 10　(エ) $m_A + 1.0 + m_B$

(オ) $m_A \times 9.8 \times 0.070$　(カ) $9.8 \times 0.030 + m_B \times 9.8 \times 0.13$

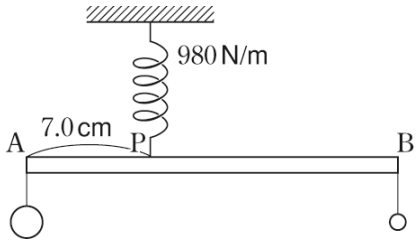
(キ) $7m_A$　(ク) $3.0 + 13m_B$　(ケ) $9.0 - m_B$　(コ) $7\,(9.0 - m_B)$　(サ) $3.0 + 13\,m_B$

(シ) 3.0 kg　(ス) 9.0 － 3.0　(セ) 6.0 kg

重要 物体が静止しているなら、回転の中心はどこでも OK

⇒ 不明数が多い点を回転の中心にすると良い

STEP③別解 違う点を中心にして立式してみる。



回転の中心を A 点にして、モーメントの和が 0 の式を立てる。

（反時計回りのモーメント）　　（時計回りのモーメント）

ソ	＝	サ

↑

不明数 m_A が式に登場しない形で立式ができる！！連立の STEP が減るのだ。

整理して

シ	＝	ス

m_B について解いて

m_B ＝ セ

あとは、(a)式に m_B を代入するか、B 点を回転の中心としたモーメントの式を立式すれば、m_A が求まる。

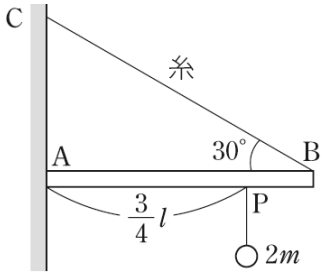
問題 1 別解　解答　(ソ) 98×0.070　(サ) $9.8 \times 0.10 + m_B \times 9.8 \times 0.20$

(シ) 0.7　(ス) $0.1 + 0.2m_B$　(セ) 3.0 kg

＊(シ) 7.0　(ス) $1.0 + 2m_B$ でももちろん OK

問題 2 棒のつりあい

質量 m、長さ l の棒の一端 A を鉛直なあらい壁にあて、他端 B と壁面 C を糸で結ぶ。この棒に質量 $2m$ のおもりを A から $\frac{3}{4}l$ の点 P に下げたら、棒は水平で糸は棒と 30°の角をなしてつりあった。このとき糸の張力 T、A 端にはたらく摩擦力 F、垂直抗力 N の大きさを、重力加速度の大きさを g として求めよ。



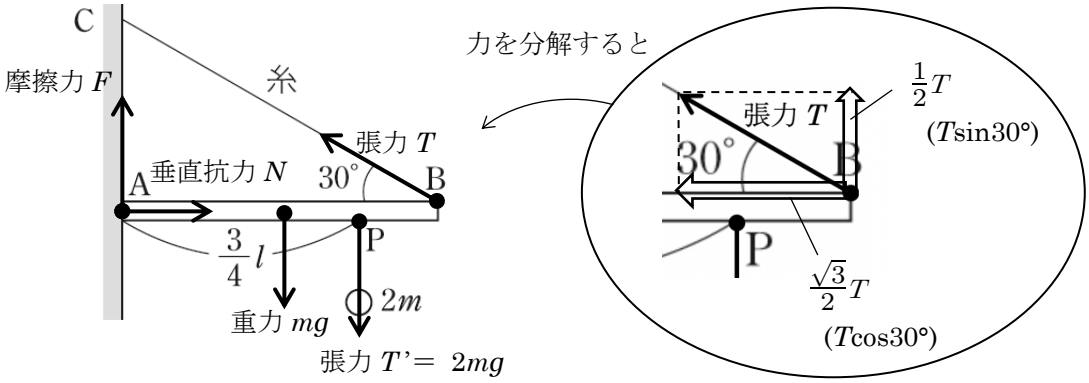
問題 2 解答　$T = 4mg$　$F = mg$　$N = 2\sqrt{3}mg$

問題 2 解説

流れは問題 76 と同じである。

①力を見出す→ ②ベクトルの式を立てる→ ③モーメントの式を立てる→④連立して解く

STEP① 力を見出す



STEP② ベクトルの和が 0 の式を立てる

鉛直方向のつりあい・・・ $F + \frac{1}{2}T = mg + 2mg$　・・・(a)式

水平方向のつりあい・・・$N = \frac{\sqrt{3}}{2}T$ ・・・(b)式

STEP③ モーメントの和が 0 の式を立てる

重要　棒が静止しているので、どこを回転の中心にしても OK。不明数(T、N、F)が多い場所を回転の中心にするとよい。今回は A 点が多い。

A 点を回転の中心にしてモーメントの式を立てると、

（反時計回りのモーメント）　　（時計回りのモーメント）

$\frac{1}{2}T \times l = mg \times \frac{1}{2}l + 2mg \times \frac{3}{4}l$　・・・(c)式

STEP④ 連立して解く

(c)式には、不明数が 1 つしかないので、連立せずに解ける。

(c)式を T について解いて、

$T = \underline{4mg}$

(a)式に $T = \underline{4}mg$ を代入して摩擦力 F について解いて

$F + \frac{1}{2}(4mg) = mg + 2mg \quad \Rightarrow \quad F = \underline{mg}$

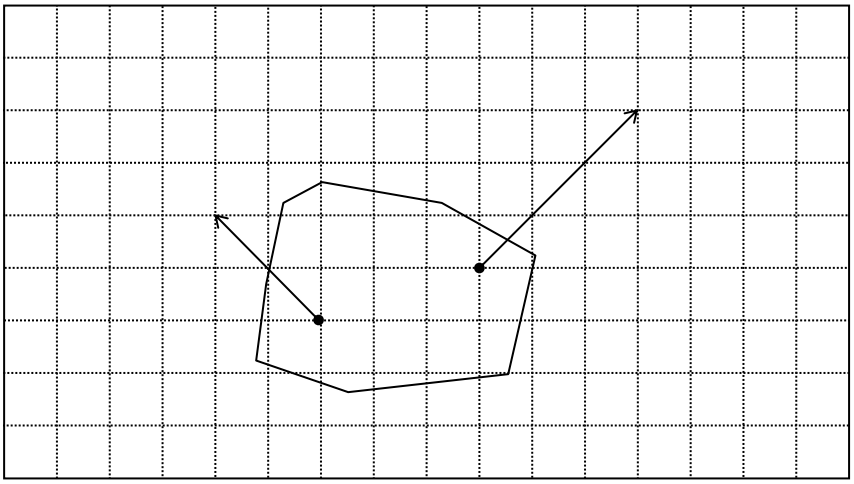
(b)式に $T = 4mg$ を代入して垂直抗力 N について解いて

$N = \frac{\sqrt{3}}{2}(4mg) \quad \Rightarrow \quad N = \underline{2\sqrt{3}mg}$

テーマ 4 平行力の合成と、偶力

ベクトルの合成は、平行四辺形の法則でおこなう。今までは平行四辺形を作るために、ベクトルの移動を自由にしてよかったが、**剛体の場合は、同じ作用線上でしか移動できない**（同じ作用線上ならうでの長さに変化がないので、モーメントが変わらないのだ)。これに気をつけて作図する。

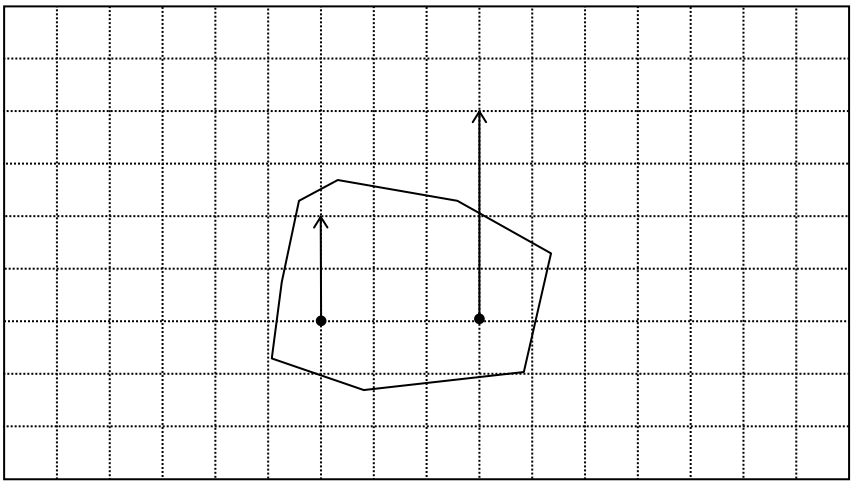
① 平行でない 2 力の場合



1.作用線を伸ばす

2.重なった点で平行四辺形の法則で合成

② 同じ向きの平行な 2 力の場合



1.両方のベクトルに、左右対称の水平ベクトルを追加し、合成

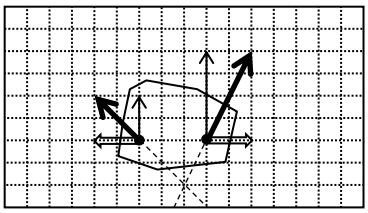
2. 平行力ではなくなるので、①と同様に合成

3.元々のベクトルの作用点を結んだ線まで移動する。
(見た目の問題)

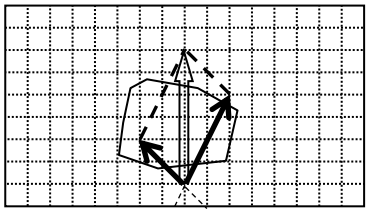
Point

平行力が同じ向きの場合、力の大きさの比で内分した点に作用点ができる!!
大きさは、単純に足し算したものになる。

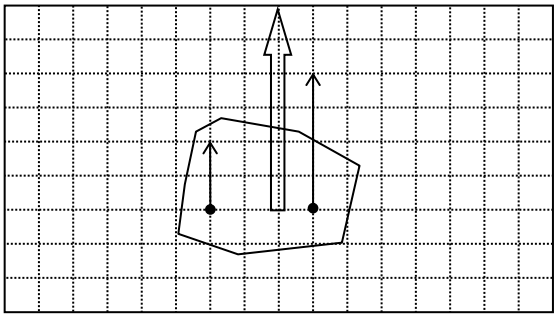
解答② 同じ向きの平行な 2 力の場合



1.両方のベクトルに、左右対称の水平ベクトルを追加し、合成
＊追加したベクトルは合計すると 0 なので、追加していいのだ

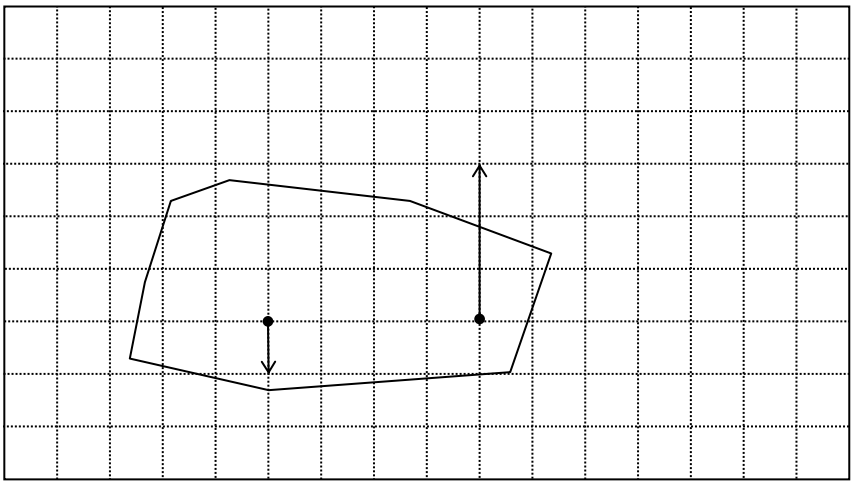


2. 平行力ではなくなるので、①と同様に合成



3.元々のベクトルの作用点を結んだ線まで移動する。
(見た目の問題)

③ 逆向きの平行な 2 力の場合



1.両方のベクトルに、左右対称の水平ベクトルを追加し、合成

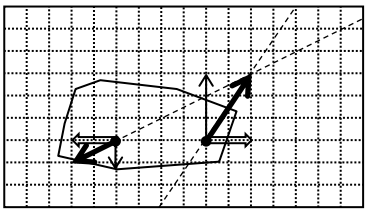
2. 平行力ではなくなるので、①と同様に合成

3.元々のベクトルの作用点を結んだ線まで移動する。

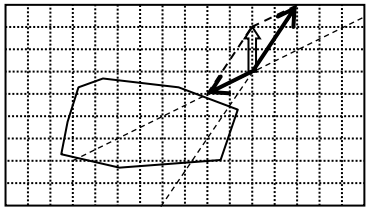
Point

平行力が逆向きの場合、力の大きさの比で外分した点に作用点ができる!!
大きさは、単純に引き算したものになる。

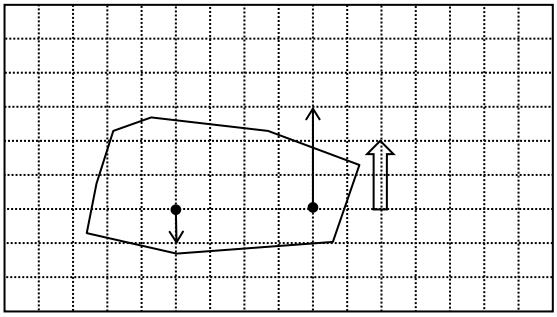
解答③ 逆向きの平行な 2 力の場合



1.両方のベクトルに、左右対称の水平ベクトルを追加し、合成
＊追加したベクトルは合計すると 0 なので、追加していいのだ



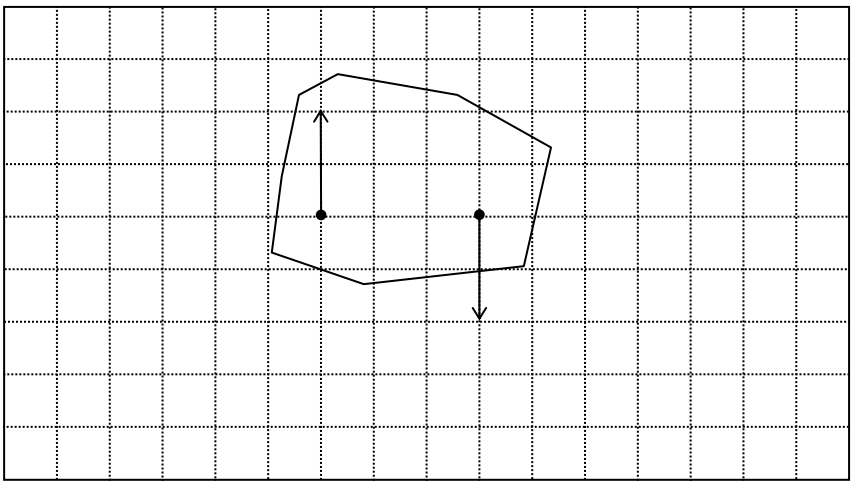
2. 平行力ではなくなるので、①と同様に合成



3.元々のベクトルの作用点を結んだ線まで移動する。

---

④ 逆向きで同じ大きさの平行な 2 力の場合



1.両方のベクトルに、左右対称の水平ベクトルを追加する。

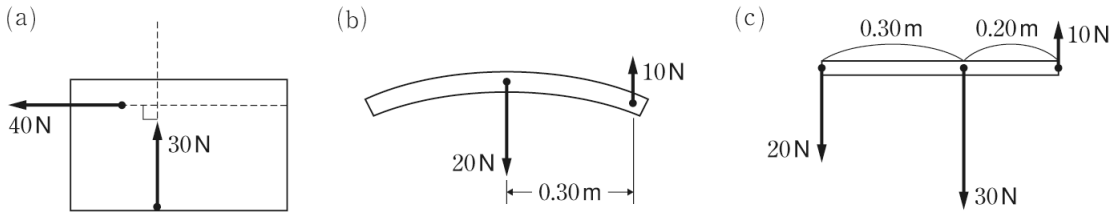
2. ①と同様に合成

平行力が逆向きで、力の大きさが同じ場合、力の合成を行えない。
このような 2 力を『偶力』という。物体をその場で回転させる力となる。

車のハンドルなどを回すような力が偶力である。逆向きで同じ力を加えているのだ。

問題 3 力の合成

次の各図で示された力の合力 F〔N〕を図示し，その大きさ F〔N〕を求めよ。



問題 3 解答 図示：解説参照　大きさ：(a) 50 N　(b) 10 N　(c) 40 N

問題 3 解説

(a) 2 つの力を，それらの作用線上の交点に移動して合成すると、図 a のようになる。

三平方の定理より $F = \sqrt{40^2 + 30^2} = \underline{50\ \mathrm{N}}$

(3:4:5 の有名三角形を利用して求めてもよい)

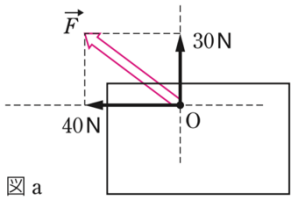


図 a

(b) 2 つの力は平行で逆向きなので、その合力の大きさは、2 力の差になる。よって $F = 20 - 10 = \underline{10\ \mathrm{N}}$

合力の作用線と 20 N の力の作用線間の距離を x〔m〕とすると、合力の作用線は 2 力の作用点間を力の逆比に内分するから

$x : (x + 0.30) =$ ① : ②

これを解いて、$x = 0.30$ m

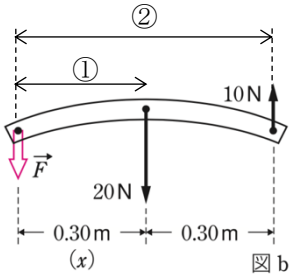


図 b

(c) まず、30N と 10N の力の合力を求める。

大きさは 2 力の差になるので、 $30 - 10 = \underline{20\ \mathrm{N}}$

合力の作用線と 30 N の力の作用線間の距離を x〔m〕とすると、(b)と同様に

$x : (x + 0.20) =$ ① : ③　　これを解いて $x = 0.10$ m

以上より、合力は図 c のようになる。

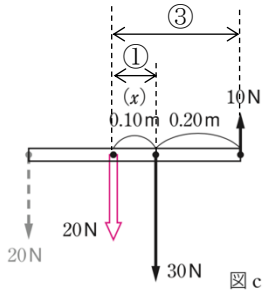


図 c

さらに、この力と 20 N の力の合力を求める。大きさは 2 力の和になるので

$F = 20 + 20 = \underline{40\ \mathrm{N}}$

合力の作用線は 2 力の作用点間を力の逆比に内分するので、この場合はその中点を通る。

よって、合力は図 d のようになる。

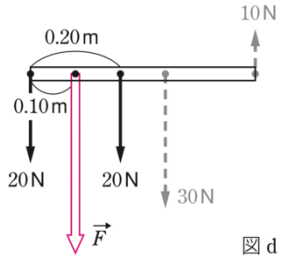


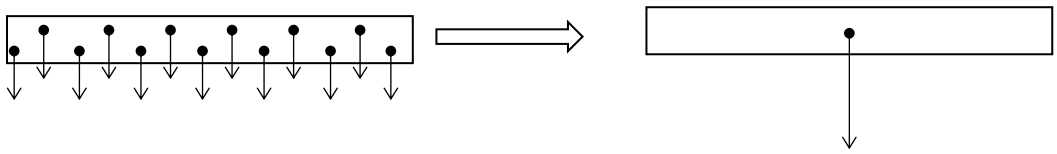
図 d

テーマ５ 重心

重心は「物体にかかる重力の作用点」のことである。そして厳密に分析すると、重力は原子１つ１つにかかっているはずである。

太さが均一な棒で考察してみよう。

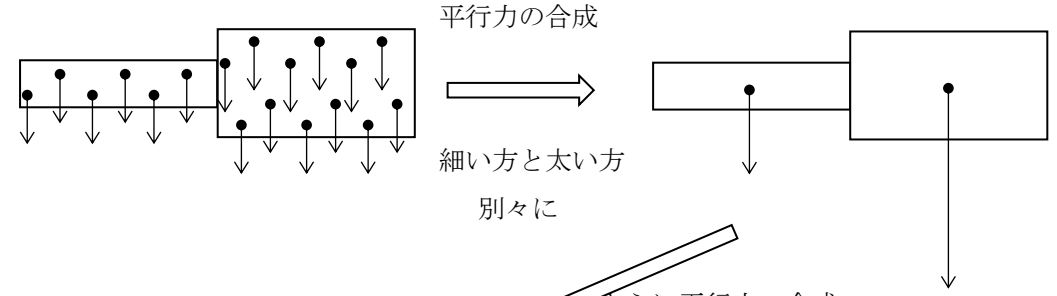
棒　　平行力の合成



作用点はちょうど真ん中になる。
ここが重心である。

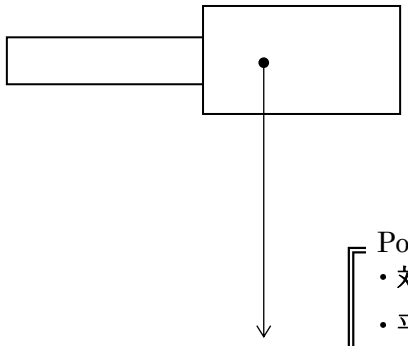
太さが均一でないとどうなるか考察

平行力の合成



細い方と太い方
別々に

さらに平行力の合成



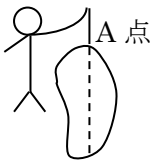
太い側にかたよった内分点が作用点となる。
ここが重心となる。

Point

- **対称的な形で密度が均一なら、重心は物体の中心にある。**
- **平行力の合成をしていった際の、作用点を重心という。**

また、下図のようにも重心の位置は考えられる。

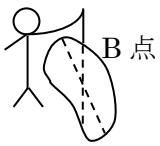
①A 点に糸をつけ、つるし、静止させる。



点線上のどこかに重心

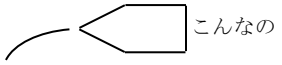
（張力と重力で同じ作用線上にないと、偶力となり回転するから）

②B 点に糸をつけ、つるし、静止させる



点線上のどこかに重心

交点が重心



問題では、特殊な形の物体の重心を聞かれるタイプのものもある。そういう時は、

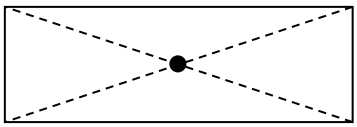
① 図形的に重心の位置がわかっている形状にその物体を分解。
② 分解したそれぞれの部品の重力を合成する。

という手順で重心を求めることが出来る。

図形的に重心の位置がわかる、というのは下記のような場合。覚えておこう。

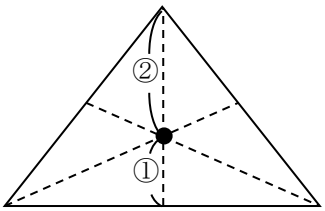
均一な太さの棒　⇒　中点が重心

正方形・長方形　⇒　対角線の交点が重心



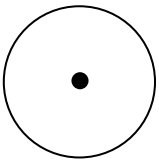
三角形

⇒ どこかの辺に対する 2 等分線を 2:1 に内分する点が重心



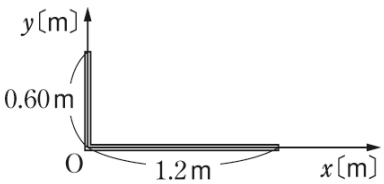
円

⇒　円の中心が重心



問題 4 針金の重心

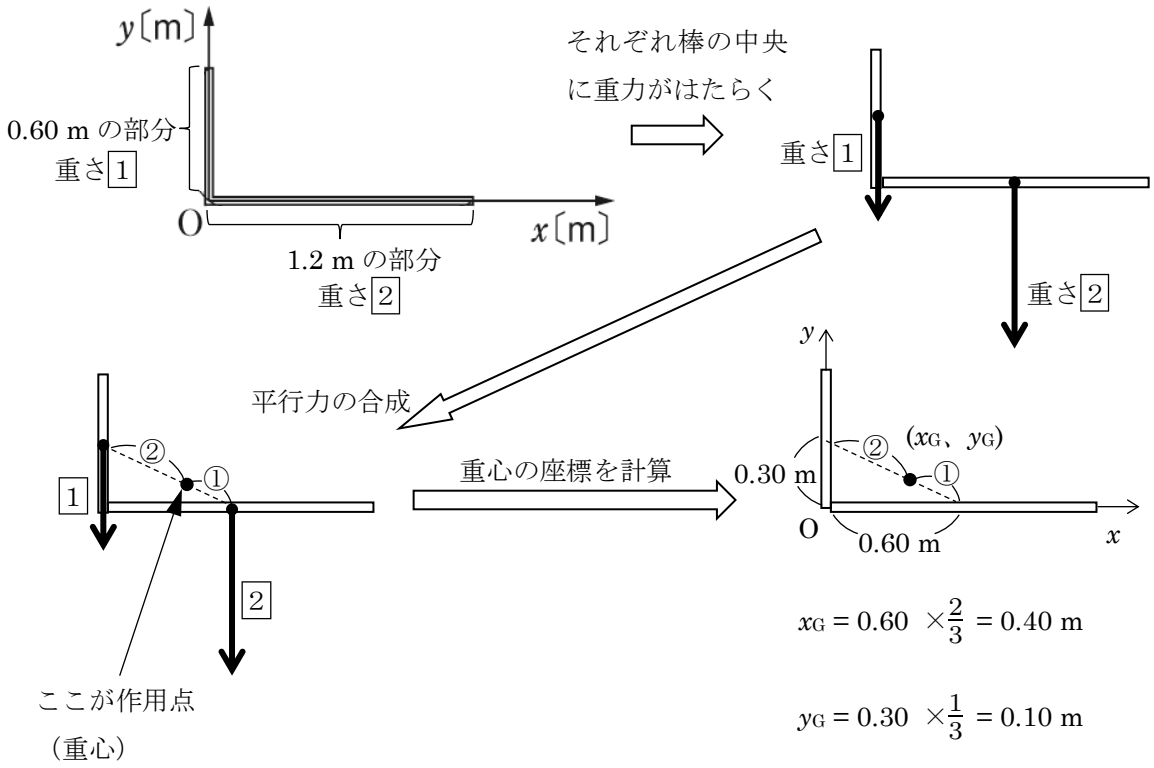
長さ 1.8m の一様な針金を，図のように一端から 0.60m の所で直角に曲げ，L 字形にする。このときの針金の重心の位置の座標(x_G，y_G)を求めよ。



問題 4 解答　（0.40 m、0.10 m）

問題 4 解説

折れた針金を、まっすぐな針金が 2 つつながっている物と考えて、平行力の合成で考える。y 軸の 0.60 m 部分と、x 軸部分の 1.2 m 部分にわけて考えると、長さの比が、1 : 2 なので、重さの比は 1 : 2 といえる。



＊別解　重力座標を求める公式がある。

重力の座標公式

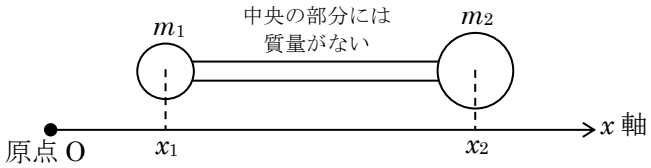
$$x_G = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}$$

3 点以上の重力の合成なら、$x_G = \dfrac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 \ldots}{m_1 + m_2 + m_3 \ldots}$

この公式に何を代入するかを理解するためには、公式の導出を一度してみたほうが良い。次ページでやってみよう。

《重力座標 x_G の公式の導出》

x 座標の x_1 と x_2 の位置に質量 m_1、m_2 の重さがある部分のある棒がある。



① 棒の長さを x_1、x_2 で表すと? ⇒ (ア)＿＿＿＿＿＿＿＿

② 質量の比から、それぞれの左の球と、右の球にはたらく重力の比は ⇒ (イ)＿＿＿＿＿＿

③ 重力の比(逆比)で内分する点が平行力の合力の作用点なので、x_1 から重心までの距離は？

⇒ (ウ)＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

④ 原点から重心までの距離(座標 x_G)は？ ⇒ (エ)＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

整理して

x_G = (オ)＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

《公式の導出》の解答

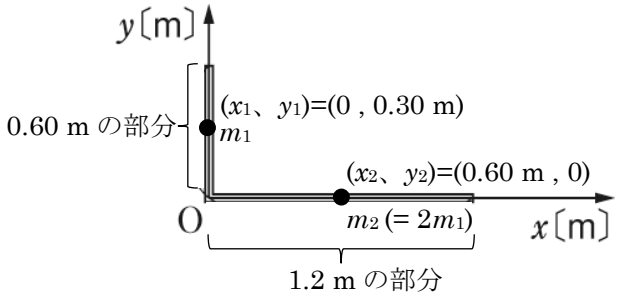
(ア) $x_2 - x_1$ (イ) $m_1 : m_2$ (ウ) $(x_2 - x_1)\dfrac{m_2}{m_1+m_2}$ (エ) $x_1 + (x_2 - x_1)\dfrac{m_2}{m_1+m_2}$

(エ)からの整理 ⇒ $\dfrac{x_1(m_1+m_2)}{m_1+m_2} + (x_2 - x_1)\dfrac{m_2}{m_1+m_2}$

⇒ $\dfrac{x_1m_1+x_1m_2}{m_1+m_2} + \dfrac{x_2m_2}{m_1+m_2} - \dfrac{x_1m_2}{m_1+m_2}$ ⇒ (オ) $\dfrac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}$

この公式を使うときは、**どこかに原点 O を設定**し、質量 m_1、m_2、m_3 ……の物体の重力の座標 x_1、x_2、x_3 ……を整理して代入していくのだ。

《問題 4 を公式を用いて解いてみる》



重力の座標公式

$x_G = \dfrac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}$　　に代入する。(重心の y 座標 y_G を出すときは、x_1、x_2 を y_1、y_2 とする。)

x 座標について

m_1、m_2 (= $2m_1$)、$x_1 = 0$、$x_2 = 0.60$ を代入

$$x_G = \frac{m_1 \times 0 + m_2 \times 0.60}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 \times 0 + 2m_1 \times 0.60}{m_1 + 2m_1} = \frac{1.2m_1}{3m_1} = 0.40$$

y 座標について

m_1、m_2 (= $2m_1$)、$y_1 = 0.30$、$y_2 = 0$ を代入

$$y_G = \frac{m_1 \times 0.30 + m_2 \times 0}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 \times 0.30 + 2m_1 \times 0}{m_1 + 2m_1} = \frac{0.30m_1}{3m_1} = 0.10$$

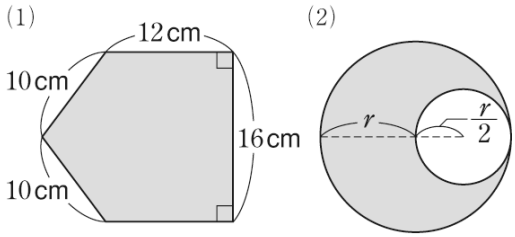
公式を使っても、きちんと解答が導ける。しかし、内分点を探したほうが直感的である。
どちらの方法でも解けるようにしておこう。

問題 5 物体の重心

次の各物体の重心の位置を求めよ。

(1) 図のような，厚さの一様な五角形の板。

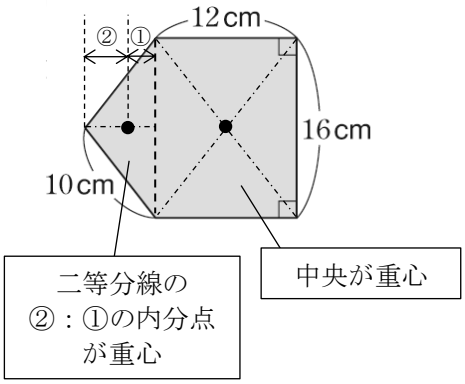
(2) 図のような，厚さの一様な半径 r の円板から半径 $\dfrac{r}{2}$ の内接円を切り取った板。



問題 5　解答　(1) 左端から 10 cm（10.4 cm）　　(2) 円の中心から $\frac{r}{6}$ 左

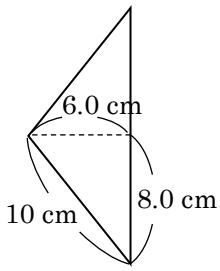
問題 5　解説

(1) 対照的な形じゃない物体のときは、重心の位置が分かる形まで、物体を分解して考える。この問題の場合は、三角形と長方形に分ける。



物体を分けたら、面積比から、質量の比を出す。

三角形



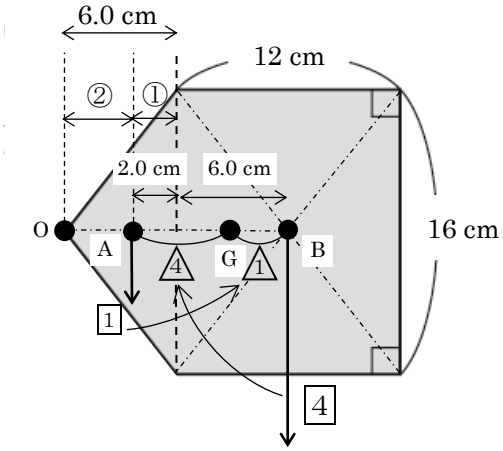
長方形の右の辺が 16 cm であることから、左図の 8.0 cm の部分の長さが分かる。

三平方の定理より、左図の 6.0 cm の部分の長さが分かる。

（3 : 4 : 5 の三角形の比で考えても OK）

面積は $\frac{1}{2}\times16\times6.0 = 48\ \text{cm}^2$

長方形　面積は、$12\times16 = 192\ \text{cm}^2$



よって質量比は

48 : 192 ⇒ $\boxed{1}$: $\boxed{4}$

この質量比から、平行力の合成を行い、重心の位置を考える。

左図のように点 O、A、G、B を設定して、図形的にわかる長さを書き込む。そして、AB 間の距離を△4:△1で内分する点が重心 G となる。

(AG) $= 8.0 \times \frac{4}{5} = 6.4$ cm

問題中で、点 A が示されているわけではないので、この問題の解答は左端（点 O）からの距離などを答える形になる。(OA) が 4.0 cm なので、4.0 cm＋6.4 cm = 10.4 cm

左端から 10 cm（=10.4 cm）が解答となる。

別解　重心の公式を用いる。

三角形の質量を m_1 とすると、四角形の質量 m_2 は $m_2 = 4m_1$ であり、それぞれ左端を原点 O としたときの座標が x_1 = 4.0 cm (OA)、x_2 = 12 cm (OB)である。公式に代入して、

$$x_G = \frac{m_1 \times 4.0 + m_2 \times 12}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 \times 4.0 + 4m_1 \times 12}{m_1 + 4m_1} = \frac{52m_1}{5m_1} = 10.4\ \text{cm}$$

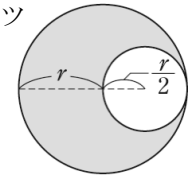
(2) 物体をくり抜いた問題の考え方は２通りある。

方法１　くり抜かれた後のパーツに、くり抜いたパーツをはめ込み、それぞれの重力を合成すると、元の物体の重心の位置がわかる。 方法２　元の物体の重力に、くり抜くパーツの重力を引き算（逆向きに合成する）すると、くり抜かれた後のパーツの重心の位置がわかる。

方法１

まずは、くり抜かれた後のパーツとくり抜いたパーツの面積比を出す。

・くり抜かれたパーツ



・・・(面積) = $r^2\pi - (\frac{r}{2})^2\pi = \frac{3}{4}r^2\pi$

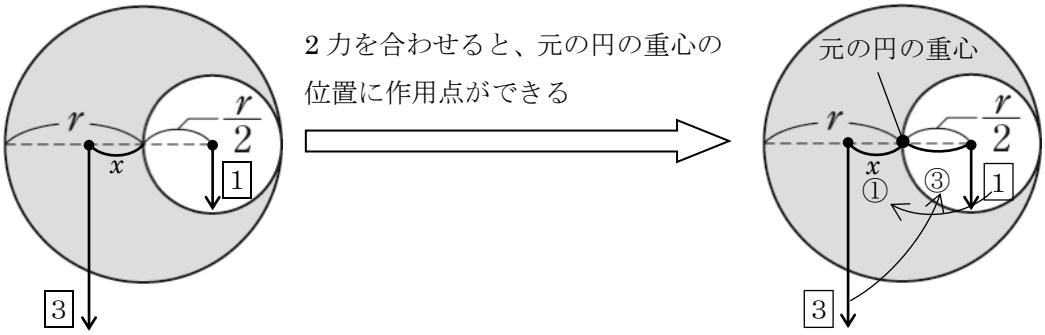
・くり抜いたパーツ

・・・(面積) = $(\frac{r}{2})^2\pi = \frac{1}{4}r^2\pi$

よって面積比は、くり抜かれた後のパーツ : くり抜くパーツ ＝3 : 1

これが質量の比となる。

次に、くり抜かれたパーツの重心を中心から x 離れた点とし、両方のパーツの重力を書き込む。重力を合成すれば、くり抜くパーツをはめ込んだという事になる。



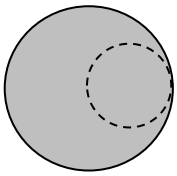
図より、③あたり $\frac{r}{2}$ なので、①は $\frac{r}{6}$ となり、$x = \frac{r}{6}$ となる。

よって、くり抜かれたパーツの重心の位置は、『円の中心から $\frac{r}{6}$ 左』　となる。

方法２

まずは、元の円と、くり抜くパーツの面積比を出す。

・元の円



・・・(面積) = $r^2\pi$

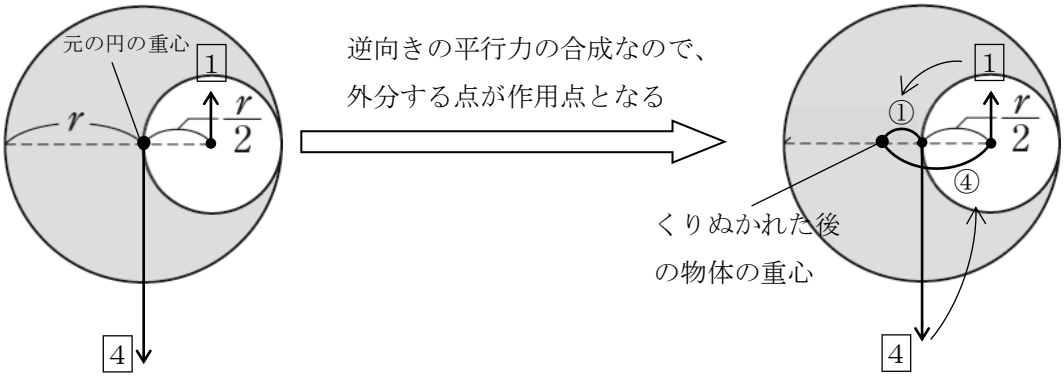
・くり抜くパーツ

・・・(面積) = $(\frac{r}{2})^2\pi = \frac{1}{4}r^2\pi$

よって面積比は、元の円 : くり抜くパーツ ＝4 : 1

これが質量の比となる。

次に、元の円からくり抜くパーツの重力を引き算（逆向きに合成）する。



図より、③あたり $\frac{r}{2}$ なので、①は $\frac{r}{6}$ となるので、くり抜かれたパーツの重心の位置は、

『円の中心から $\frac{r}{6}$ 左』　となる。

方法１と方法２、どちらも使えるようになっておきましょう。