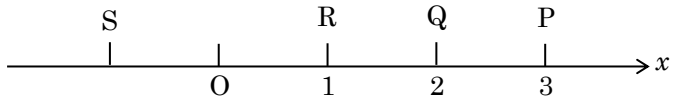
§ 力学Ⅰ−6 章　平面での放物運動

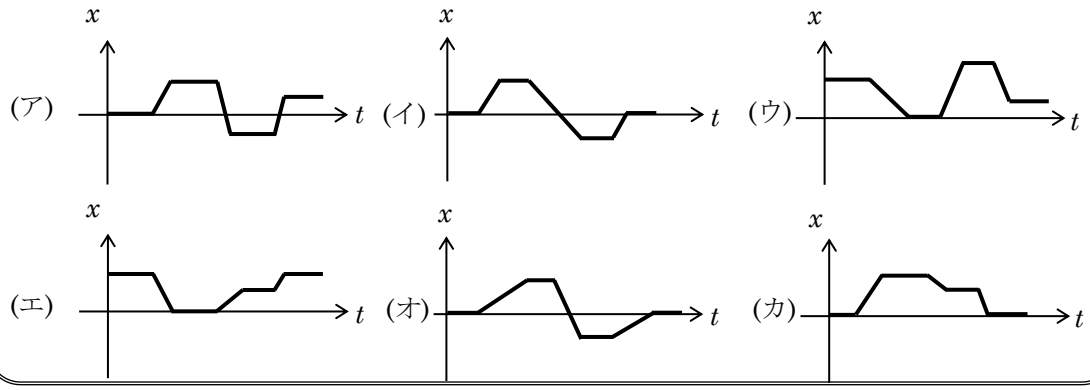
テーマ 1　グラフ（復習）

ConcepTest1　復習≪x-t グラフ≫

右向きを正とした x 軸上に、下図のように P 点、Q 点、R 点、S 点、原点 O がある。原点 O で立ち止まっていた人がしばらくしてから点 Q に歩いて移動し、そこでしばらく止まっていた。その後、その人は走って S まで移動し少し休憩したあと、原点 O 点まで歩いて移動した。

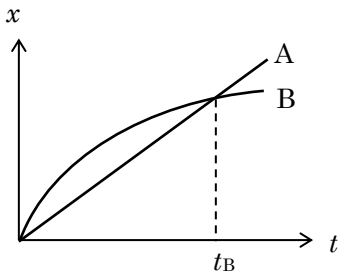
以下のグラフの中で、この人の動きを示す x−t グラフはどれか。





ConcepTest2　復習≪x-t グラフ≫

以下は平行に並ぶ線路を走る 2 種類の電車 A、B の、位置と時刻を表したグラフである。選択肢の中で正しいことを述べているものには○、誤っているものには×と答えよ。



(ア) 時刻 t_B のとき、A と B は同じ速度である。

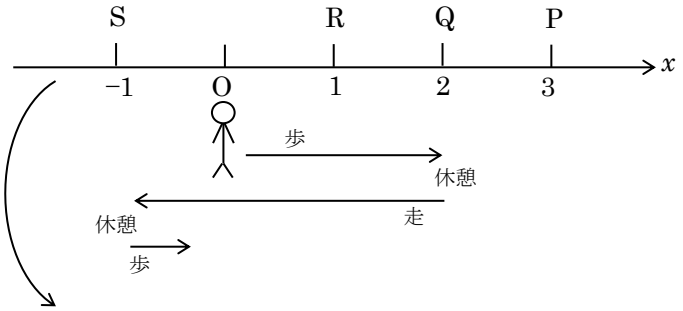
(イ) A は常に速度を上げている。

(ウ) B は常に速度を上げている。

(エ) A と B が同じ速度になる瞬間が、t_B よりも前にある。

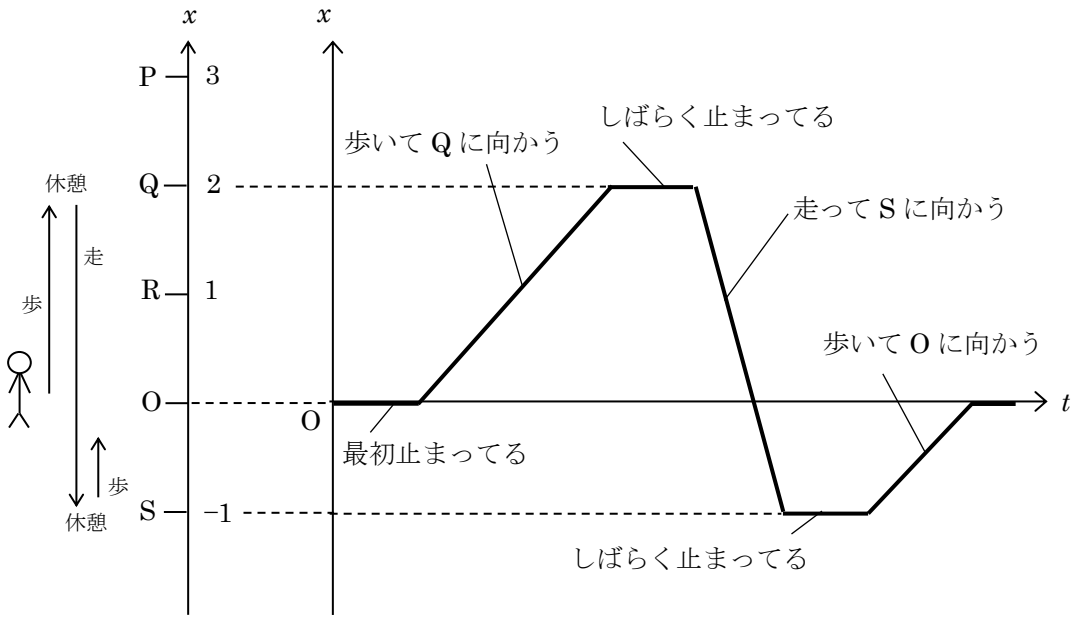
ConcepTest1 解答　オ

$x-t$ グラフは物体の位置（座標）を示したグラフである。イラストをそのまま縦軸に回転して、動きを追跡するイメージを持とう。



このように、Q まで行って U ターン、さらに S で U ターンという動きをしている。これを $x-t$ グラフに書き起こす際は、座標軸をそのまま縦に回転させてイメージしよう。

90°回転
(x 軸を縦にする)



走っているときは素早く移動しているので、グラフの傾きは急になる。

ConcepTest2 解答　ア：×　　イ：×　　ウ：×　　エ：○

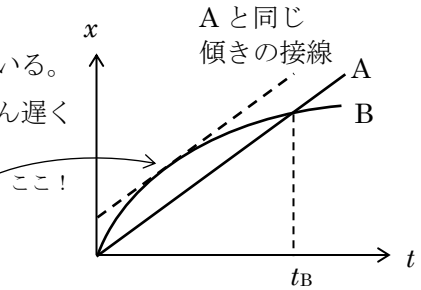
x–t グラフの傾きが速度を示すことを基本に考えていく。

ア：時刻 t_B では A の方が速い。

イ：A は傾きが変わっていないので、同じ速度で運動している。

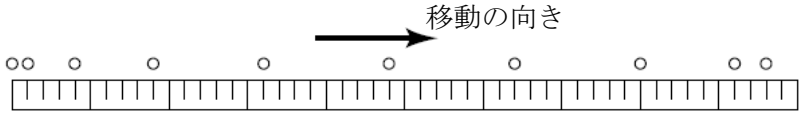
ウ：B はだんだん傾きが緩やかになっているので、だんだん遅くなっている。

エ：t_B より前の部分に A と同じ傾きになるときがある。

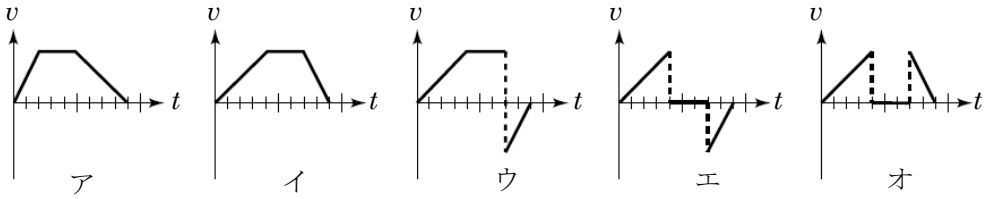


ConcepTest3　復習≪ストロボ図≫

以下の図は一定の時間間隔で物体の運動を撮影したときの、物体の位置を示したものである。ただし、動き始めと、動き終わりで物体は静止していたとする。



この物体の運動を示す $v-t$ グラフを選びなさい。



問題 1　復習≪v － t グラフと面積≫

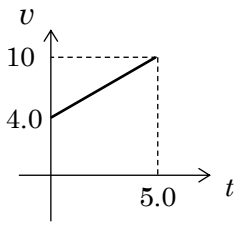
図は、$t=0$ のときに原点をスタートし、x 軸上を一定の加速度で運動する物体の $v-t$ グラフを示している。以下の問いに答えよ。

(1) 次の文字は、何の物理量を示すか。日本語で答えよ。

v_0 ：(　　)　　v ：(　　)

a ：(　　)　　t ：(　　)

x ：(　　)



(2) このグラフの運動の初速度はいくらか。

(3) このグラフの運動の加速度はいくらか。

(4) 時刻 $t=10$ のときの速度はいくらか。

(5) 時刻 $t=5.0$ での位置はいくらか。（解き方指定：グラフを用いて計算を）

(6) 時刻 $t=10$ のときの位置はいくらか。（解き方指定：公式を用いて計算を）

(7) この運動の $x-t$ グラフと $a-t$ グラフを $t=0$ から $t=10$ の範囲で書け。

(8) この運動で物体に加わる力を F としたときの $F-t$ グラフを $t=0$ から $t=10$ の範囲で書け。物体の質量は 5.0 kg であったとする。

ConcepTest3 解答　イ

ストロボ図の間隔が広いほどスピードが速く、狭いほどゆっくりである。また、加速度が大きいほど v–t グラフの傾きが急になるというのもポイント。

初め：だんだん間隔が広くなる→だんだん速くなっている。

間隔の広がり方は後半の方より緩やかなので、加速度（1 秒あたりの速度の変化）は後半より小さい。→　v–t グラフの傾きは緩やか。

中間：間隔一定→速度が一定での運動になっている。よって、グラフは横一直線。

後半：だんだん間隔が狭くなる→だんだん遅くなっている。正の速度から、だんだん 0 に向かって遅くなっているだけで、速度が負になっているわけではないことに注意する。

間隔の広がり方（狭まり方）が前半より急激なので、加速度（1 秒あたりの速度の変化）は前半より大きい。→ v–t グラフの傾きは急。

問題 1 解答 (1) v_0 ：（初速度）、v ：（速度）、a ：（加速度）、

t ：（時刻 時間）、x ：（位置　変位）

(2) 4.0 m/s (3) 1.2 m/s² (4) 16 m/s (5) 35 m (6) 100 m　(7) 次ページ解説参照

解説

(1) 各物理量の意味と文字をしっかりと覚えよう。

(2) 初速度は最初の速度、つまり時刻$t = 0$での速度。よってグラフから4.0 m/sとわかる。

(3) 加速度は1 sあたりの速度の変化。$t = 0$のとき4.0 m/s、$t = 5.0$のとき10 m/sなので、5.0 s間で6.0 m/s速くなっているといえる。1.0 sでの速度変化は割り算して、6.0 ÷ 5.0 = 1.2 m/s²といえる。

＊等加速度運動の3公式を用いてもよい。

$$v = v_0 + at$$
$$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$
$$v^2 - v_0^2 = 2ax$$

1 つ目の式、$v = v_0 + at$ を用いて $10 = 4.0 + a \times 5.0$

a について解いて、$a = 1.2$ m/s²

(4) 公式 $v = v_0 + at$ より、$t = 10$ での速度 v は、

$v = 4.0 + 1.2 \times 10$

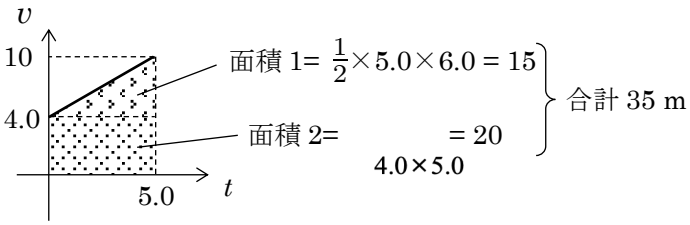
$v = 16$ m/s

＊ グラフを延長し、$t = 10$ での速度を考えてもよい。

問題 1 解答続き

(5) 重要ポイント

$v-t$ グラフの面積は距離



よって、位置は 35 m

＊(6)のように公式を用いても同じ結果を出せます。やってみましょう。

(6) 公式 $x=v_0t+\frac{1}{2}at^2$ より、

$x=4.0\times10+\frac{1}{2}\times1.2\times10^2$

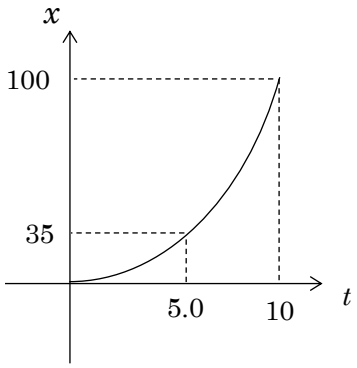
$x=100$ m　　よって位置は 100 m

(7) 速度が一定ではなく、だんだんと増えている運動である。そういうとき $x-t$ グラフは直線にはならない。

ここでのポイント『$x-t$ グラフの傾きは速度』

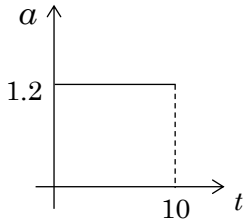
だんだん速くなっているので、だんだん傾きが急になる。つまり曲線のグラフになる。

また、$t=0$ のときは原点なので $x=0$ m。(5)、(6)の解答から、$t=5.0$ のとき 35 m、$t=10$ のとき 100 m とわかるので、そこからグラフを書くと、右図のようになる。

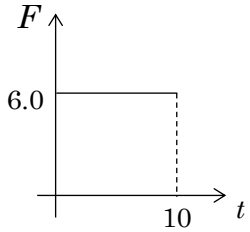


加速度 a は一定で、常に 1.2 m/s² である。よって右図のようになる。

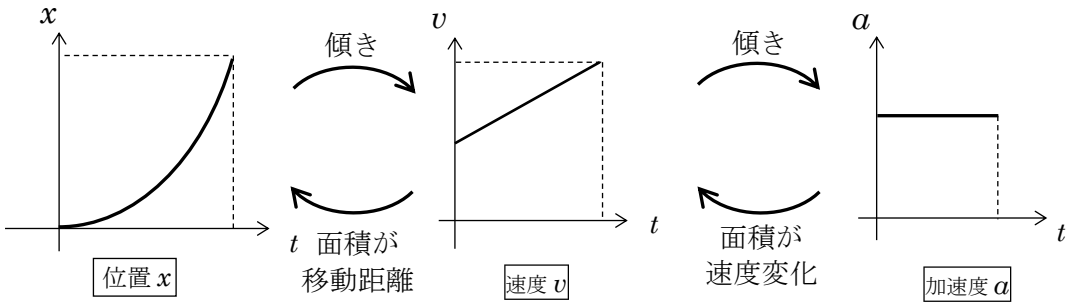
（$v-t$ グラフの傾きが加速度である。$v-t$ グラフが斜めの直線なことから、傾きは一定であり、加速度も一定といえる）



(8) 運動方程式 $ma=F$ より、物体に加わっている力 F は、加速度 a に質量 5.0 kg をかけたものであるといえる。よって F は一定で 6.0 N である。



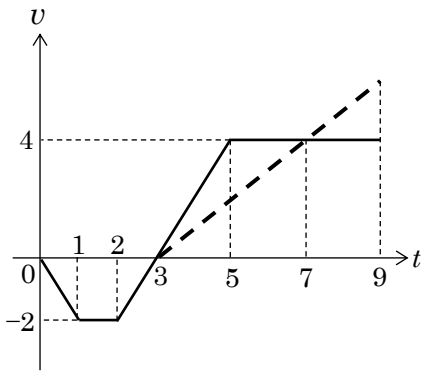
重要!! 運動を示すグラフの関係まとめ



＊F–t グラフも同じ形になる

問題 2 やや発展≪v − t グラフによる運動の表示≫

物体 A が時刻 $t = 0$ s に x 軸の原点 $x = 0$ m を出発し、続いて物体 B が時刻 $t = 3.0$ s に原点を出発した。右のグラフの太い実線は物体 A、太い点線は物体 B の速度 v〔m/s〕の時間変化を表している。両物体は x 軸上を衝突せずに運動するものとして、次の各問いに答えよ。



(1) 時刻 $t = 3.0$ s から $t = 7.0$ s までの物体 A の移動距離はいくらか。

(2) 時刻 $t = 0$ s から $t = 3.0$ s までの物体 A の移動距離はいくらか。

(3) 時刻 $t = 0$ s から $t = 4.0$ s までの物体 A の運動を大まかにストロボ図で示せ。

(4) 時刻 $t = 5.0$ s における物体 A の位置座標 x は何 m か。

(5) 物体 A の加速度 a〔m/s²〕の時間変化をグラフで表せ。(a–t グラフをかけということ)

(6) 時刻 $t = 6.0$ s における、物体 A からみた物体 B の相対速度はいくらか。

問題 2 解説　(1) 12 m　(2) 4.0 m　(3) 解説参照　(4) 0 m　(5) 解説参照　(6) −1.0 m/s

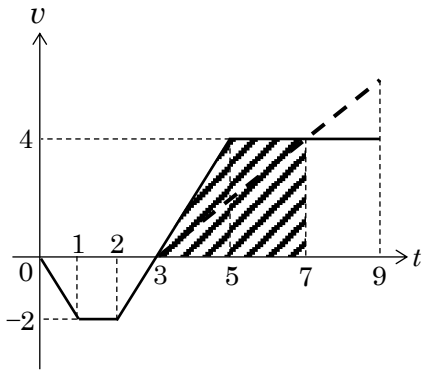
問題 2 解説

(1) 移動距離は v–t グラフの面積から求めることができる。

$t = 3.0$ s から $t = 7.0$ s までなので、右図の斜線の面積を求める。

斜線の部分の面積を出すと、12 となるので、移動距離は <u>12 m</u>

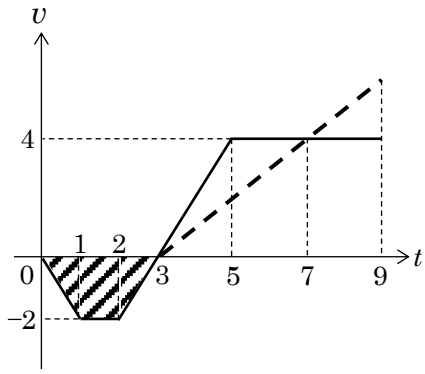
（$t = 3.0$ から $t = 5.0$ の部分の三角形が面積 4.0、$t = 5.0$ から $t = 7.0$ の部分の長方形が面積 8.0、合わせて 12）



(2) $t = 0$ s から $t = 3.0$ s までの面積は右図のようになる。横軸との間の部分であることに注意しよう。

斜線の部分の面積を出すと、4.0 となるので、移動距離は <u>4.0 m</u>

（$t = 0$ から $t = 1.0$ の部分の三角形が面積 1.0 、$t = 1.0$ から $t = 2.0$ の部分の長方形が面積 2.0、$t = 2.0$ から $t = 3.0$ の部分の三角形が面積 1.0、合わせて 4.0）



(3) 日本語で運動を説明すると、

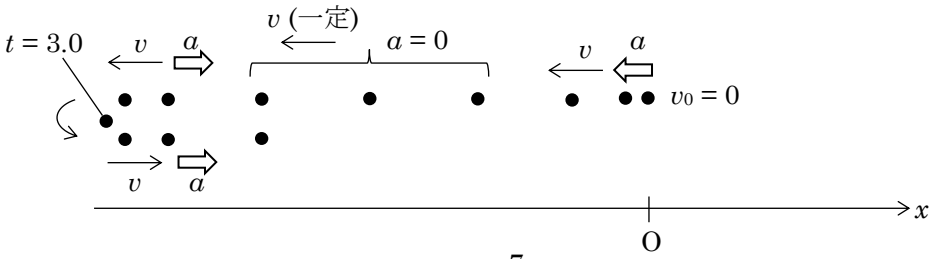
$t = 0$ から $t = 1.0$　：　速度からだんだん負の向きに速くなっていっている

$t = 1.0$ から $t = 2.0$　：　一定の速度 −2.0 m/s で運動している

$t = 2.0$ から $t = 3.0$　：　だんだんゆっくりになっていき、$t = 3.0$ で一瞬静止している（ブレーキがかかっている）

$t = 3.0$ から $t = 4.0$　：　速度がだんだん正の向きに速くなっていっている（$t = 3.0$ で U ターンをしている）

これをストロボ図にすると以下のようになる。（点の間隔を意識しましょう。）



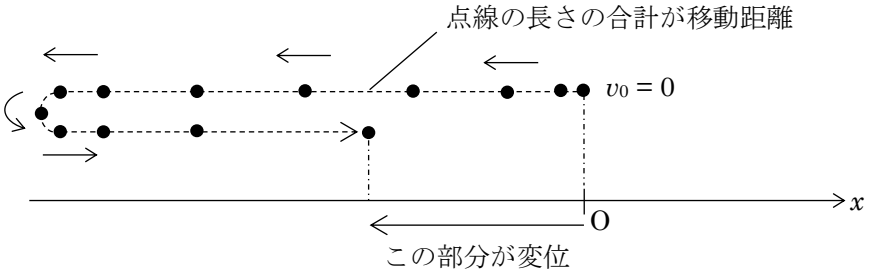
問題 2 解説続き

(4) 移動距離と、変位の違いに気をつけよう。

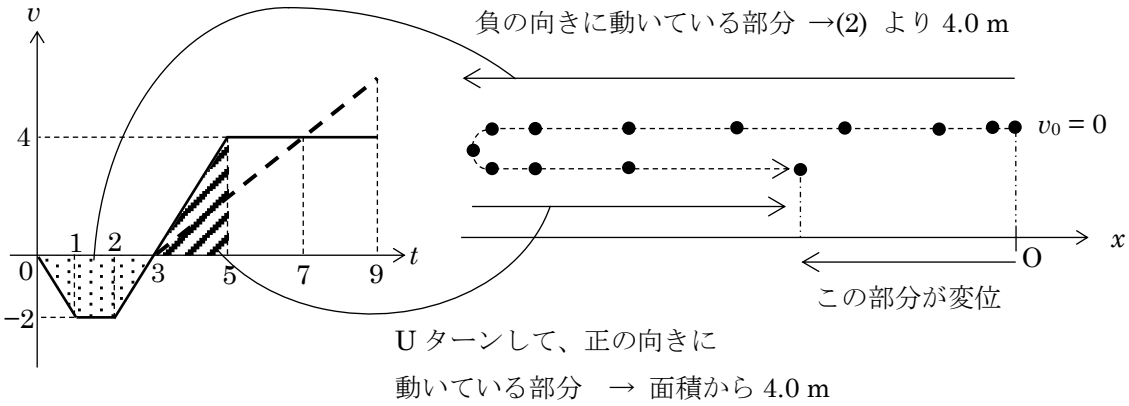
移動距離・・・実際に動いた量

変位・・・最初と最後の位置の変化（最初が原点 O だったら x 座標のことになる。）

ストロボ図で説明すると下図のようになる。



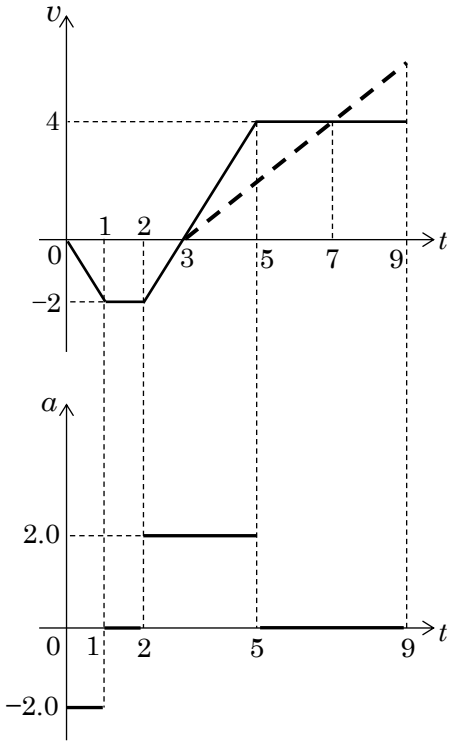
グラフの面積が、運動のどの部分に当たるかを考えて間違えないようにしよう。



上図のようにかけるので、$t = 5.0$ s では、負に 4.0 m 、正に 4.0 m 動いた状態なので、ちょうど原点 O に戻ってきている。よって $\underline{x = 0\ \mathrm{m}}$

図の位置関係は、計算する前に書いたものなので、変位があるように見えるが、ちょうど戻ってきたタイミングが出題の場面だったのだ。

(5) 加速度は v–t グラフの傾きである。正負に気をつけてグラフにすると以下のようになる。



それぞれの時間で加速度（v-t グラフの傾き）を求めると、

$t = 0$　から $t = 1.0$　: −2.0

$t = 1.0$ から $t = 2.0$　:　0

$t = 2.0$ から $t = 5.0$　: +2.0

$t = 5.0$ から $t = 9.0$　:　0

となる。

a-t グラフにこの値も書いておこう。

(6) $t = 6.0$ s で A の速度と、B の速度を読みとると、$v_A = 4.0$ m/s 、 $v_B = 3.0$ m/s である。

よって相対速度 $v_{A\to B}$ は

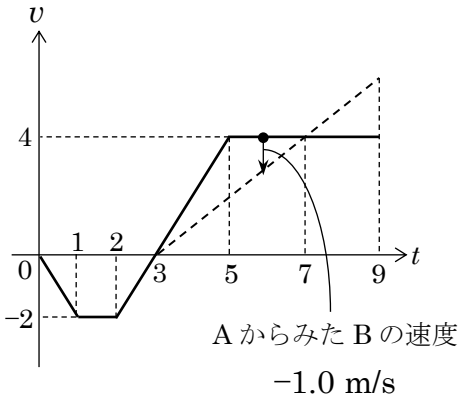
$v_{A\to B} = v_B - v_A$

$= 3.0 - 4.0$

$= \underline{\underline{-1.0 \text{ m/s}}}$

＊ グラフ内で速度の正負が設定されているので、相対速度の向きも正負で答えてよいのだ。

《参考》グラフ内で、$t = 6.0$ s での相対速度は以下のような部分に現れる



テーマ 2 水平投射

物体を水平に投げ出したときの落下運動を水平投射という。水平投射を考えるために、自由落下の復習を行おう。

問題 3 復習≪自由落下≫

高さ 44.1 m のビルの屋上から、小球を静かに落とした。重力加速度を 9.8 m/s² とする。以下の問いに答えよ。

(1) 手を離してから 1.5 s 後の物体の速度の大きさを求めよ。

(2) 手を離してから、物体が地面にぶつかるまでの時間を求めよ。

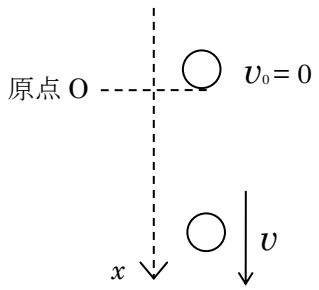
(3) 地面にぶつかる直前の物体の速度の大きさを求めよ。

≪運動図≫

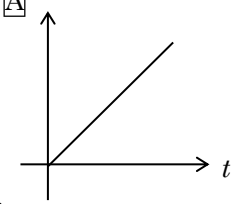
≪ストロボ図≫

ConcepTest 4 復習≪自由落下≫

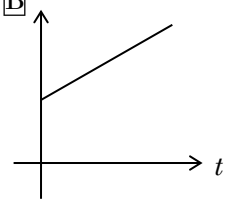
ある物体を静かに手離したときの、$v-t$ グラフ、$a-t$ グラフ、$x-t$ グラフを示すものをそれぞれ次の A～D から選べ。ただし、手を離した点を原点 O とし、鉛直下向きに軸をとるものとする。



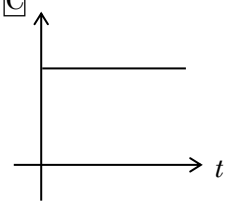
A



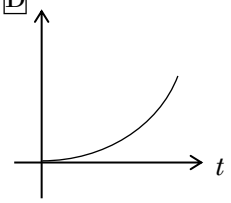
B



C



D



問題 3 解答　(1) 15 m/s (14.7 m/s)　(2) 3.0 s　(3) 29 m/s (29.4 m/s)

問題 3 解説

(1) 1.0 s に 9.8 m/s 加速するので、

1.5 s 後の速度は、

$9.8 \times 1.5 = 14.7 \fallingdotseq 15$ m/s

＊公式を用いると、

$v = v_0 + at$ より

$v = 0 + 9.8 \times 1.5$

$v = 14.7 \fallingdotseq$ <u>15 m/s</u>

(2) $x = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$ より

$44.1 = 0 \times t + \frac{1}{2} \times 9.8 \times t^2$

整理して

$44.1 = 4.9t^2$

$t^2 = 9.0$

$t = \pm 3.0$

$t > 0$ なので　$t =$ <u>3.0 s</u>

---

(3) (2)の答えより、地面にぶつかる直前は手を離してから 3.0 s 後ということになる。

これを用いて

$v = v_0 + at$ より

$v = 0 + 9.8 \times 3.0$

よって　$v = 29.4 \fallingdotseq$ <u>29 m/s</u>

ConcepTest 4　解説　解答　$v-t$: A　$a-t$: C　$x-t$: D

（$v-t$ グラフ）

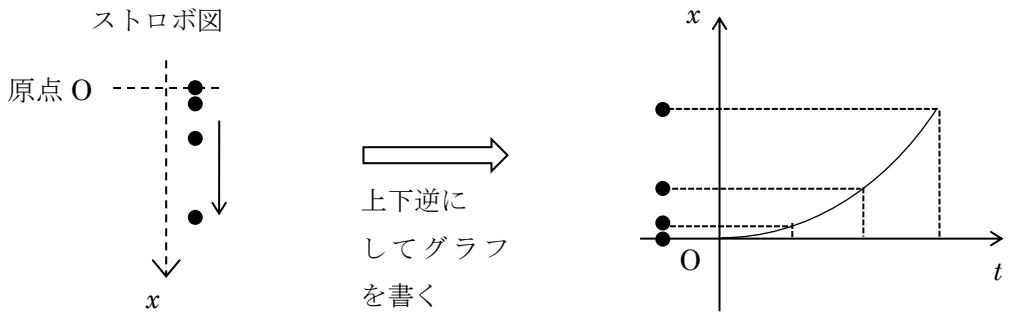
速度 v は、最初 0 から一定の間隔 9.8 m/s ずつ速くなっていくので、0 からスタートし、傾きが一定(直線)のグラフ A になる。

（$a-t$ グラフ）

加速度 a は、常に一定で 9.8 m/s²（文字で示すと g〔m/s²〕）なので、横に一直線のグラフ C となる。

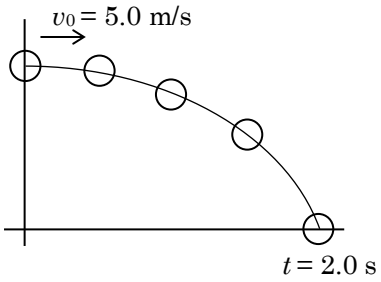
（$x-t$ グラフ）

$x-t$ グラフは、位置を示すグラフなので、正の向きを上向きにひっくり返した図を書いて、グラフにしてみよう。

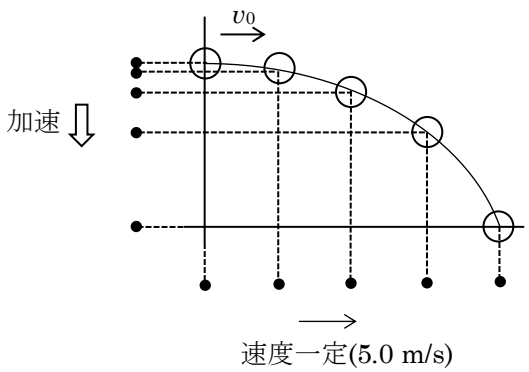


だんだん間隔が大きくなるので、曲線のグラフになる。よって D

≪水平投射モデル≫初速度 5.0 m/s で、水平に物体を投げ出すと 2.0 s 後に地面に衝突した。



水平に投げ出された物体は左のような軌道を描く。
そしてこの軌道は、水平方向と鉛直方向に分解して分析すると、ある特徴が見えてくる。



ストロボ図を書くと見やすくなり

水平方向 : 速度一定　　鉛直方向 : 加速する

ということがわかる。

こうなる理由は以下のように説明できる。

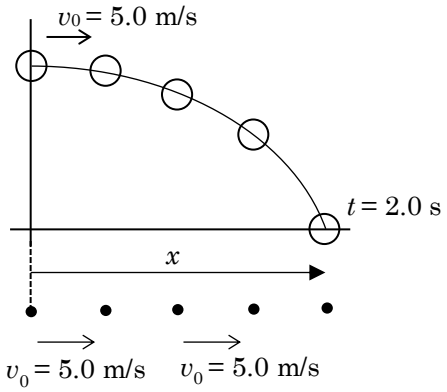
鉛直方向 : 重力がはたらき加速する。
（加速度は $a = g$ となる）
（自由落下と同じ運動）

水平方向 : はたらいている力がないので、
水平方向は速度一定。

よくある問題例

Q１ : 物体は何 m 先で地面に落下したか。

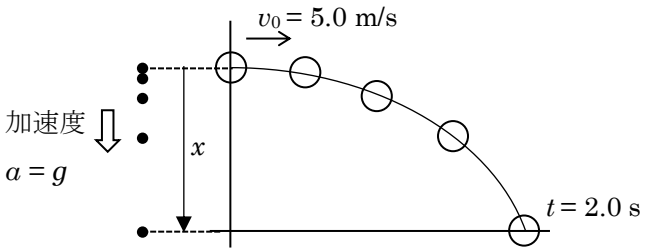
何 m 先に到達したかは、水平方向の距離なので、水平方向の情報で考える。



水平方向には、初速度で 5.0 m/s を常に保って進む。
2.0 s で地面につくということは、
$x = 5.0\ \mathrm{m/s} \times 2.0\ \mathrm{s}$
$x = 10\ \mathrm{m}$
と計算できる。

Q２：物体を投げ出したのは高さ何 m の地点か。

高さは鉛直方向の距離なので、鉛直方向の情報で考える。



鉛直方向は自由落下と同じ運動なので、$a = g$ である。
また、加速している運動なので、等加速度運動の三公式を使う。
縦方向は初速度がないことに注意して立式すると

$$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

より

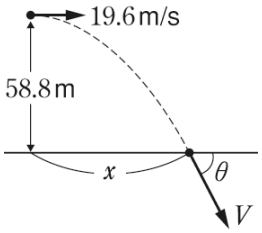
$$x = 0 \times 2.0 + \frac{1}{2} \times 9.8 \times 2.0^2$$

x = 19.6 m
≒ 20 m　と計算できる。

Point 水平投射の考え方
水平方向は等速運動
鉛直方向は自由落下
情報が与えられている方向で考えると良い。

問題 4 ≪水平投射≫

地上 58.8 m の高さから小球を水平方向に初速度 19.6 m/s で投げた。重力加速度の大きさを 9.8 m/s² とする。



(1) 小球が地面に当たるまでの時間 t〔s〕を求めよ。
(2) 投げた点から地面に当たる点までの水平距離 x〔m〕を求めよ。
(3) 小球が地面に当たるときの速度の大きさ V〔m/s〕と，地面となす角 θ を求めよ。

問題 4 解答　(1) 3.5 s (3.46 s)　(2) 68 m　(3) 39 m/s (39.2 m/s)

問題 4 解説

(1)　あたえられている情報が鉛直方向なので、鉛直方向の運動に注目して考えるとよい。

鉛直方向は自由落下と同じ運動をしているので、58.8 m 自由落下するまでの時間を考える。

$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$

より

$58.8 = 0 \times t + \frac{1}{2} \times 9.8 \times t^2$

t について解いて

$58.8 = 4.9\,t^2$

$t^2 = 12$

$t = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} = 3.46 \fallingdotseq 3.5$ s

(2) 水平距離を聞かれているので、水平方向の運動で考えるとよい。水平方向は等速運動をしている。前問(1)で落下までの時間は $2\sqrt{3}$ s とわかっているので、これを用いる。

＊ 前の問題の情報を使うときは、√や分数の状態まで戻して用いるのが基本だ！

水平方向の速度が 19.6 m/s なので、

(水平距離)=19.6 m/s × $2\sqrt{3}$ s

(水平距離)=$39.2\sqrt{3} \fallingdotseq 67.816 = 68$ m

(3) 落下までの時間 $2\sqrt{3}$ s を道いてそれぞれの方向の速度を求めて考える。

水平方向：常に一定なので 19.6 m/s

鉛直方向：加速度運動しているので、三公式を用いる。

$v = v_0 + at$ より

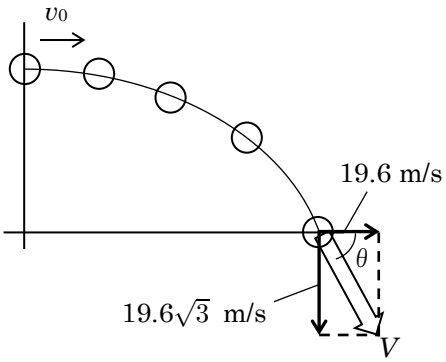
$v = 0 + 9.8 \times 2\sqrt{3}$

$v = 19.6\sqrt{3}$

水平方向が 19.6 m/s、鉛直方向が $19.6\sqrt{3}$ m/s とわかったのでこれを作図して、角度を考える。

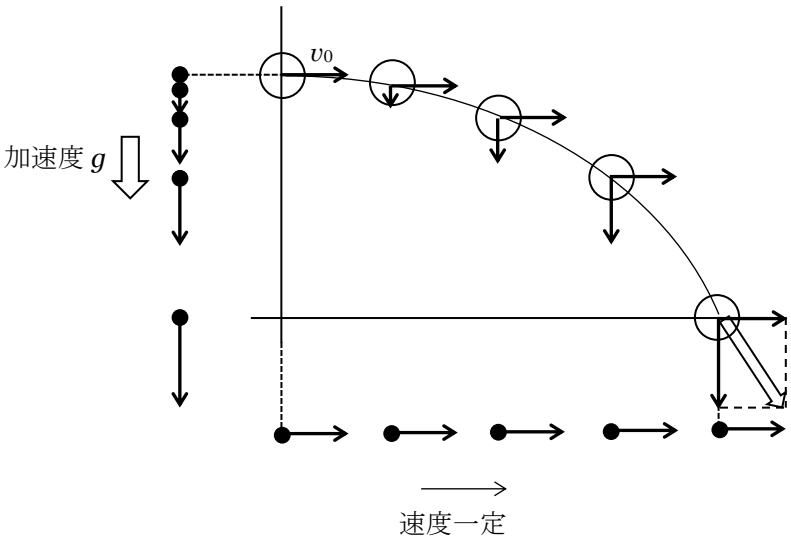
辺の比が $1 : 2 : \sqrt{3}$の有名三角形になっているので、

$V = 19.6 \times 2 = 39.2 \fallingdotseq 39$ m/s　$\theta = 60^\circ$ となる。



コラム　「実際の速度」の作図

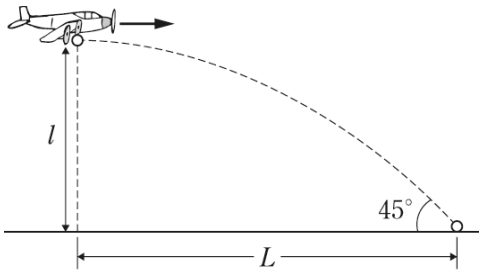
問題 4 の(3)のように、落下時の斜めの速度を聞かれることもある。このように、分解をする前の速度の変化（実際の速度）を作図してイメージしておこう。



だんだん下方向への速度ベクトルが長くなるので、合成された実際の速度のベクトルの角度も急になるのだ。

問題 5 ちょっと応用 ≪水平投射≫

地上から高さ l の所を一定の速さで水平に飛ぶ飛行機から，物資を静かに投下したら，物資は地面に対して斜め 45° の角度で着地した。重力加速度の大きさを g とする。



(1) 物資が地上に着くまでの時間 t を求めよ。

(2) 飛行機の速さ v_0 を求めよ。

(3) 物資の投下点と着地点の間の水平距離 L を求めよ。

問題 5 解答　(1) $\sqrt{\dfrac{2l}{g}}$　(2) $\sqrt{2gl}$　(3) $2l$

問題 5 解説

(1) 縦の情報も、横の情報もわかっているので、どちらの方向で考えるか迷う。しかし、もし横方向で考えようとしたら、初速度 v_0 がわかっていないと解けないので、今回は縦方向で考えるのがよい。

$$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

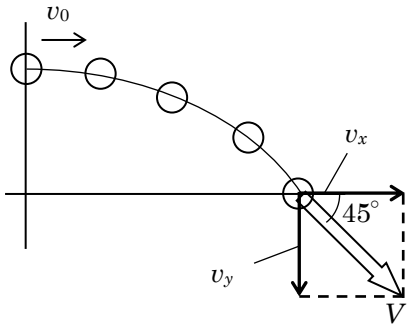
より

$$l = 0 \times t + \frac{1}{2}gt^2$$

t について解いて

$$t = \sqrt{\frac{2l}{g}}$$

(2) 着地の時の速度の水平成分を v_x、鉛直成分を v_y としたとき、実際の速度が 45 度の向きになっているということは、$v_x = v_y$ となることがわかる。(右図参照)



また、初速度 $v_0 = v_x$ なので、$v_0 = v_x = v_y$ となり、v_y を求めればよい。

v_y は、前問で落下までの時間を求めているので、それを用いて計算する。

$v = v_0 + at$ より

$$v_y = 0 + g \times \sqrt{\frac{2l}{g}}$$

$$v_y = \sqrt{2gl}$$

$v_0 = v_x = v_y$ なので、$v_0 = \sqrt{2gl}$

(3) 水平到達距離は、水平方向の情報で考えて、

$$L = v_0 \times t$$

$$L = \sqrt{2gl} \times \sqrt{\frac{2l}{g}}$$

$$L = 2l$$

テーマ 3 斜方投射

物体を斜めに投げ出したときの落下運動を斜方投射という。水平投射と考え方は基本的に同じである。ただし、復習しておいた方がよい問題があるのでやっておこう。

問題 6 復習≪鉛直投げ上げ≫

高さ 19.6 m のビルの屋上から、鉛直上向き 14.7 m/s の速度で物体を投げ出した。重力加速度を 9.8 m/s² とする。

(1) ボールを投げ出してから、物体が最も高い位置に到達するまでの時間は何秒か。

(2) ボールを投げ出してから、再び投げだした点まで戻ってくるまでの時間は何秒か。

(3) 再び投げ出した点に戻ってきたときのボールの速度はいくらか。

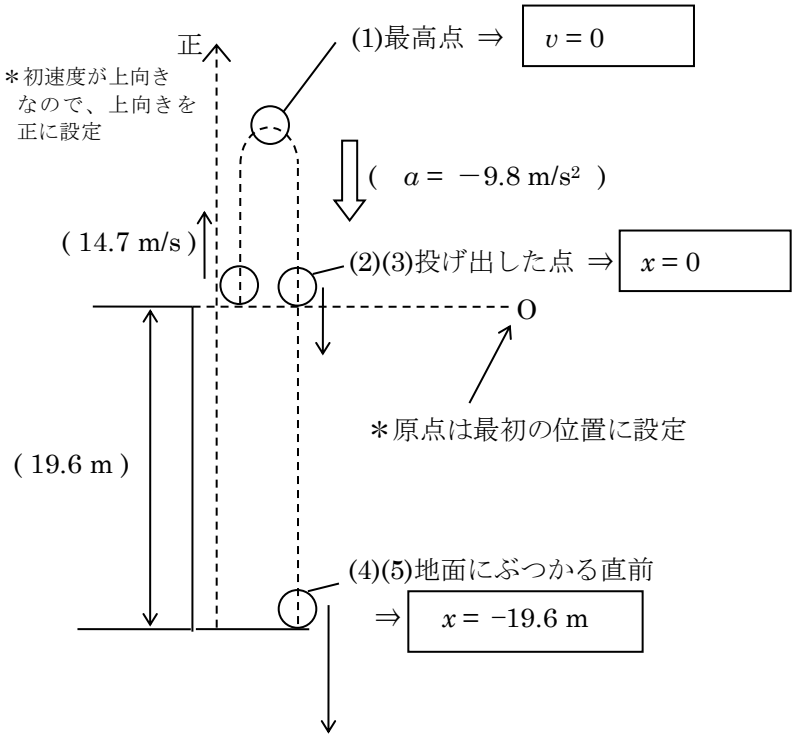
(4) ボールを投げ出してから、地面に到達するまでの時間は何秒か。

(5) 地面にぶつかる直前の物体の速度はいくらか。

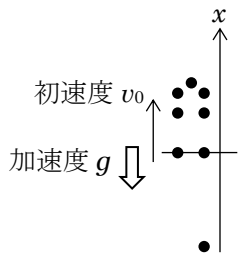
問題 6 解答 (1) 1.5 s (2) 3.0 s (3) 鉛直下向きに 15 m/s (14.7 m/s)
(4) 4.0 s (5) 鉛直下向きに 25 m/s (24.5 m/s)

問題 6 解説

≪運動図≫ 各問題のポイントとなる値をチェックしよう。



≪ストロボ図≫



Point

正の向きの設定と、符号のつけ忘れに注意!!

問題 6 解説の続き

(1) 最高点の速度 v は 0 なので、

$v = v_0 + at$ より

$0 = 14.7 + (-9.8) \times t$

t について解いて

$t = \underline{1.5\ \mathrm{s}}$

(2) 投げ出した点での変位 x は 0 なので

$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ より

$0 = 14.7t + \frac{1}{2}(-9.8)t^2$

整理して

$0 = 14.7t - 4.9t^2$

$0 = 3t - t^2$

t について解いて

$0 = t(3-t)$

$t = 0$ ， 3.0

$t > 0$ なので、$t = \underline{3.0\ \mathrm{s}}$

(3) $t = 3.0$ s ということが分かったので、

$v = v_0 + at$ より

$v = 14.7 + (-9.8) \times 3.0$

$v = -14.7 \fallingdotseq -15$ m/s

よって、<u>鉛直下向きに 15 m/s</u>

(4) 地面にぶつかる直前の変位 x は -19.6 なので

$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ より

$-19.6 = 14.7 \times t + \frac{1}{2} \times (-9.8) \times t^2$

整理して

$-19.6 = 14.7t - 4.9t^2$

$-4 = 3t - t^2$ 　両辺を 4.9 で割る

$0 = -t^2 + 3t + 4.0$

$0 = t^2 - 3t - 4.0$

$0 = (t-4)(t+1)$

$t = 4.0$ ， -1.0

$t > 0$ なので　$t = \underline{4.0\ \mathrm{s}}$

(5) $t = 4.0$ とわかったので、

$v = v_0 + at$ より

$v = 14.7 + (-9.8) \times 4.0$

$v = -24.5 \fallingdotseq -25$ m/s

よって、<u>鉛直下向きに 25 m/s</u>

Point

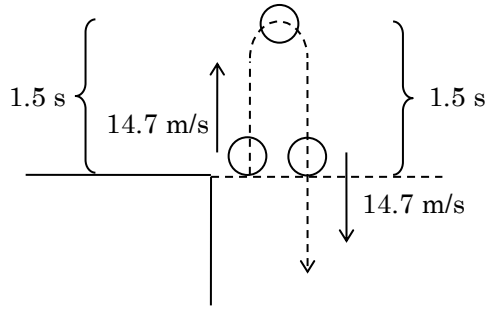
鉛直投げ上げは、

v_0 が鉛直上向き、$a = -9.8$ （$a = -g$）

の等加速度運動（上向き正）

コラム　運動の対称性

問題 6 で、投げ出してから、再び投げ出した点に戻ってくるまでの運動に着目すると、



左図のように、

1.5 s で最高点まで上がり、同じく

1.5 s で手元に戻ってきている。

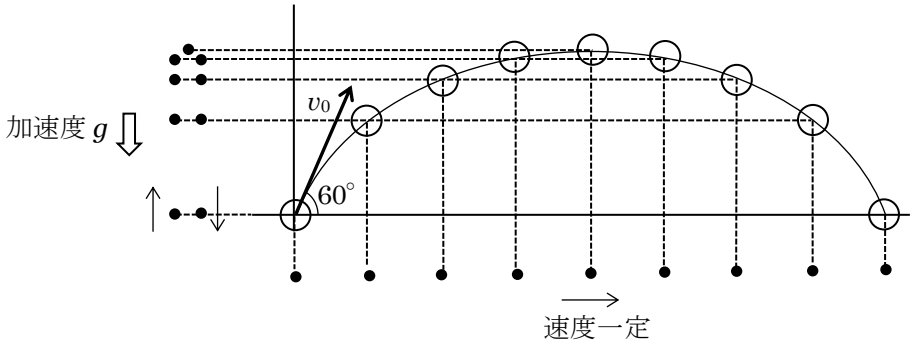
14.7 m/s で投げ上げたものが、同じく

14.7 m/s で戻ってきている。

ということが分かる。

このような運動を『対称性のある運動』と呼んだりする。物理では物がどのように動いているかをイメージできるかが大切。『対称性』という視点も持ってイメージをしましょう。

≪斜方投射モデル≫ 地上から傾角 60°の向きに初速度 v_0 で物体を投げ出した。



水平投射の時と同じく、鉛直方向と水平方向に分けて考える。

鉛直方向：重力がはたらき等加速度運動となる。

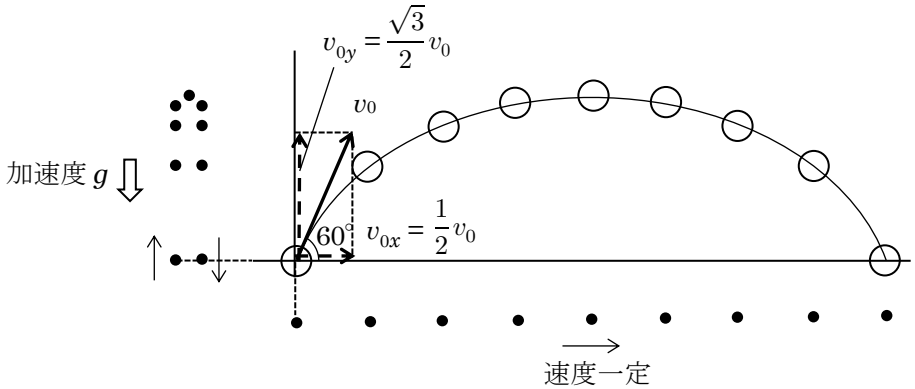
（加速度は $a = g$ となる。＊上向き正としたら $a = -g$）（鉛直投げ上げと同じ運動）

水平方向：はたらいている力がないので、水平方向は速度一定。

よくある問題例

Q１：初速度の水平成分 v_{0x} と鉛直成分 v_{0y} はいくらか

水平投射では、初速度がそのまま水平方向の一定速度になっていたが、斜方投射では、初速度を水平方向と鉛直方向に分解して考える必要がある。



図中のように $v_{0x} = \frac{1}{2}\ v_0$ 、$v_{0y} = \frac{\sqrt{3}}{2}\ v_0$ となり、

水平方向には $v_{0x} = \frac{1}{2}\ v_0$ の速度で一定の速度で運動し、

鉛直方向には $v_{0y} = \frac{\sqrt{3}}{2}\ v_0$ の初速度で鉛直投げ上げをしたときと同じ運動を行うのだ。

Q２：最高点の高さは何 m か

鉛直方向の高さを聞かれているので、鉛直方向の運動で考えるとよい。

初速度が $v_{0y} = \frac{\sqrt{3}}{2}\ v_0$ の鉛直投げ上げの運動と同じであり、最高点での速度が $v = 0$ である

ことから立式する。上向きを正として、

$v^2 - v_0^2 = 2ax$

より、

$$0^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}v_0\right)^2 = 2(-g)x$$

x について解いて

$$-\frac{3}{4}v_0^2 = -2gx$$

$$x = \frac{3v_0^2}{8g}$$

Q３：物体が地面に落下するまでの時間は何秒か。

時間を水平方向で考えるには、水平方向の距離がわからないといけないので、これも鉛直方向で考えるとよい。地面につくときは、変位 x が 0 になっていることから立式する。

$$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

より

$$0 = \frac{\sqrt{3}}{2}v_0 \times t + \frac{1}{2}(-g)t^2$$

t について解く

$$0 = \frac{\sqrt{3}}{2}v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$0 = t\left(\frac{\sqrt{3}}{2}v_0 - \frac{1}{2}gt\right)$$

これを満たす t は、$t = 0$ または、

$$\frac{\sqrt{3}}{2}v_0 - \frac{1}{2}gt = 0$$

となる t である。これを t について解いて

$$\frac{1}{2}gt = \frac{\sqrt{3}}{2}v_0$$

$$t = \frac{\sqrt{3}v_0}{g}$$

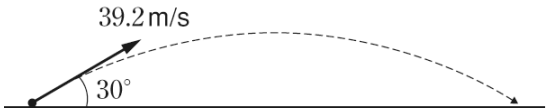
$t = 0$ は投げ出した瞬間を示す解なので、この問いの解答は

$$t = \frac{\sqrt{3}v_0}{g}$$

Point 斜方投射の考え方
水平方向は等速運動
鉛直方向は鉛直投げ上げ

問題 7 ≪斜方投射≫

地上から水平より 30°上向きに，初速度 39.2 m/s で小球を投げ上げた。重力加速度の大きさを 9.8 m/s² とする。



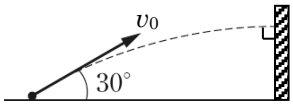
(1) 最高点での小球の速さ v_1〔m/s〕と，最高点に達するまでの時間 t_1〔s〕を求めよ。

(2) 最高点の高さ h〔m〕と，投げた点から最高点までの水平距離 x_1〔m〕を求めよ。

(3) 再び地上にもどるまでの時間 t_2〔s〕と，水平到達距離 x_2〔m〕を求めよ。

問題 8 ちょっと応用≪斜方投射≫

地上から水平より 30°上向きに，初速度 v_0 で小球を投げ上げると、投げた方角にあった直立する壁に、90° の角度で衝突した。重力加速度の大きさを g とする。

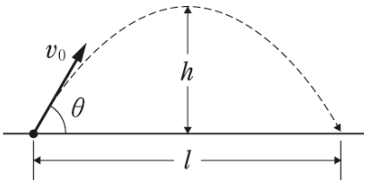


(1) 投げてから壁に衝突するまでの時間はいくらか。

(2) 投げ上げた点から壁までの距離はいくらか。

問題 9 応用≪斜方投射≫

水平面上で水平面に対して θ の角度で小球を投げ上げた。小球の初速度の大きさを v_0〔m/s〕，重力加速度の大きさを g〔m/s²〕とする。



(1) 初速度の水平成分 v_{0x}，鉛直成分 v_{0y} の大きさはそれぞれ何 m/s か。

(2) 小球が最高点に達するまでの時間 t_1 は何秒か。また，最高点の高さ h は何 m か。

(3) 小球が水平面に落下する点までの水平到達距離 l は何 m か。

(4) 角度 θ を何度にとると，(3)の水平到達距離が最大となるか。
必要があれば $2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$ を用いよ。

問題 7 解答　(1) v_1 = 34 m/s、t_1 = 2.0 s　(2) h = 20 m、x_1 = 68 m

(3) t_2 = 4.0 s、x_2 = 140 m

問題 7 解説

(1) v_1：最高点では鉛直方向の速度が 0 になっていて、水平方向の速度だけが残っている。よって、水平方向の速度が解答となる。水平方向の速度は、初速度の水平方向成分 v_{0x} なので、

$$v_1 = v_{0x} = 39.2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 33.908 \fallingdotseq 34 \text{ m/s}$$

t_1：最高点で鉛直方向の速度が 0 になっていることから計算する（鉛直方向に着目）。

鉛直方向の初速度 v_{0y} が v_{0y} = 19.6 m/s であることに注意して、

$v = v_0 + at$ より

$0 = 19.6 + (-9.8) \times t_1$

t_1 について解いて

t_1 = 2.0 s

(2) h：鉛直方向の距離なので、鉛直方向の運動に注目する。 前問(1)で求めた t_1 = 2.0 s を用いて

$$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

より

$$h = 19.6 \times 2.0 + \frac{1}{2} \times (-9.8) \times 2.0^2$$

h について解いて

h = 19.6 ≒ 20 m

別解 最高点での速度が 0 になることを利用して h を求めることもできる。

$v^2 - v_0^2 = 2ax$ より

$0^2 - 19.6^2 = 2 \times (-9.8) \times h$

h について解いて

$19.6^2 = 2 \times 9.8 \times h$

$19.6^2 = 19.6 \times h$

h = 19.6 ≒ 20 m

x_1：水平方向の距離なので、水平方向の運動で考える。水平方向の速度が $19.6\sqrt{3}$ m/s であることに注意して、

$x_1 = 19.6\sqrt{3} \times 2.0 = 39.2\sqrt{3} = 67.816$ ≒ 68 m

問題 7 解説　続き

(3) t_2：再び地面に到着したときは鉛直方向の変位が $x = 0$ となっていることに着目する。

$$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

より

$$0 = 19.6 \times t_2 + \frac{1}{2} \times (-9.8) \times t_2^2$$

t_2 について解く、両辺を 4.9 で割ると数字が綺麗になる。

$$0 = 4t_2 - t_2^2$$

$$0 = t_2(4-t_2)$$

$t_2 = 0$ または 4.0 s　　$t = 0$ は投げ出した瞬間の解なので、$t_2 = 4.0$ s

別解 運動の対称性より、投げ出してから最高点まで上がる時間と、最高点から地面まで降りてくるまでの時間は同じとなる。よって、t_2 は最高点までの時間の 2 倍といえるので、$t_1 \times 2 = 4.0$ s となる。

x_2：水平距離なので水平方向の運動から考える。到達までにかかったのは 4.0 s であり、水平方向の速度が $19.6\sqrt{3}$ m/s であることに注意して、

$x_2 = 19.6\sqrt{3} \times 4.0 = 78.4\sqrt{3} = 135.632 \fallingdotseq 140$ m

---

問題 8 解答　(1) $\dfrac{v_0}{2g}$　(2) $\dfrac{\sqrt{3}v_0^2}{4g}$

問題 8 解説

(1) 壁に 90° で衝突するということは、速度の成分が、水平方向にのみ速度があるということで、つまり斜方投射の最高点で壁にぶつかったといえる。鉛直方向に注目して求める。

最高点での鉛直方向の速度が 0、鉛直方向の初速度が $\frac{1}{2}v_0$ であることに注意して立式すると、

$v = v_0 + at$ より

$$0 = \frac{1}{2}v_0 + (-g)t$$

t について解いて

$$t = \frac{v_0}{2g}$$

(2) 水平距離を聞かれているので、水平方向の運動に注目する。水平方向の速度が $\frac{\sqrt{3}}{2}v_0$ であり、時間が前問(1)より $t = \dfrac{v_0}{2g}$ であることに注意して立式すると、

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2}v_0 \times \frac{v_0}{2g} = \frac{\sqrt{3}v_0^2}{4g}$$

問題 9 解答　(1) $v_{0x} = v_0 \cos\theta$ 、 $v_{0y} = v_0 \sin\theta$　(2) $t_1 = \dfrac{v_0 \sin\theta}{g}$ 、$h = \dfrac{(v_0 \sin\theta)^2}{2g}$

(3) $l = \dfrac{2v_0^2 \sin\theta\cos\theta}{g}$　(4) $\theta = 45^\circ$

問題 9 解説

(1) 角度 θ を利用して分解して、

$v_{0x} = v_0 \cos\theta$　　$v_{0y} = v_0 \sin\theta$

(2) t_1 : 鉛直方向の運動に注目して、立式する。最高点での時刻を t_1 とし、最高点での鉛直方向の速度が 0 になることに注意して立式すると、

$v = v_0 + at$ より

$0 = v_0 \sin\theta + (-g)t_1$

t_1 について解いて

$$t_1 = \frac{v_0 \sin\theta}{g}$$

h : 鉛直方向の運動に注目して立式する。同問題で求めた t_1 を利用して立式をすると、

$$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

より

$$h = v_0 \sin\theta \times \frac{v_0 \sin\theta}{g} + \frac{1}{2} \times (-g) \times \left(\frac{v_0 \sin\theta}{g}\right)^2$$

$$h = \frac{(v_0 \sin\theta)^2}{g} - \frac{(v_0 \sin\theta)^2}{2g}$$

$$h = \frac{2(v_0 \sin\theta)^2}{2g} - \frac{(v_0 \sin\theta)^2}{2g}$$

$$h = \frac{(v_0 \sin\theta)^2}{2g}$$

別解 違う公式を利用して求めることもできる。

$v^2 - v_0^2 = 2ax$ より

$0^2 - (v_0 \sin\theta)^2 = 2(-g)h$　　h について解いて

$$h = \frac{(v_0 \sin\theta)^2}{2g}$$

問題 9 解説続き

(3) 水平到達距離を求めるためには、水平方向の運動に注目すればよいが、まずは時間を求める必要がある。鉛直方向の運動に着目すると、変位が 0 となるときが、再び地面に戻ってくるときである。

$$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

より

$$0 = v_0 \sin\theta \times t + \frac{1}{2}(-g)t^2$$

t について解いて

$$0 = t(v_0 \sin\theta - \frac{1}{2}gt)$$

$$t = 0 \text{ または} \frac{2v_0 \sin\theta}{g}$$

$t = 0$ は投げ出した瞬間の時刻なので、地面に到達するときの時刻は$\frac{2v_0 \sin\theta}{g}$となる。

＊運動の対称性から、t_1 の 2 倍であると考え、$\frac{2v_0 \sin\theta}{g}$を求めてもよい。

時刻がわかったら、水平方向の運動に着目し、水平到達距離 l を求めよう。

$$l = v_0 \cos\theta \times \frac{2v_0 \sin\theta}{g}$$

$$l = \frac{2v_0^2 \sin\theta \cos\theta}{g}$$

(4) 前問(3)の $l = \frac{2v_0^2 \sin\theta \cos\theta}{g}$が最も大きくなるときの θ を考える。

$\sin\theta$ は 0° から 90° になるにつれて大きくなり、$\cos\theta$ は 90° から 0° になるにつれて大きくなる。つまり、θ を大きくすれば $\sin\theta$ は大きくなるが $\cos\theta$ は小さくなってしまう。なので、式の中に sin と cos がどちらもあると、θ がいくつの時に最大になるか考えづらい。どっちかに統一して考えたく、そこで出てくるのが、問題文の公式である。

$2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$ を代入すると、

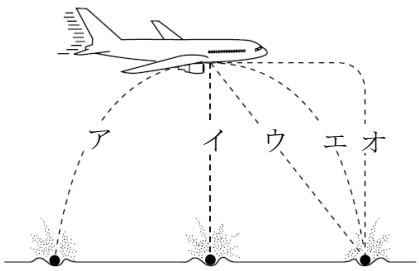
$$l = \frac{2v_0^2 \sin\theta \cos\theta}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

と変形できるのだ。sin のみになったので最も大きくなるときを考えやすい。

$\sin 2\theta$ が最も大きくなるときは、$2\theta = 90°$ のときなので、$\theta = 45°$ のとき、物体は最も遠くまで飛ぶといえる。

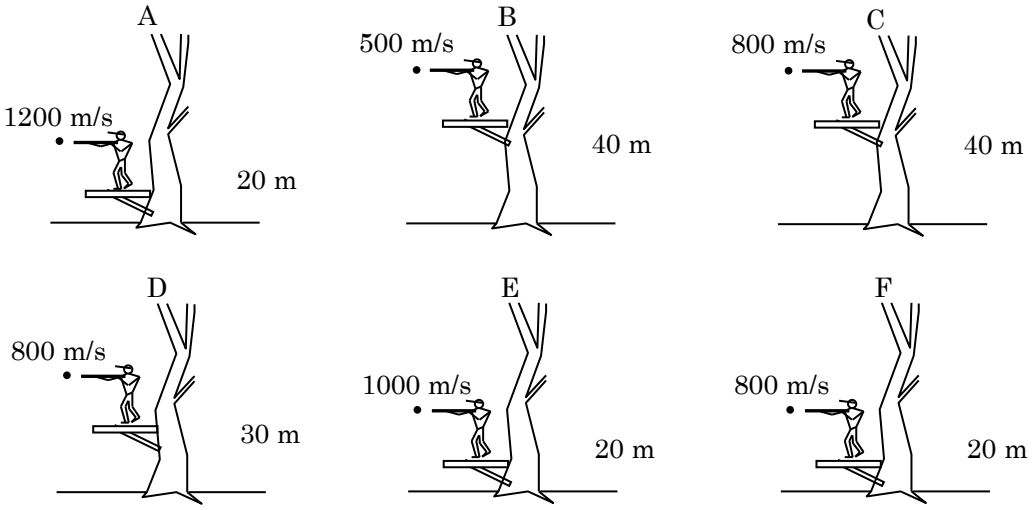
ConcepTest 5 ≪水平投射≫

水平右向きの速度を持つ飛行機からボーリングのボールが静かに落下した。ボールはどのような軌道で地面に落下するか。



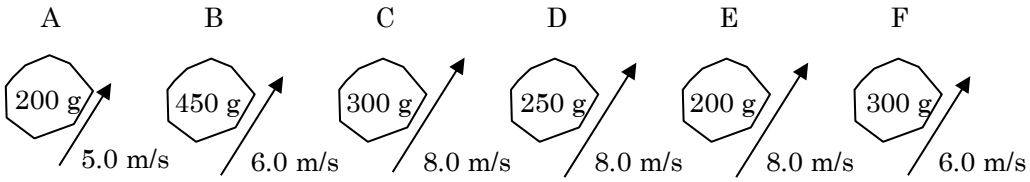
ConcepTest 6 ≪水平投射≫

下図は、6 人の猟師がそれぞれ違った高さから違った速度で、水平な向きに銃弾を発射したことを示す図である。撃った銃弾が地面に落下するまでの時間が長い順番に A～F を並び替えよ。



ConcepTest 7 ≪斜方投射≫

下図は、質量の違う 6 つの石をそれぞれ違った速度で、同じ角度で投げたことを示す図である。投げた石の最高点の高さが高い順に A～F を並び替えよ。



ConcepTest 5 解答　エ

ボールが飛行機から離れた瞬間は、飛行機と同じ速度を持っている(慣性の法則)。よって、ボールは水平右向きに初速度を持った落下運動を行う。よってエ。また、ボールが地面に衝突した瞬間、飛行機はそのボールの真上に位置している。

ConcepTest 6 解答　B = C > D > A = E = F

銃弾は水平方向に打ち出されているので、今回の運動は水平投射である。水平投射された銃弾が地面に落ちるまでの時間は、鉛直方向の運動に注目し、撃った高さ分だけ落下するまでの時間である。そして、鉛直方向の初速度は 0 なので、撃った位置が高い順に滞空時間が長い。よって解答は B = C > D > A = E = F

水平方向の速度は、落下までの時間に全く影響しないのだ。

ConcepTest 7 解答　C = D = E > B = F > A

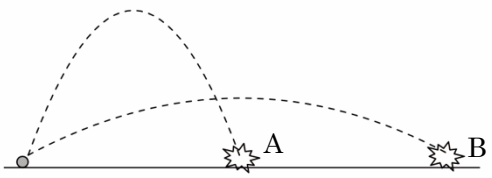
最高点とは、鉛直方向の運動に注目し、鉛直上向きの速度が 0 になるときである。よって、初速度の鉛直方向成分が大きいほど、より高い位置で、最高点に達するといえる。今回投げた角度がすべて等しいので、初速度が大きい順に、鉛直方向の初速度も大きい。

よって解答は、C = D = E > B = F > A

質量は放物運動の分析には関わらない。

ConcepTest 8 ≪斜方投射≫

砲弾を A 地点と B 地点に向かって砲撃するシミュレーションを行うと，下記のような軌道をとることが分かった．それぞれの地点に向かって同時に砲撃を行った場合，どちらの地点に先に命中するか.



(ア) A　　(イ) 同時に衝突する.　　(ウ) B　　(エ) 解答には情報が足りない

ConcepTest 8 解答　ウ

A や B に衝突するときは、打ち出した高さに戻ってきている。よって、『打ち出した高さに戻ってくるまでの時間が短い方が先に命中する』といえる。鉛直方向の運動に注目すると、打ち出した高さまで戻ってくるまでの時間は、最高点が低い軌道の方が短いので B に先に命中する。

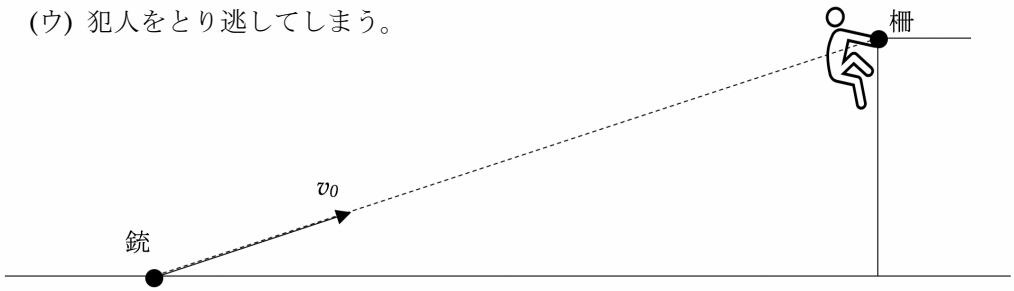
ConcepTest 9 応用≪モンキーハンティング≫

ビルの柵にいる犯人に直線的な狙いをつけた。銃からは初速度 v_0 で弾が発射される。しかし犯人は、弾が発射された瞬間、弾を避けるために地面に向かって飛び降りた。何が起こるか。

(ア) v_0 がビルまで弾が到達する速度以上ならば犯人に弾は命中する。

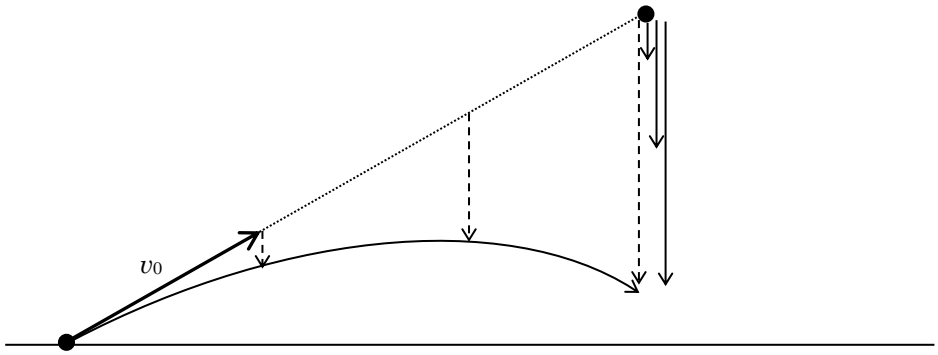
(イ) v_0 が非常に大きい場合、犯人に命中する。

(ウ) 犯人をとり逃してしまう。



ConcepTest 9 解答　ア

銃弾が発射されたのと同時に、犯人が手放すのが同時だった場合、衝突が起きる。銃弾と犯人の重力加速度はともに 9.8 m/s² で同じであるので、衝突するまでに『鉛直方向に落下する距離』は同じなので、最初に向けた照準から両者とも同じだけ落ちているので命中するのだ。



数学的な証明方法が，ほかにもいろいろ証明方法があります。自分で調べて、どれか一つ、何も見ないで書けるようになっておきましょう。

弾がビルに到達する前に、地面に衝突してしまったら犯人には衝突しない。そこで放物運動が終わってしまうからだ。ある程度の v_0 の大きさは必要である。