# §　力学Ⅱ−1 章　運動量 ＊注 この章ではベクトル記号を表記するが、自分の答案には書かなくて良い

## テーマ 1　運動量の定義

運動量とは、物体の『**いきおい**』のイメージ。速さが大きいほど大きく、質量が大きいほど大きい。

**定義**

運動量$\vec{P}$ = 質量 $m$ × 速度$\vec{v}$
パワーの頭文字

単位はこの定義式より〔kg・m/s〕　長い単位だ

## テーマ 2　力積の定義

物体に力を加えて加速させると、速度が上がっているので運動量が増える。

このときの変化量を『**力積（りきせき）**』という。

力積は、『(力)×(力を加えた時間)』　で計算できる。（この関係は次ページで導く）

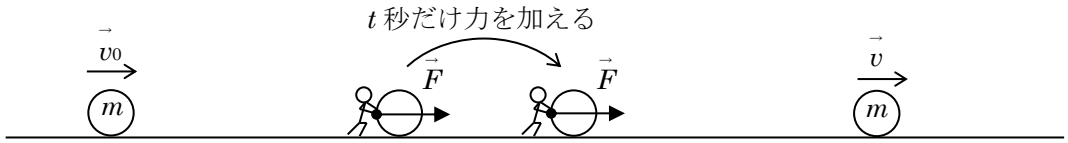
**定義**

力積$\vec{I}$ = 力$\vec{F}$ × 力を加えた時間 $t$

**運動量は加えられた力積だけ変化する**

単位は、この定義式より〔N・s〕　長い単位だ

## 運動量と力積まとめ




①最初の運動量　＋　②受けた力積　＝　③後の運動量

### 公式　運動量と力積の関係

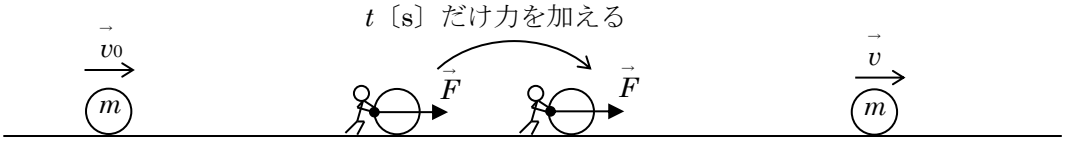
④

**受けた力積だけ運動量が変化する!!という解釈をしよう。**

穴埋めの解答　① $m\vec{v}_0$　② $\vec{F}\,t$　③ $m\vec{v}$　④ $m\vec{v}_0 + \vec{F}\,t = m\vec{v}$
（ベクトル記号はなくても OK）

# テーマ３ 運動量と力積の関係の導出

《モデル》




STEP１ 運動方程式より、力を受けている間の物体の加速度$\vec{a}$を求める。

| ① | | ② |
|---|---|---|
| = | ⇒ $\vec{a}$ = | |

STEP２ 等加速度運動の公式より、$\vec{v_0}$、$\vec{v}$、$t$ 、$\frac{\vec{F}}{m}$ ( = $\vec{a}$ )、の関係式を立てる。

| ③ |
|---|
| = |

STEP３ ステップ２の式の分母を払う。

| ④ |
|---|
| = |

この導出をすることで式に出てきた『$m\vec{v}$』、『$\vec{F}t$』に、『運動量』と『力積』という名前を付けた。力学の基本原理は、ほとんど運動方程式からスタートし、その過程で新しく出てきた文字の組み合わせに、新たな物理量として名前を定義しているのだ。

穴埋めの解答 ① $m\vec{a} = \vec{F}$ ② $(\vec{a} =)\ \frac{\vec{F}}{m}$ ③ $\vec{v} = \vec{v_0} + \frac{\vec{F}}{m}t$ $(\vec{v} = \vec{v_0} + \vec{a}t)$

④ $m\vec{v} = m\vec{v_0} + \vec{F}t$ （ベクトル記号はなくても OK）

# テーマ 4 仕事と運動エネルギー、力積と運動量、の違い

仕事と運動エネルギーの関係は、力積と運動量の関係に似ている。

**復習と比較**

《仕事と運動エネルギーの関係》

$\frac{1}{2}mv_0{}^2 + W = \frac{1}{2}mv^2$ ⇨ 前の運動エネルギー ＋ 仕事 ＝ 後の運動エネルギー

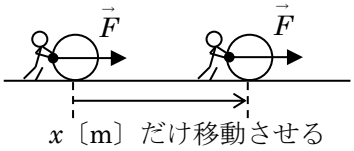
《運動量と力積の関係》

$m\vec{v_0} + \vec{I} = m\vec{v}$ ⇨ 前の運動量 ＋ 力積 ＝ 後の運動量

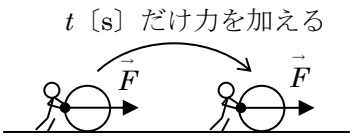
どちらも、前 ＋ 変化量 ＝ 後 という関係式である。似ている分、楽に覚えやすいけれども、混乱しやすいともいえる。なので、どの点が違うのか、しっかりと意識をしておこう。

違い①

仕事は、力 $|\vec{F}|$ × **変位 $|\vec{x}|$**




力積は、力 $\vec{F}$ × **時間 $t$**




距離の情報、時間の情報、どちらに注目するかで、使う物理法則が変わるのだ

違い②

仕事は**スカラー**量

↑

正の向きの概念なし。

進行方向の力ならエネを増やす。

逆向きの力ならエネを減らす。

力積は**ベクトル**量

↑

正負が正の向きの設定に従う。

正の向きの設定を大切に。

速度にも、力にも、正負をつける。

エネルギー関連は速度を2乗しているスカラー量。運動量関連は速度の 1 乗なのでベクトル量なのだ。

**Point**

運動量を扱うときは、正の向きに要注意！！

**問題 1** 運動量と力積

以下の問いに答えよ。

(1) 質量 2.0 kg の物体が、東向きに 1.4 m/s の速さで進んでいる。この物体の運動量を求めよ。

(2) 質量 4.0 kg、速度 2.0 m/s の台車に、速度と同じ向きに 5.0 N の力を 2.0 秒間加えた。力を加えた後の速さを求めよ。

問題１解答 (1)東向きに 2.8 kg・m/s (向きも必要)　(2) 4.5 m/s（速さなので向き不要）

問題１解説

(1) 東向きを正として立式を行う。

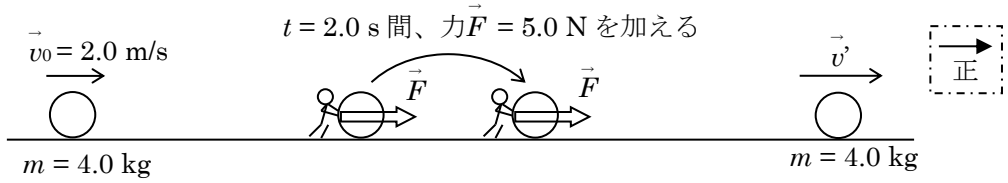
運動量の定義　：　運動量$\vec{P}$ = 質量 $m$　×　速度$\vec{v}$　より

$\vec{P} = 2.0_{\mathrm{kg}} \times 1.4_{\mathrm{m/s}} = 2.8_{\mathrm{kg \cdot m/s}}$

運動量はベクトル量なので、向きも答える必要があり、東向きに 2.8 kg・m/s、と答える。

もし「運動量の大きさ」と問われたら、大きさのみでよいので向きをつけなくてよい。

(2) 進行方向を正、後の速度を $v'$とおき、作図をすると以下のようになる。




力学では、出てくる情報が多いので、必ず図に書き込んで整理しよう。図は必ず自分の手で書き、大きく書き直そう。さて、運動量と力積の関係式を立てる。

前運動量　＋　力積　＝　後運動量

$4.0_{\mathrm{kg}} \times 2.0_{\mathrm{m/s}}$　＋　$5.0_{\mathrm{N}} \times 2.0_{\mathrm{s}}$　＝　$4.0_{\mathrm{kg}} \times \vec{v}'$

整理して　$8.0 + 10 = 4\vec{v}'$

$\vec{v}'$について解いて　$\vec{v}' = 4.5$ m/s

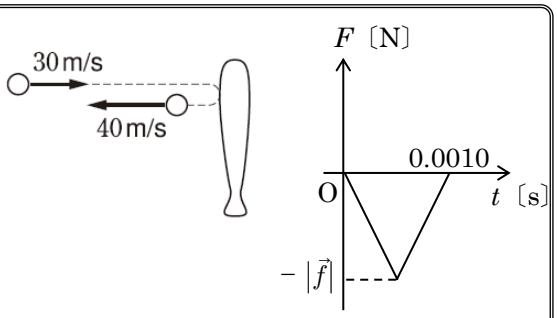
＊ (2) は全ての要素が進行方向と同じ向きなので、答えに勝手に＋がつき、あまり正負を気にせずに計算しても OK だった。

力が逆向きの場合などは、正の向きに気をつけよう。（セミナーP87 2 など）

---

問題２重要 力積と平均の力

右向きを正とする。右向きに 30 m/s の速さで飛んできた質量 0.30 kg のボールをバットで左向きに速さ 40 m/s で打ちかえした。グラフは、バットがボールに加える力と時間の関係を示している。




(1) ボールに与えられた力積を求めよ。

(2) バットがボールに加えた力の最大値の大きさ$|\vec{f}|$は何 N か。

(3) バッドがボールに加えた平均の力の大きさ$|\overline{F}|$は何 N か。

問題 2 解答 (1) −21 kg・m/s（−が必要）(2) $4.2\times10^4$ N（大きさなので−は不要）

(3) $2.1\times10^4$N（大きさなので−は不要）

問題 2 解説

(1) 力積は運動量の変化なので、変化 = 後 − 前 の式を用いる。

（前運動量 ＋ 力積 ＝ 後運動量 と同じ式）

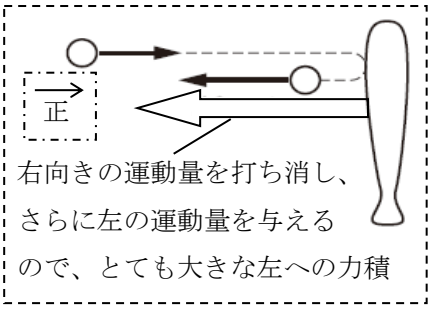
変化 = 後 − 前 より

力積$\vec{I}$ = (−0.30kg×40m/s) − (0.30kg×30m/s)

= −21kg・m/s

マイナスがついているので、力積は左向きだといえる。

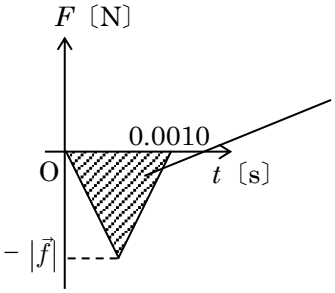
図でイメージすると、右図のようになる。




(2) ポイントは、***F*−*t* グラフの面積が力積**となることである。

（縦軸 $F$×横軸 $t$ が面積なので、力積 $Ft$ は $F$−$t$ グラフの面積）

よって、グラフを用いて、力積を示すと以下のようになる。




面積の大きさは、$\frac{1}{2}\times0.0010\times|\vec{f}|$

と立式でき、これは負の領域の面積なので、負の値であり

力積 $I=-\frac{1}{2}\times0.0010\times|\vec{f}|$ と出せる。

これが、(1)で求めた力積 −21kg・m/s と同じになるので、

$-21=-\frac{1}{2}\times0.0010\times|\vec{f}|$

となり、$\vec{f}$について解いて、

$\vec{f}$ = 42000 N ≒ $\underline{\underline{4.2\times10^4\,\mathrm{N}}}$ となる。

(3) 『平均の力』とは、前問(2)のように時間変化する力を、平均したものである。

平均の力を文字にすると、$\overline{F}$と書く。（読み：『エフバー』 「バー」は平均を意味する）

一定の力$\overline{F}$〔N〕で $t$〔s〕押したと仮定して考えるのだ。

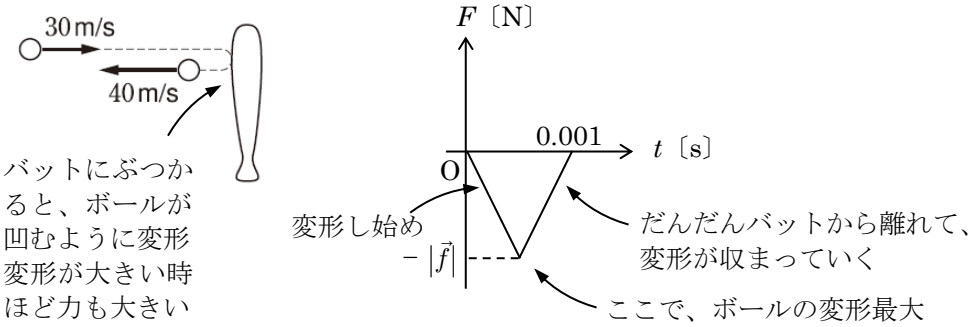
すると、**力積 $I=\overline{F}\times t$** という関係が成り立ち、

$\overline{F}=\frac{I}{t}=\frac{21_{\mathrm{kg\bullet m/s}}}{0.0010_{\mathrm{s}}}=21000$ ≒ $\underline{\underline{2.1\times10^4\,\mathrm{N}}}$ となる。

読み物　平均の力とグラフの関係

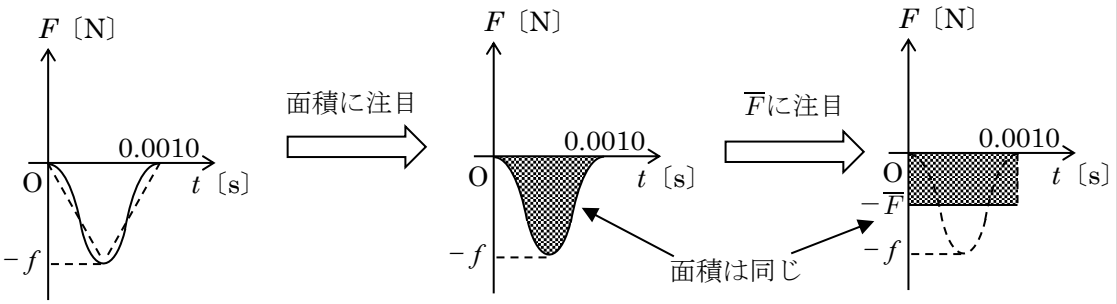
前ページ問題２のグラフで、$F$–$t$ グラフの面積は力積であることを扱い、バッドでボールを押し返す時は、三角形のグラフとなった。

この力は、ボールの変形ぐらいによって変わり、以下のように解釈できる。




このように、ボールの変形のような短い時間に大きな力が加えるような力を、撃力（げきりょく）と呼んだりする。（撃力という名前は覚えなくてよい）

ちなみに、バッドの力の $F$–$t$ グラフは正確な三角形にはならず、下図のように曲線的になる。力積も、曲線に囲まれた部分の面積となり、平均の力は、その面積を平坦にならしたようなイメージとなる。

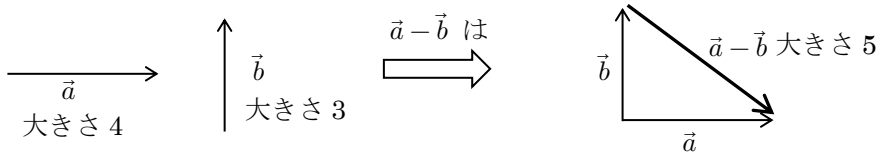


# テーマ 5 平面での計算

運動量と力積はベクトル量なので、平面（斜め）の関係のときは、作図による計算を行う。

復習　ベクトルの引き算

例えば、$\vec{a}-\vec{b}$を求めてみる。



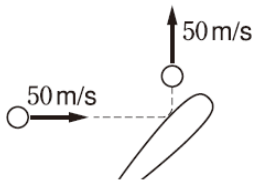

ポイント① お尻を合わせて、引く方（今回は$\vec{b}$）から書く

ポイント② 大きさは、値の引き算ではなく、長さを図形的に求める

（この例だと 3:4:5 の三角形であることを利用している）

問題 3 平面での力積

50 m/s の速さで水平右向きに飛んできた質量 0.20 kg のボールをバットで打ったところ、ボールは同じ速さで鉛直に上がった。バッドがボールに加えた力積の大きさと向きを求めよ。

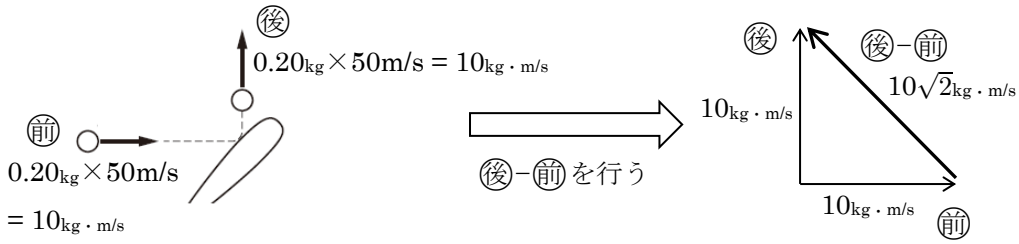



問題 3 解答　鉛直上向きから 45 度左向きに 14 kg・m/s

問題 3 解説

注意！！　問題文の図中のベクトルは速度ベクトルなので、運動量ベクトルに書き直してから、ベクトルの引き算をする必要がある。

力積は、運動量の変化量なので、運動量の後－前を行う。



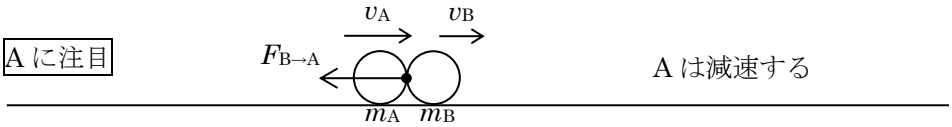

45 度の直角三角形なので、1:1:$\sqrt{2}$ の関係なので、後－前のベクトルは、図のようになる。

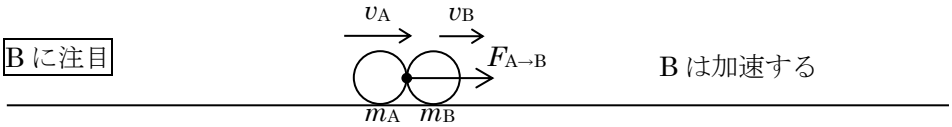
よって解答は「鉛直上向きから 45 度左向きに 14 kg・m/s (10$\sqrt{2}$ kg・m/s)」となる。

# テーマ 6 運動量の保存

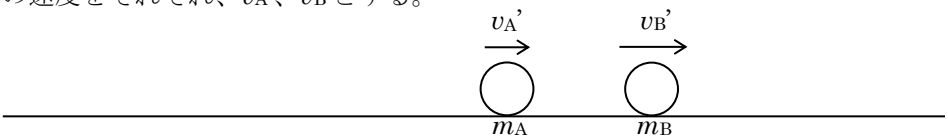
《モデル》質量 $m_A$ の物体 A と、質量 $m_B$ の物体 B が、直線上で衝突した。衝突前の物体 A の速度を $v_A$、衝突後の物体 B の速度を $v_B$（$<v_A$）とする。
このモデルでは、直線上なので、ベクトル記号は省略し、正負で向きを示す。

この後、A と B は衝突する、衝突した際には、A と B は下図のように力を及ぼし合う。2 球が接触している時間を $t$ をする。




衝突後の速度をそれぞれ、$v_A$'、$v_B$'とする。




ここで、$F_{B\to A}$ と $F_{A\to B}$ について考察する。この 2 力は、① [　　] の関係なので大きさが等しい。右向きを正、力の大きさを $F$ とおき、$F_{B\to A}$ と $F_{A\to B}$ を $F$ で表すと、

$F_{B\to A}$ ＝ ② [　　] 、$F_{A\to B}$ ＝ ③ [　　] となる。

さて、それぞれの物体で運動量と力積の関係を立式すると、

A

④ [　　]

B

⑤ [　　]

となる。

さて、この２式を連立して、$F$ を消去する。

A について　$m_A v_A + (-Ft) = m_A v_A'$

＋) B について　$m_B v_B + Ft = m_B v_B'$

$$m_A v_A + m_B v_B \boxed{\phantom{xx}} = m_A v_A' + m_B v_B'$$

力積がちょうど打ち消し合う

そして、この式は次のように解釈できる。

**運動量保存則**

$$\underbrace{m_A v_A + m_B v_B}_{\text{前の運動量の合計}} = \underbrace{m_A v_A' + m_B v_B'}_{\text{後の運動量の合計}}$$

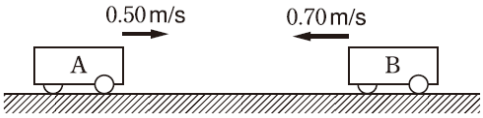
**衝突などの変化の前後で、運動量の合計が保存する**

空欄の解答　① 作用反作用（の関係）　②（$F_{B\to A}$＝）$-F$　③（$F_{A\to B}$＝）$F$

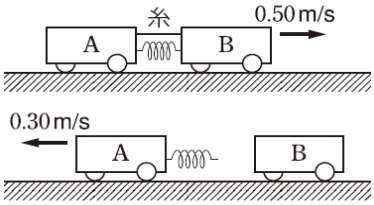
④ $m_A v_A + (-Ft) = m_A v_A'$　⑤ $m_B v_B + Ft = m_B v_B'$

問題 4 運動量の保存

(1) なめらかな水平面の上にある一直線上を、質量 1.0 kg の台車 A が速さ 0.50 m/s で、質量 2.0 kg の台車 B が速さ 0.70 m/s で互いに逆向きに進んで衝突し、一体になった。衝突後一体になった台車の速度 $v$〔m/s〕を求めよ。




(2) 上の台車 A、B の間にばねをはさんで糸でつなぎ、B を前にして速さ 0.50 m/s で進ませながら糸を焼き切ったら、A は逆向きに速さ 0.30 m/s で進んだ。分離後の B の速度 $v'$〔m/s〕を求めよ。



問題 4 解答 (1) はじめの台車 B の速度の向きに 0.30 m/s

(2) はじめの運動と同じ向きに 0.90 m/s

問題 4 解説 衝突、合体の前後で運動量保存則を立式して解いてみよう。

マスターすべき解法の STEP

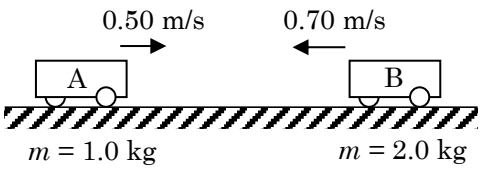
① 変化の前後の作図をする。

② 未知数は自分で文字でおく（$v_A$ など）。

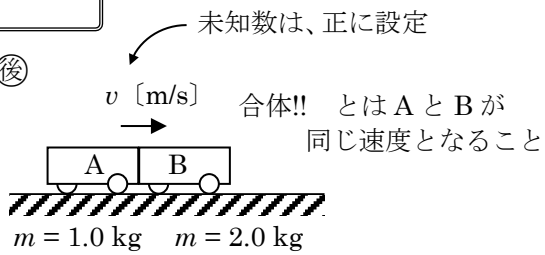
**この際、未知数は必ず正の向きに設定する。**

③ 運動量保存則を立てて、未知数を計算する。

(1) 前




後




運動量保存則より

$$\underbrace{1.0_{\text{kg}}\times 0.50_{\text{m/s}}}_{\text{前 台車A}} + \underbrace{(-2.0_{\text{kg}}\times 0.70_{\text{m/s}})}_{\text{前 台車B}} = \underbrace{(1.0_{\text{kg}}+2.0_{\text{kg}}) \times v_{\text{〔m/s〕}}}_{\text{後 台車A+B}}$$

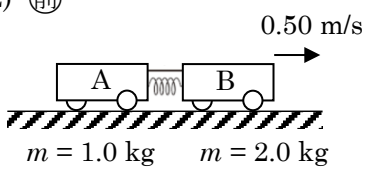
整理して

$0.50 - 1.4 = 3v$

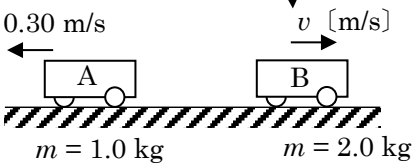
$v$ について解いて

$v =$ <u>$-0.30$ m/s</u> ←図で正の向きに設定した上で、マイナスがついたので、向きは負の向きと考える。計算結果から向きが求まるので、ひとまず未知数は正に設定する。

(2) 前




後




運動量保存則より

$$\underbrace{(1.0_{\text{kg}}+2.0_{\text{kg}}) \times 0.50_{\text{m/s}}}_{\text{前 台車A+B}} = \underbrace{(-1.0_{\text{kg}}\times 0.30_{\text{m/s}})}_{\text{後 台車A}} + \underbrace{2.0_{\text{kg}}\times v_{\text{〔m/s〕}}}_{\text{後 台車B}}$$

整理して

$1.5 = (-0.30) + 2v$

$v$ について解いて <u>$v = 0.90$ m/s</u>

# テーマ７ 運動量保存則の成立条件

前テーマでは、とりあえず運動量保存が成立する問題を解いたが、実際は問題ごとに運動量保存則が成り立つかどうかを検証する癖をつけよう。

復習　系　内力　外力

力学の最初の方で学習した『系』、『内力』、『外力』という言葉が、ここで重要になる。

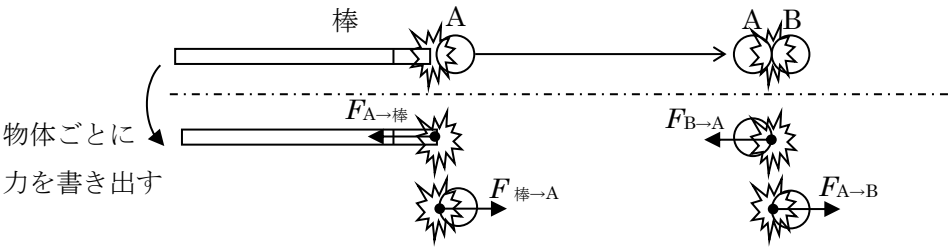
系・・・「グループ」のこと。ジャニーズ系やヴィジュアル系という言葉の『系』と同じ意味
　　複数の物体をひとまとまりのグループとしてみるときに用いる言葉。

内力・・・系の中で及ぼしあっている力

外力・・・系の外（環境と呼ぶ）から系に加えられる力

次に、ビリヤードで球を突くモデルで、系という言葉のイメージをつかもう。

《モデル》球Ａが棒に突かれ、球Ａが球Ｂに衝突する。




ここで、はたらく力を書くと、上の図のようにかけて、力には必ず作用反作用のペアがいることを示せる。ここで、『系』『内力』『外力』という言葉を使って文章を作ってみる。

ＡとＢを１つの系としたとき、棒は『環境』となり、

『内力』 $F_{B→A}$、$F_{A→B}$　　『外力』 $F_{棒→A}$　となる。

$F_{A→棒}$は、系から環境に加わえている力で、内力、外力とも呼ばない。注目しない力となる。

ＡとＢと棒を１つの系としたとき、『環境』は無く、全てをひとまとめの『系』としている。

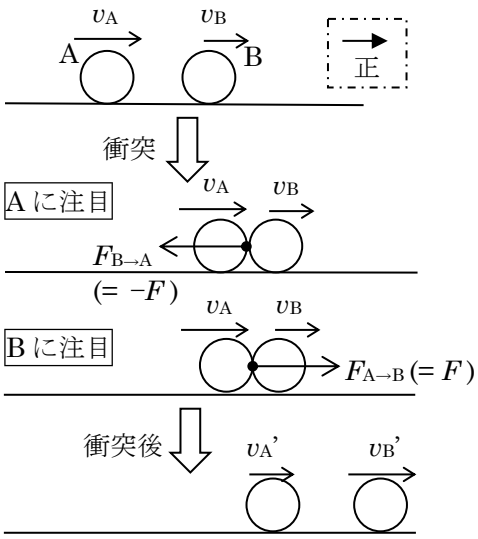
『内力』 $F_{B→A}$、$F_{A→B}$、$F_{棒→A}$、$F_{A→棒}$　　『外力』 無し　となる。

言葉を思い出したところで、運動量保存則の成立条件に関して学ぼう。

## 超重要　運動量保存則の成立条件

**外力がはたらかないこと**

運動量の保存を導いた際のモデルを思い出してみよう。




A と B をひとつの系として、系の合計の運動量と力積の式を立てる

A について　$m_A v_A + (-Ft) = m_A v_A'$

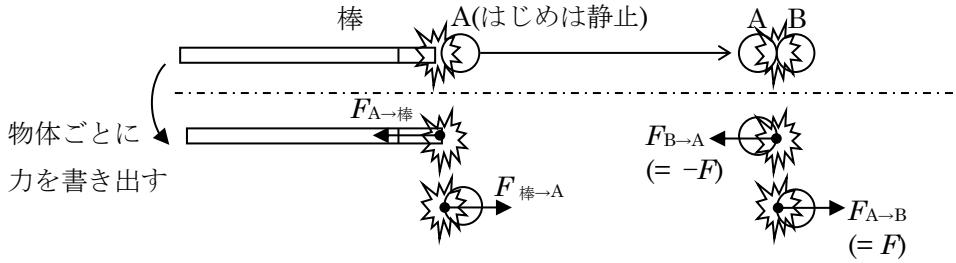
+) B について　$m_B v_B + Ft = m_B v_B'$

$m_A v_A + m_B v_B$ [　　] $= m_A v_A' + m_B v_B'$

力積がちょうど打ち消し合う

このように、力積がちょうど打ち消し合うことで、系の合計の運動量が保存することが導けた。
内力による力積は、作用反作用の関係で、大きさが同じなので、ぴったり打ち消す量となるのだ。

ここで、ビリヤードのモデルで考える。




棒で A を打つ直前を前とし、A が B にあたった直後を後とし、
A と B をひとつの系としたときの、系の合計の運動量と力積の式を考えると、

A について　0（静止）$+ F_{棒→A} \cdot t + (-Ft) = m_A v_A'$

+) B について　$m_B v_B + Ft = m_B v_B'$

0（静止）$+ m_B v_B + F_{棒→A} \cdot t$ [　　] $= m_A v_A' + m_B v_B'$

外力による力積が残ってしまう　　内力による力積は打ち消し合う

となる。$F_{棒→A} \cdot t$ の分だけ力積は打ち消されず、系の合計の運動量は保存しなくなる。
『環境』から加わる力（外力）があると、力積は打ち消し合わないのだ。このことから、
**『外力がはたらかないこと』が、運動量保存の成立条件**　といえるのだ。

ConcepTest1 成立条件

以下の中で、運動量が保存している系を全て選べ。

(ア) 雪上(摩擦のない面)でスリップした車が、他車に衝突した。2 台の車を 1 つの系とする。

(イ) 雪上でスリップした車が、電柱に衝突した。電柱はその場で折れ曲がった。車を 1 つの系とする。

(ウ) 雪上で 1 台の車がスリップしている。スリップしている車を 1 つの系とする。

(エ) 1 台の車が道路で急ブレーキをかけた。この車を 1 つの系とする。

(オ) ボールが地球に向かって落ちる。ボールを 1 つの系とする。

ConcepTest1 解答　ア　ウ

運動量保存の成立条件は、『外力がはたらかないこと』である。外力を検証するために、『系』と『環境』を意識しよう。

(ア) ○　2 台の車を 1 つの系とすると、衝突するときの車と車が押しあう力は内力であり、運動量は保存する。地面（地球）などが『環境』といえる。

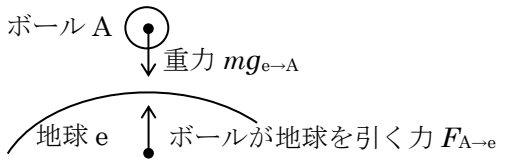
(イ) ×　車 1 台だけを 1 つの系とすると、電柱(地球)は『環境』となる。衝突時に『環境（電柱)』から力を受けてしまい、これは外力なので運動量は保存しない。

(ウ) ○　車はそもそも力を受けていないので、運動量は保存する。

(エ) ×　車 1 台を 1 つの系とすると、道路(地球)は『環境』となる。急ブレーキによる摩擦力は『環境(道路)』から受ける力で、これは外力なので運動量は保存しない。

(オ) ×　落下するボールには重力がはたらいていて、これは『環境（地球)』からの力なので外力である。運動量は保存しない。

＊(オ)でボールと地球を 1 つの系にした場合は、重力も内力となるので運動量は保存する。




ボールと地球を 1 つの系にすると、ボールが下に加速した分、地球が上に加速し、運動量が保存する。

＊(ア)～(エ)の物体にも、重力がはたらいているはずである。これは『環境(地球)』からの力である。他にも垂直抗力を受けていて、これも『環境(地球)』からの力である。これらを考えると外力を受けているといえるので、成立条件を満たさないと言えそうだが、系の運動が重力や垂直抗力の方向と関係がないので、これらの外力は考えなくてよいのだ。（オ）のように進行方向に重力がはたらくような場合は、『環境（地球)』からの力の影響を受けてしまっているので、運動量保存は成り立たないとなる。

＊(オ)で地球も 1 つの系にしてしまえば運動量が保存したように、運動量保存則は、系のとりかた次第で全てのシチュエーションで成立させることができる。力に関わっている物体全てを 1 つの系とし、全部含んだ運動量保存則にすれば、いつでも成立するのだ。

## テーマ 8　反発係数 $e$（はねかえり係数 $e$）

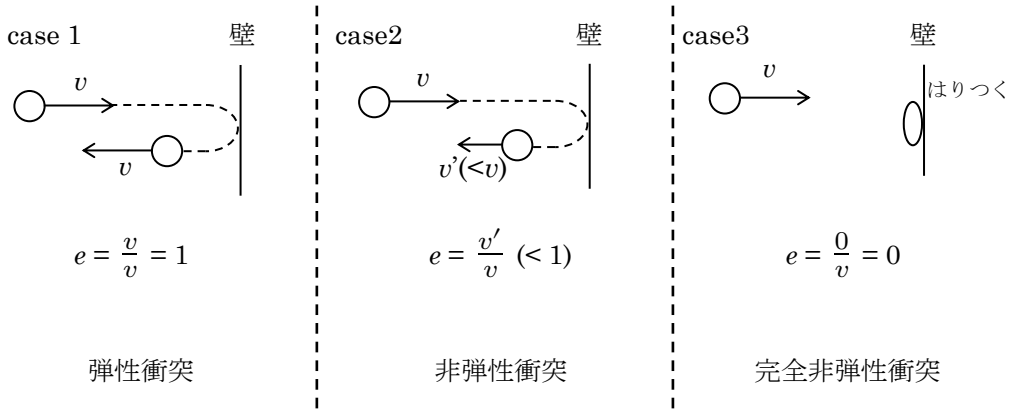
物体の衝突を考察するには、運動量以外の要素として、反発係数という要素が出てくる。

**定義**

反発係数 $e = \dfrac{\text{2 物体の遠ざかる相対速度の大きさ}}{\text{2 物体の近づく相対速度の大きさ}}$

近づく　分の　遠ざかる、と覚えよう

《モデル》壁にぶつかるボールの衝突




**問題 5**　壁への衝突と反発係数

ボールを壁に垂直に 5.0 m/s の速さでぶつけた。反発係数を 0.40 とすると、跳ね返ってくるボールの速さはいくらか。

**問題 6**　両者動く場合の衝突と反発係数①

右向きに 6.0 m/s で進む球 A と、右向きに 1.0 m/s で進む球 B が衝突し、球 A は左向きに 1.0 m/s、球 B は右向きに 3.0 m/s で進んだ。球 A と球 B の反発係数はいくらか。

問題 5 解答 2.0 m/s

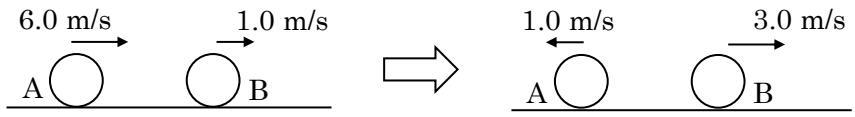
問題 5 解説

定義 $e = \dfrac{\text{遠ざかる}}{\text{近づく}}$ より $0.40 = \dfrac{v}{5.0}$ よって、$v = 2.0$ m/s

---

問題 6 解答 0.80

問題 6 解説 情報を図示して整理しよう



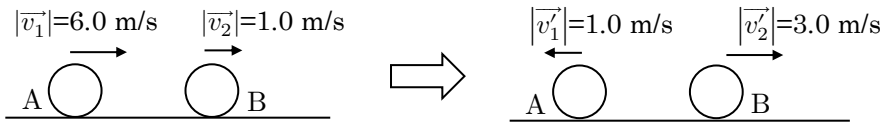

定義 $e = \dfrac{\text{遠ざかる}}{\text{近づく}}$ より $e = \dfrac{4.0}{5.0}$ よって、$e = 0.80$

衝突前は、A が B を追いかける形であり、5.0 m/s で近づいている。衝突後は互いに遠ざかる形なので、足し算して 4.0 m/s で遠ざかっているといえる。
反発係数の公式を使用する際は、相対速度の大きさ、を考えるために、特に向きに気を付けて図を丁寧に書いていこう。

---

読み物 反発係数の公式

教科書などには、反発係数の公式は、$e = -\dfrac{v_1' - v_2'}{v_1 - v_2}$ と示されている。
これは、「相対速度の大きさ」という考え方ではなく、速度に正負をつけて代入していく考え方の公式である。試しに、問題 116 で適用してみる。




右向きを正とすると、

$e = -\dfrac{\vec{v_1'} - \vec{v_2'}}{\vec{v_1} - \vec{v_2}} = -\dfrac{(-1.0)-(3.0)}{(6.0)-(1.0)} = -\dfrac{(-4.0)}{5.0} = 0.80$ このように、解答が得られる。

衝突の前後では、必ず、A と B の近づく、遠ざかるの関係が逆転するので、$\dfrac{v_1' - v_2'}{v_1 - v_2}$ のように単純に速度の差をとると符号が負になってしまうので、分数の頭にマイナスを付けて、正の値に変換している。

$e = \dfrac{\text{遠ざかる}}{\text{近づく}}$ と示した公式は、結果が負にならないように符号で調整しているのだ。

$e = -\dfrac{v_1' - v_2'}{v_1 - v_2}$ と $e = \dfrac{\text{遠ざかる}}{\text{近づく}}$ は同じものを示していると把握しておこう。

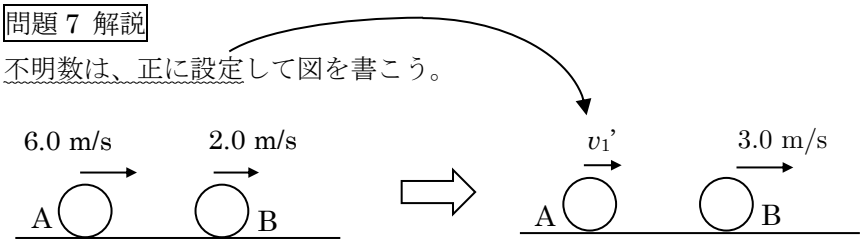
問題 7 両者動く場合の衝突と反発係数②

右向きに 6.0 m/s 進む球 A と、右向きに 2.0 m/s で進む球 B が衝突し、衝突後、球 B は右向きに 3.0 m/s で進んだ。球 A と球 B の反発係数を 0.80 とすると、衝突後の球 B の速度はどちら向きにいくらか。

問題 7 解答 左向きに 0.20 m/s

問題 7 解説

不明数は、正に設定して図を書こう。




公式 $e = \dfrac{\text{遠ざかる}}{\text{近づく}}$ より

$0.80 = \dfrac{3.0 - v_1'}{4.0}$ (衝突後は遠ざかるので、必ず 3.0 m/s > $v_1$' となっているはずである)

$v_1$'について解いて

$v_1' = -0.20$ m/s

マイナスなので、これは想定していた向きと逆であることを示す。解答は左向きに 0.20 m/s。

---

問題 8 重要 反発係数と運動量保存

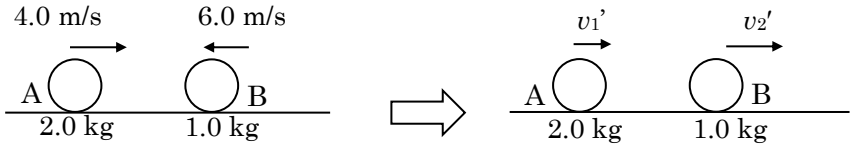
一直線上で，質量 2.0 kg の小球 A が右向きに速さ 4.0 m/s で，質量 1.0 kg の小球 B が左向きに速さ 6.0 m/s で進んで衝突した。2 球の間の反発係数を 0.50 とする。衝突後の 2 球の速度 $v_1'$、$v_2'$を求めよ。

方針 反発係数の式だけだと、不明数が $v_1'$、$v_2'$の 2 つとなるので、それぞれ特定することができない。そこで、運動量の保存の式も立てて、連立をすればよい。

問題 8 解答　$v_1'$(球 A)：左向きに 1.0 m/s　　$v_2'$(球 B)：右向きに 4.0 m/s

問題 8 解説

(STEP1)　作図をして情報を整理する。この際、不明数は正の向きに設定する。




(STEP2)　反発係数の式 $e = \dfrac{\text{遠ざかる}}{\text{近づく}}$ を立てる。

$0.50 = \dfrac{v_2' - v_1'}{10}$　・・・①式

衝突後は 2 球が遠ざかるため必ず $v_2' > v_1'$である。(遠ざかる相対速度)は $v_2' - v_1'$となる。

(STEP3)　運動量保存の式を立てる。

$(2.0_{kg} \times 4.0_{m/s}) + (-1.0_{kg} \times 6.0_{m/s}) = (2.0_{kg} \times v_1') + (1.0_{kg} \times v_2')$

整理して

$2.0 = 2v_1' + v_2'$　・・・②式

(STEP4)　①式、②式を連立して、$v_1'$ を $v_2'$ 求める。

①式を変形して

$v_2' = v_1' + 5.0$　・・・①' 式

これを②式に代入して、

$2.0 = 2\,v_1' + (v_1' + 5.0)$

$v_1'$について解いて

$v_1' = -1.0$ m/s　（マイナスがついたので、図で想定した向きと逆向きといえる。）

よって、『$v_1'$(球 A)：左向きに 1.0 m/s』

①'式に、$v_1' = -\ 1.0$ m/s を代入して、

$v_2' = (-\ 1.0) + 5.0$

$v_2'$について解いて

$v_2' = 4.0$ m/s（プラスなので、図で想定した向きと同じ向きといえる。）

よって『$v_2'$(球 B)：右向きに 4.0 m/s』

Point

計算のステップが多いので、わかっていてもミスしやすい問題となる。解答を反発係数の式や、運動量保存の式に代入してみて、きちんと式が合うかで見直しをする習慣をつけよう。

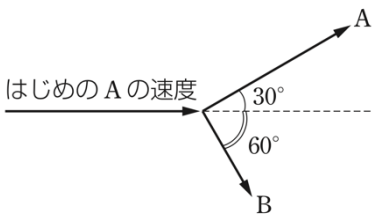
→ セミナーP89 基本例題 25　P92 191

## テーマ 9 応用問題

いくつかの応用問題のパターンを習得しよう。

問題 9 平面での運動量保存と力積

なめらかな水平面上で、小球 A が速度 $v$ で、静止している質量も大きさも等しい小球 B と衝突し、A は衝突前の運動方向から左 30° の方向へ、B は衝突前の A の運動方向から右 60° の方向へ進んだ。




(1) 衝突後の A、B の速さ $v_A$、$v_B$ を求めよ。

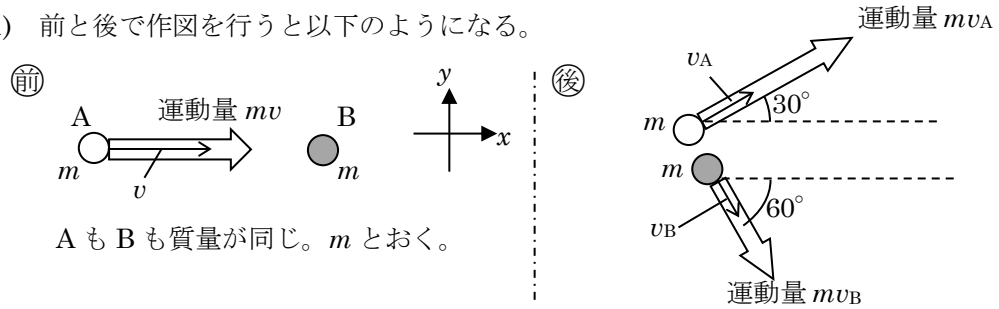
(2) 衝突の前後で、A が B から受けた力積の大きさを求めよ。

方針 運動量がベクトル量であることから平面での運動量保存は、$x$ 方向、$y$ 方向などに分けて立てる必要がある。力積を求める際も、ベクトルの引き算をする必要がある。

問題 9 解答 (1) $v_A = \frac{\sqrt{3}}{2}v$ 、$v_B = \frac{1}{2}v$ (2) $\frac{1}{2}mv$

問題 9 解説

(1) 前と後で作図を行うと以下のようになる。




A も B も質量が同じ。$m$ とおく。

速度は細矢印、運動量は太矢印で区別する

運動量はベクトルなので、一直線上でないときは、各方向に分解しないといけない。

$x$ 方向 前 A　前 B　後 A　後 B

$$mv + 0 = mv_A\cos30^\circ + mv_B\cos60^\circ$$

整理して、

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2}v_A + \frac{1}{2}v_B$$ …①式とする（$m$ が異なる場合は $m_A$、$m_B$ が残り、$m$ は消えないので注意）

$y$ 方向 前 A　前 B　後 A　後 B

$$0 + 0 = mv_A\sin30^\circ + (-mv_B\sin60^\circ)$$ ←正負に気をつけよう

整理して、

$$0 = \frac{1}{2}v_A - \frac{\sqrt{3}}{2}v_B$$ …②式とする

さて、①式、②式を連立して、$v_A$、$v_B$ を求める。②式 $0 = \frac{1}{2}v_A - \frac{\sqrt{3}}{2}v_B$ を変形して、

$$v_B = \frac{1}{\sqrt{3}}v_A$$ …②'式とする

これを①式に代入して、$v_B$ を消去する。

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2}v_A + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}v_A$$

左の $\frac{\sqrt{3}}{2}v_A$ を通分（$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ をかける）

$$v = \frac{3}{2\sqrt{3}}v_A + \frac{1}{2\sqrt{3}}v_A$$

$$v = \frac{2}{\sqrt{3}}v_A \qquad \therefore\ v_A = \frac{\sqrt{3}}{2}v$$

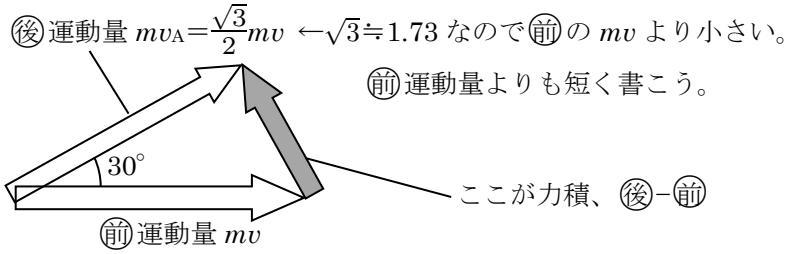
これを②'式に代入

$$v_B = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}v \qquad \therefore\ v_B = \frac{1}{2}v$$

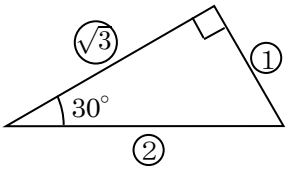
問題 9 解説 続き

(2) 力積は運動量の変化量なので、運動量の後−前で求まる。

前問(1)の運動量保存は「系全体に注目」、(2)の運動量と力積は「物体単体に注目」となっており、慣れるまでは、意識して頭を切り替えないとわかりづらいので注意。
A が受けた力積を聞かれているので、A 単体に注目しての運動量の後−前をする。




さて、力積部分の大きさは図形的に求めるのだが、30° という情報と前と後のベクトルの大きさの関係から、たまたま、1 : 2 :$\sqrt{3}$の三角形になっていることに気づく。




よって力積の大きさは、$\frac{1}{2}mv$ となる。

別解重要

運動量保存が成立しているので、A が受けている力積と、B が受けている力積は、ちょうど打ち消しあっているはずで、つまりは、向きが逆で同じ大きさといえる。両方の運動量の変化が合わさると打ち消しあうことから、系全体での運動量が保存しているのだ。

そこで、B が受けている力積を求めれば、それと向きが逆で大きさが同じものが、問題で聞かれている A の力積、と判断できる。

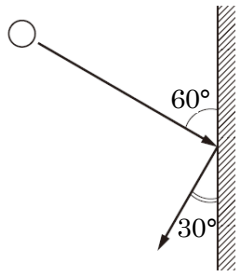
B の受けた力積は、前が 0 なので、後−前をしたら、後のベクトルそのままである。よって、B の後運動量 $mv_B=\frac{1}{2}mv$ が、B の受けた力積と求まる。この大きさは、A が受けた力積の大きさであり、(2)の答えと一致する。

B の衝突後の運動の向きと、(2)の解説で出した A の力積ベクトルの向きが、真逆の関係であることも確認しておこう。

⇒セミナーP90 183　P91 187

問題 10 壁への斜めの衝突

なめらかな水平面上を速さ $v_0$ で進んできた質量 $m$ の小球が、なめらかな壁と 60°の角度で衝突し、壁と 30°の角度の方向にはねかえって進んだ。




(1) 衝突後の小球の速さ $v$ を求めよ。

(2) 小球と壁との間の反発係数 $e$ を求めよ。

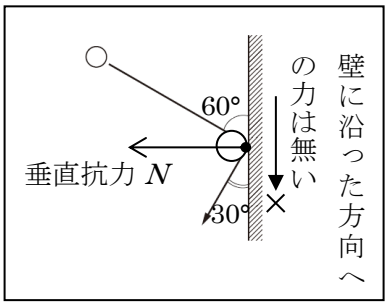
(3) 小球が壁から受けた力積の大きさを求めよ。

方針 壁への衝突時は、壁に沿った方向と、壁に垂直方向に分けて考える。球が受ける力が垂直抗力のみであることに注目して考える。

問題 10 解答 (1) $\frac{1}{\sqrt{3}}v_0$　(2) $e=\frac{1}{3}$　(3) $\frac{2}{\sqrt{3}}mv_0$

問題 10 解説

球が受ける力は垂直抗力のみで、力を受ける向きのみ速度が変化することを利用する。
壁に垂直方向の速度は変化し反発係数 $e$ で関係が示され、壁に沿った方向の速度は変化しない。
図と式でまとめると以下のようになる。




| 速度に注目 | 壁に垂直方向（右向き正とする） | 壁に沿った方向（下向き正とする） |
|---|---|---|
| $v_0$ 60° | $+v_0\sin60°$ | $+v_0\cos60°$ |
| | 垂直抗力の力積により変化 | この 2 つは同じ大きさになる |
| $v'$とする 30° | $-v'\sin30°$ | $+v'\cos30°$ |
| | 式にすると $e=\frac{v'\sin30°}{v_0\sin60°}$ | 式にすると $v_0\cos60°=v'\cos30°$ |

(1) 壁に沿った方向の式、$v_0\cos60°=v'\cos30°$を解く。

$\frac{1}{2}v_0=\frac{\sqrt{3}}{2}v'$　　$\therefore\ v'=\frac{1}{\sqrt{3}}v_0$

(2) 壁に垂直方向の式、$e=\frac{v'\sin30°}{v_0\sin60°}$ に、前問(1)の $v'=\frac{1}{\sqrt{3}}v_0$ を代入して解く。

$e=\dfrac{\frac{1}{\sqrt{3}}v_0\cdot\frac{1}{2}}{v_0\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}$　　$\therefore\ e=\frac{1}{3}$　(文字の問題なので、分数のままでよい)

(3) 球が受ける力積は、運動量の変化を求めればよい。斜めのベクトルの作図計算をしてもよいが、壁に沿った方向は変化していないので、壁に垂直な成分のみに注目してもよい。垂直成分のみに注目したら、一直線上の計算なので、正負で計算してよくなる。

右向きを正として、変化量 = ㊋−㊐と計算すると、

変化量(力積) $=(-\ mv'\sin30°)-(mv_0\sin60°)$

$=(-\frac{1}{2\sqrt{3}}mv_0)-(\frac{\sqrt{3}}{2}mv_0)$

$=-\frac{2}{\sqrt{3}}mv_0$　　よって、力積の大きさは $\frac{2}{\sqrt{3}}mv_0$ （向きは左向き）

＊$m$ をかけ忘れるミスが多いです。次元のチェックで、運動量や力積の単位となっているか確かめてミスを防ごう。

⇒ セミナーP91 189

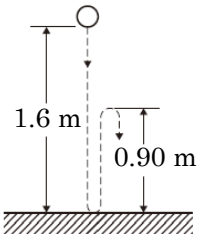
問題 11 放物運動との融合問題

高さ 1.6 m の所から床にボールを落とすと、ボールは高さ 0.90 m の所まではね上がった。重力加速度の大きさを 9.8 m/s² とする。

(1) 衝突直前と衝突直後のボールの速さ $v_1$、$v_2$ はそれぞれ何 m/s か。

(2) ボールと床との間の反発係数 $e$ はいくらか。

(3) 次に落ちてきて、床に当たってはね上がる高さ $h'$ は何 m か。




方針　放物運動の計算技術を活用して、衝突直前、直後の速度を導こう。

---

問題 11 解答　(1) $v_1$ = 5.6 m/s 、$v_2$ = 4.2 m/s　(2) 0.75　(3) 0.51 m

問題 11 解説

(1) 1.6 m 落下している区間に注目する。初速度が 0 で、衝突直前の速さが $v_1$ である。

等加速度運動の公式 $v^2 - v_0^2 = 2ax$ より

$v_1{}^2 - 0^2 = 2\times9.8\times1.6$

$v_1 = \sqrt{2\times9.8\times1.6}$

$v_1 = \sqrt{2\times(2\times7\times7\times\frac{1}{10})\times(4\times4\times\frac{1}{10})}$

$v_1 = 2\times7\times4\times\frac{1}{10}$　　$\therefore\ v_1 = 5.6$ m/s

1 回目の床との衝突後、0.90 m 上昇する区間に注目する。初速度が $v_2$ で、頂点では速度が 0 である。等加速度運動の公式 $v^2 - v_0^2 = 2ax$ より

$0^2 - v_2{}^2 = 2\times(-9.8)\times0.90$

$v_2 = \sqrt{2\times9.8\times0.90}$

$v_2 = \sqrt{2\times(2\times7\times7\times\frac{1}{10})\times(3\times3\times\frac{1}{10})}$

$v_2 = 2\times7\times3\times\frac{1}{10}$　　$\therefore\ v_2 = 4.2$ m/s

(2) 反発係数の$\boxed{\text{定義式}}$ $e = \dfrac{\text{遠ざかる}}{\text{近づく}}$ より

$e = \dfrac{4.2}{5.6}$　　$\therefore\ e = 0.75$

(3) 運動の対称性から、再び床に当たる直前の速さは、上昇しはじめるときの速さ $v_2$ と同じ 4.2 m/s である。はね返った直後の速さを $v_3$ とすると、

反発係数の$\boxed{\text{定義式}}$ $e = \dfrac{\text{遠ざかる}}{\text{近づく}}$より、

$0.75 = \dfrac{v_3}{4.2}$　　$v_3 = 3.15$

ここで、はね上がる高さを $h'$とすると、等加速度運動の$\boxed{\text{公式}}$ $v^2 - v_0^2 = 2ax$ より

$0^2 - 3.15^2 = 2\times(-9.8)\times h'$

$h' = 0.506\ \cdots$　$\Longrightarrow$ $h' \fallingdotseq 0.51$ m

$\boxed{\text{別解}}$ 反発係数の公式の拡大

最初の高さを $h_1$、1 回衝突後の最高点の高さを $h_2$ として、文字で追跡をしてみる。

1 回目の衝突直前の速さ $v_1$ は、等加速度運動の$\boxed{\text{公式}}$ $v^2 - v_0^2 = 2ax$ より

$v_1 = \sqrt{2gh_1}$

1 回目の衝突直後の速さ $v_2$ は、反発係数の定義式 $e = \dfrac{\text{遠ざかる}}{\text{近づく}}$ より

$v_2 = e\sqrt{2gh_1}$　← 速度はバウンドごとに $e$ 倍になる、といえる。

これを用いて $h_2$ を求める。等加速度運動の$\boxed{\text{公式}}$ $v^2 - v_0^2 = 2ax$より

$0^2 - (e\sqrt{2gh_1})^2 = 2(-g)h_2$

$h_2 = e^2h_1$　← 高さはバウンドごとに $e^2$ 倍になる、といえる。

これを利用して問題(3)での $h'$を求めると以下のように立式できる。

$h' = 0.75^2\times 0.90$

$h' = 0.506\ \cdots \fallingdotseq 0.50$ m

と求まる。これを公式として扱う本もあるので、その場合も解説を読めるようになっておこう。

# 応用テーマ：運動量とエネルギー

## テーマ 1 衝突によるエネルギーの損失

この章では、1 つの力学現象を、運動量とエネルギーの両面から分析してみる。

問題 12 エネルギーの損失

一直線上で、質量 2.0 kg の小球 A が速さ 4.0 m/s で、質量 1.0 kg の小球 B が速さ 6.0 m/s で、互いに逆向きに進んで衝突した。

(1) 2 球の間の反発係数を 0.50 としたとき、衝突後の 2 球の速度 $v_1$'、$v_2$'を求めよ。

(2) 前問(1)の衝突により失われた力学的エネルギーを求めよ。

(3) 2 球の間の反発係数を 1.0 としたとき、衝突後の 2 球の速度 $v_1$'、$v_2$'を求めよ。

(4) 前問(3)の衝突により失われた力学的エネルギーを求めよ。

問題 12 解答 (1) $v_1$'：最初の向きと逆向きに 1.0 m/s、$v_2$'：最初の向きと逆向きに 4.0 m/s

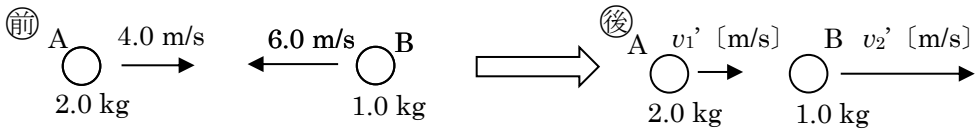
(2) 25 J

(3) $v_1$'：最初の向きと逆向きに 2.7 m/s、$v_2$'：最初の向きと逆向きに 7.3 m/s

(4) 0 J

問題 12 解説

(1) 運動量保存の式と、反発係数の式を立てて連立する。




不明数の $v_1$'、$v_2$'は正に設定すること、$v_1$'<$v_2$'という関係にあることに注意して立式しよう。

運動量保存の式

$$(2.0_{\mathrm{kg}}\times 4.0_{\mathrm{m/s}}) + \{1.0_{\mathrm{kg}}\times(-6.0_{\mathrm{m/s}})\} = (2.0_{\mathrm{kg}}\times v_1'_{\,[\mathrm{m/s}]}) + (1.0_{\mathrm{kg}}\times v_2'_{\,[\mathrm{m/s}]})$$

整理して

$$2.0 = 2v_1' + v_2' \quad \cdots①式とする$$

反発係数の式

$$0.50 = \frac{v_2'-v_1'}{10} \quad \cdots②式とする$$

①式と②式を連立して $v_1' + v_2'$を求める

②式を変形して、

$$v_2' = 5.0 + v_1' \quad \cdots②'式とする$$

①式に、これを代入して、

$2.0 = 2v_1' + (5.0 + v_1')$　　$\therefore\ v_1' = -1.0$ m/s　（最初の向きと逆向きに 1.0 m/s）

求めた $v_1'$を②'式に代入して、

$v_2' = 5.0 + (-1.0)$　　$\therefore\ v_2' = 4.0$ m/s　（最初の向きと逆向きに 4.0 m/s）

(2) 前の力学的エネルギーの合計を $E_1$、後の力学的エネルギーの合計を $E_2$ とする。今回の場合、球は運動エネルギーのみを持っているので重力エネや弾性エネは考えなくてよい。

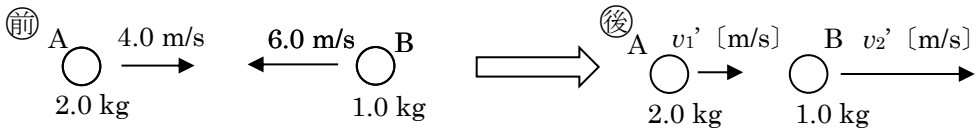
$E_1 = \frac{1}{2}\times 2.0_{\mathrm{kg}}\times 4.0^2{}_{\mathrm{m/s}} + \frac{1}{2}\times 1.0_{\mathrm{kg}}\times 6.0^2{}_{\mathrm{m/s}} = 34$ J

$E_2 = \frac{1}{2}\times 2.0_{\mathrm{kg}}\times 1.0^2{}_{\mathrm{m/s}} + \frac{1}{2}\times 1.0_{\mathrm{kg}}\times 4.0^2{}_{\mathrm{m/s}} = 9.0$ J

衝突による力学的エネルギーの変化量 $\Delta E$ は

$\Delta E = E_2 - E_1 = 9.0_{\mathrm{J}} - 34_{\mathrm{J}} = -25_{\mathrm{J}}$　（25 J の力学的エネルギーが失われた）

(3) 前問(1)と同様の流れで求める。




運動量保存の式

$(2.0_{\mathrm{kg}}\times 4.0_{\mathrm{m/s}}) + \{1.0_{\mathrm{kg}}\times(-6.0_{\mathrm{m/s}})\} = (2.0_{\mathrm{kg}}\times v_1'{}_{〔\mathrm{m/s}〕}) + (1.0_{\mathrm{kg}}\times v_2'{}_{〔\mathrm{m/s}〕})$

整理して

$2.0 = 2v_1' + v_2'$　…①式とする

反発係数の式

$1.0 = \frac{v_2' - v_1'}{10}$　…②式とする

①式と②式を連立して $v_1' + v_2'$を求める

②式を変形して、

$v_2' = 10 + v_1'$ …②'式とする

①式に、これを代入して、

$2.0 = 2v_1' + (10 + v_1')$　　$\therefore\ v_1' = -\frac{8.0}{3} \fallingdotseq -2.7$ m/s（最初の向きと逆向き 2.7 m/s）

求めた $v_1'$を②'式に代入して、

$v_2' = 10 + (-\frac{8.0}{3})$　　$\therefore\ v_2' = \frac{22}{3} \fallingdotseq 7.3$ m/s（最初の向きと逆向きに 7.3 m/s）

(4) 前問(2)と同様に求めるが、四捨五入をする前の分数の $v_1'$、$v_2'$を使用する点に注意。

$E_1 = \frac{1}{2}\times 2.0_{\mathrm{kg}}\times 4.0^2{}_{\mathrm{m/s}} + \frac{1}{2}\times 1.0_{\mathrm{kg}}\times 6.0^2{}_{\mathrm{m/s}} = 34$ J

$E_2 = \frac{1}{2}\times 2.0_{\mathrm{kg}}\times (\frac{8.0}{3})^2{}_{\mathrm{m/s}} + \frac{1}{2}\times 1.0_{\mathrm{kg}}\times (\frac{22}{3})^2{}_{\mathrm{m/s}} = \frac{306}{9} = 34$ J

衝突による力学的エネルギーの変化量 $\Delta E$ は

$\Delta E = E_2 - E_1 = 34_{\mathrm{J}} - 34_{\mathrm{J}} = 0$　（力学的エネルギーは変化しない）

**Point** 重要

$e = 1.0$ の衝突(弾性衝突)では、力学的エネルギーは保存する。

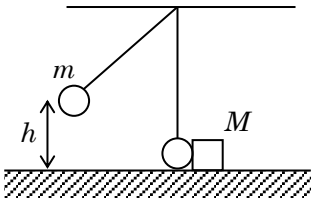
$0 \leqq e < 1$ の衝突(衝突非弾性衝突、完全非弾性衝突)では、力学的エネルギーの損失が起こる。

基本的に、衝突では、物体の変形や、それに伴う**衝突熱の発生**により、力学的エネルギーが失われてしまう。弾性衝突が例外的な衝突なのである。

## テーマ 2 保存則の使い分け

問題 13 2 つの保存則

天井に糸の一端を固定し、他端に質量 $m$ の物体 A をつるし、振り子を作った。この物体を糸がたるまないように、高さ $h$ まで引き上げ、静かに離した。振り子の最下点には、質量 $M$ の木片 B がおいてあり、A は B と衝突後、一体となって運動を続けた。重力加速度の大きさを $g$ とする。




(1) 物体 A が木片 B に衝突する直前の速さ $V$ を求めよ。

(2) 物体 A と木片 B が一体となった直後の速さ $V'$ を求めよ。

(3) 物体 A と木片 B が一体となった後の、振り子の最高点の高さ $h'$を求めよ。

この問題は誘導穴埋め形式で考えていこう。

STEP1 成立条件の復習

運動量保存 ⇒ ①

力学的エネルギーの保存 ⇒ ②

ここにもう 1 つの見方を加えよう。

系全体での力学的エネルギーの保存 ⇒ ③

力学的エネルギーの保存の成立条件「非保存力が仕事をしない」、は 1 つの物体に注目したものであり、系全体で見たときには、物体 A がエネルギーを物体 B に渡す、のようなやりとりの結果、全体で見たら保存している場合がある。それが、3 つ目に挙げた、系全体での力学的エネルギーの保存、という見方である。衝突に伴う熱の発生や、摩擦熱の発生など、熱によるロスがない場合、保存する。覚えておこう。

穴埋めの解答

① 外力がはたらかない　② 非保存力が仕事をしない　③ 熱によるロスがない

STEP2 (1)で成り立つ保存則を検証する

(1)は物体 A 単体での運動なので、A 単体を 1 つの系とする。

運動量保存　⇒　（④ 保存する　・　保存しない　）

＊ 外力である張力、重力がはたらいている。

力学的エネルギーの保存　⇒　（⑤ 保存する　・　保存しない　）

＊ 張力は非保存力だが、進行方向と 90°なので仕事をしない。

＊ 熱をロスしているところもない。

よって、この問題は力学的エネルギーの保存で解く。力学的エネルギーの保存より、

| ⑥　　= |
|---|

∴ $V=$ ⑦

STEP3 (2)で成り立つ保存則を検証する

(2)は物体 A と物体 B の相互作用がある運動なので、A と B を 1 つの系とする。

運動量保存　⇒　（⑧ 保存する　・　保存しない　）

＊ 外力である張力、重力がはたらくが、衝突前後の速度の変化と関係がない向きの力なので無視してよい。

衝突による物体同士で及ぼし合う力は内力なので OK。

単体（A）の力学的エネルギーの保存　⇒　（⑨ 保存する　・　保存しない　）

＊ 物体同士で及ぼし合っている力が非保存力であり、変形させる仕事している。A のエネルギーは減り、B のエネルギーは増えている。

系全体での力学的エネルギーの保存　⇒　（⑩ 保存する　・　保存しない　）

＊ 衝突により熱が発生しているのでロスがある。($e$=1 ならロスはない)

よって、この問題は運動量の保存で解く。運動量の保存の式より、

| ⑪　　= |
|---|

∴ $V'=$ ⑫

前問(1)の $V=\sqrt{2gh}$ を代入すると、$V'=\dfrac{m\sqrt{2gh}}{m+M}$

＊よくある間違い

系全体でのエネルギーを保存すると考えて、$\frac{1}{2}mV^2=\frac{1}{2}(m+M)V'^2$ や、$mgh=\frac{1}{2}(m+M)V'^2$ とするミスが多い。保存則は直感や慣れではなく、きちんと検証して適用しよう。

穴埋めの解答

④ 保存しない　⑤ 保存する　⑥ $mgh=\frac{1}{2}mV^2$　⑦∴ $V=\sqrt{2gh}$

⑧ 保存する ⑨ 保存しない　⑩ 保存しない ⑪ $mV=(m+M)V'$　⑫∴ $V'=\dfrac{mV}{m+M}$

STEP4 (3)で成り立つ保存則を検証する

今回は、合体直後から、最高点に上がるまでの区間での保存則を検証してみる。

A と B を 1 つの系とする。

運動量保存　⇒　（⑬ 保存する　・　保存しない　）

＊ 外力である張力、重力がはたらく。

単体(A)の力学的エネルギーの保存　⇒ 合体しているので考えない。

系全体での力学的エネルギーの保存　⇒　（⑭ 保存する　・　保存しない　）

＊ 合体後なら熱が発生している部分はない。合体前と比較したら保存しない。

よって、系全体でのエネルギー保存で求めればよい。

| ⑮　　= | ∴ $h'$ = | ⑯ |
|---|---|---|

前問(2) の $V' = \dfrac{m\sqrt{2gh}}{m+M}$を代入すると、$h' = \dfrac{m^2}{(m+M)^2}\ h$

---

穴埋めの解答

⑬ 保存しない ⑭ 保存する ⑮ $\frac{1}{2}(m+M)V'^2 = (m+M)gh'$　⑯ ∴ $h' = \dfrac{V'^2}{2g}$

**Point** 重要

**運動量は保存するだろうか？**

**単体で見たときの力学的エネルギーは保存するだろうか？**

**系全体で見たときの力学的エネルギーは保存するだろうか？**

**の 3 つの視点で、問題を攻略しよう。**

読み物 空中衝突時における運動量保存

空中での衝突の際、特殊な近似を行うことがあるので注意をしておこう。
例えば、ビルの上から落下する物体と、地面から投げ上げた物体が衝突した場合を考えると、衝突時も重力が外力として物体の運動に作用するので、厳密には運動量は保存しない。
しかし、衝突の前後だけを切り取ると、衝突している時間 $\Delta t$ はとても短く、力積 $mg\times\Delta t$ はとても小さいとして、この影響は無視できるものとしてしまうのだ。
一方で、衝突時に物体同士で及ぼし合う力 $F$ はとても大きく、短い時間 $\Delta t$ での力積だとしても無視できない。ただし、これは内力なので、結果として成立条件は満たすと考えるのだ。
（厳密に考えると混乱する人は、『衝突』では運動量は保存！とシンプルに考えても OK）

読み物 文字式の妥当性の検証

だんだんと文字式が複雑になってきたので、見直しの技を身につけていこう。

例えば(3)の問題の $h' = \dfrac{m^2}{(m+M)^2}\,h$ という解答について検証してみる。

① 次元のチェック

分数部分の単位は $\dfrac{[\mathrm{kg}^2]}{[\mathrm{kg}^2]}$ となり、単位はなく、右辺は $h$ のみが残る。高さを聞かれているので、次元はあっていると判断できる。

② 極端な大小差をつけて、具体的な数を入れてみる。

例えば、物体 A の $m$ がものすごく大きく、木片 B の $M$ がものすごく小さい場合を考える。とても重たい物体 A に、粉みたいな存在の木片 B が衝突しても、ほぼ影響がなく、普通の振り子の運動となり、$h' = h$ となりそうである。数式で検証してみると、

$h' = \lim_{M\to 0}\dfrac{m^2}{(m+M)^2}\,h \qquad \therefore\ h' = h$ となり、妥当な解答であると判断できる。

（$\lim_{m\to\infty}$ で検証してもよい）

逆に、物体 A の $m$ がものすごく小さく、木片 B の $M$ がものすごく大きい場合を考える。粉みたいな物体 A が、ものすごく重たい木片 B にぶつかっても、そこでストップしてしまい $h' = 0$ となりそうである。数式で検証すると、

$h' = \lim_{M\to\infty}\dfrac{m^2}{(m+M)^2}\,h \qquad \therefore\ h' = 0$ となり、妥当であると判断できる。

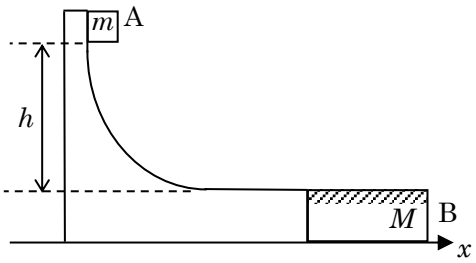
（$\lim_{m\to 0}$ で検証してもよい）

このような数式の妥当さのチェックを普段から、練習しておきましょう。

⇒セミナーP91 184 P92 193

問題 14 すべり乗る合体

図のような形状のなめらかな曲面をもつ固定された台があり、降りた先には質量 $M$ の物体 B が置いてある。いま、質量 $m$ の物体 A を高さ $h$ の位置から静かに離すと、曲面をすべり下り、その先にある物体 B の上に乗った。




物体 B と床との間には摩擦はなく、物体 B の上面は粗い面で物体 A との間の動摩擦係数は $\mu'$ であるとする。重力加速度の大きさを $g$ とする。水平方向は、右向きを正とする。

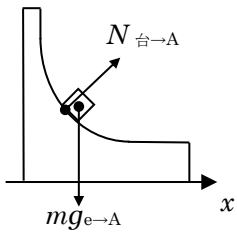
(1) 物体 A が物体 B に乗る直前の速度 $v_1$ はいくらか。

(2) 物体 A が物体 B に乗り十分時間が経つと、物体 A は物体 B に対して静止した。このときの A の速度 $v_2$ はいくらか。

問題 14 解答 (1) $v_1 = \sqrt{2gh}$ (2) $v_2 = \dfrac{m}{m+M}\sqrt{2gh}$

問題 14 解説 どの保存則が成り立つかを、丁寧に見ていく練習をしよう。

(1) A が曲面を下る区間について




運動量 A 単体を 1 つの系としたとき、重力 $mg_{e\to A}$ と台からの垂直抗力 $N_{台\to A}$ は外力である。外力がはたらくので運動量は保存しない。

単体(A)の力学的エネルギー 台からの垂直抗力 $N_{台\to A}$ が非保存力であるが、進行方向と 90° の関係なので、これは仕事をしない。力学的エネルギーは保存する。

系全体での力学的エネルギー A 以外の物体がまだ登場していないので、単体での力学的エネルギーの保存と考えることが変わらない。

よって、単体での力学的エネルギー保存の式で解く。

前 = 後

$mgh = \frac{1}{2}mv_1^2 \qquad \therefore\ v_1 = \sqrt{2gh}$

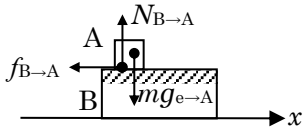
(2) A が B に乗った後は、互いに摩擦力がはたらき、A にはブレーキ、B にはアクセルがかかる。そして、『物体 A は物体 B に対して静止』というのは、A と B が同じ速度になったことを意味する。A と B が一体になったといえ、A は B に対して静止したといえる。このときの速度が $v_2$ である。保存則に関して考察すると、

運動量　A と B を 1 つの系とすると、摩擦力 $f$ は内力なので OK。重力と垂直抗力は外力だけれど、進行方向と関係がないので無視できる。水平方向の運動量は保存する。

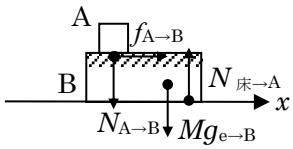
単体(A)の力学的エネルギー　摩擦力が非保存力であり、これが仕事をしているので保存しない。

系全体での力学的エネルギー　摩擦力により、摩擦熱が発生しているので、エネルギーのロスがある。保存しない。

(A にはたらく力)




(B にはたらく力)




よって、運動量のみが保存する。運動量保存の式で解くと、

$$mv_1 = mv_2 + Mv_2 \quad \therefore\ v_2 = \frac{m}{m+M}\ v_1$$

前問(1)の $v_1$ を代入して、

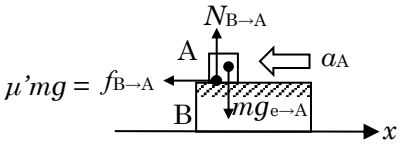
$$v_2 = \frac{m}{m+M}\ \sqrt{2gh}$$

＊ この運動は、時間をかけた合体という見方もできる。

別解 発展 復習

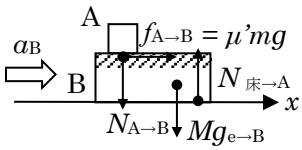
(2)は、運動方程式と、等加速度運動の関係を用いて解くこともできる。以下のように、運動を整理して、運動方程式を立ててみる。

(A について)




速度の変化は $v_1 \to v_2$

(B について)




速度の変化は $0 \to v_2$

A について　$ma_A = -\mu' mg \quad \therefore\ a_A = -\mu' g$　(左向き)

B について　$Ma_B = \mu' mg \quad \therefore\ a_B = \mu' \frac{m}{M}\ g$　(右向き)

これを用いて、等加速度運動の式 $v = v_0 + at$ の式を立てる。

A について　$v_2 = v_1 - \mu' mgt$ …①

B について　$v_2 = 0 + \mu' \frac{m}{M}\ gt$ …②

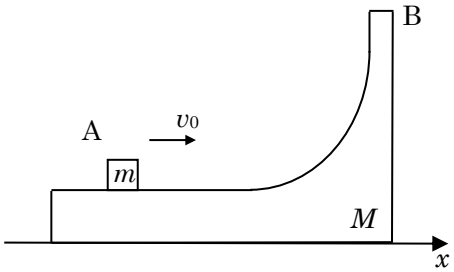
①、②を連立して $t$ を消去して、$v_2$ について解くと、$v_2 = \frac{m}{m+M}\ v_1$ と答えが求まる。

保存則を使うと、かなり計算が簡単になることを実感しておこう。

# テーマ 3 平面での保存則の使い分け

問題 15 台上の物体での運動

図のように、水平でなめらかな床上に、曲面をもつ質量 $M$ の台 B を置く。台 B 上のある点に質量 $m$ の小物体 A を置き、水平右向きで大きさ $v_0$ の初速度を与えたところ、A は台上を運動し、やがて B の曲面を上り始めた。その後、A は B の曲面上のある点まで上がって B に対して一瞬静止した後、B の曲面を下り始めた。




ただし、この間、A が B から離れることはなかった。重力加速度の大きさを $g$、水平成分は図で右向きを正とし、A と B の間の摩擦は無視できるものとして、以下の設問に答えよ。

(1) A が最高点に達した瞬間の、A の速度 $v$ を求めよ。

(2) A が達した最高点の高さ $h$ は、元の位置からどれだけの高い位置か求めよ。

方針 斜面が固定されていない問題が初めてだと思うので、まずは、どんな運動をするかイメージしてから取り掛かろう。斜面 B を上るときに、小球 A は B を押す（次ページの図の $N_{A\to B}$）。それにより、B は右に速度を得る。全体が右にスライドするような運動をするのだ。

台 B が動かない問題では、B が床と接着されていたり、金具などで固定していたのだ。

問題 15 解答 (1) $v = \dfrac{m}{m+M}v_0$　(2) $h = \dfrac{Mv_0^2}{2(m+M)g}$

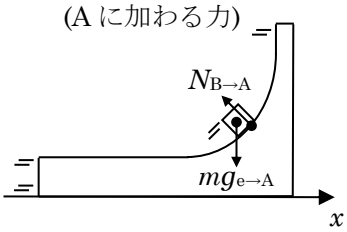
問題 15 解説

(1) 小球 A が台 B を上るときの移動で、どの保存則が成り立っているか検証する。

運動量

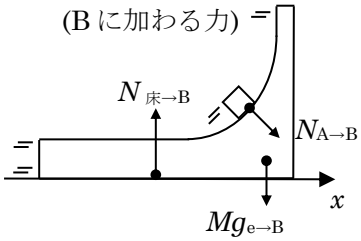
小物体 A と台 B を 1 つの系とすると、重力 $mg_{e\to A}$ と、$Mg_{e\to B}$、$N_{床\to B}$ が外力となる。外力が加わっているので、運動量は保存しない。しかし、よく見ると、それらの外力は全て鉛直方向の力なので、保存しないのは鉛直方向だけなのだ。

水平方向のみに分解すれば、運動量は保存する。




単体(A)の力学的エネルギー

小物体 A には非保存力である $N_{B\to A}$ がはたらく。いつもなら『これは進行方向と 90° の力なので仕事をしない』と処理をするのだが、今回の場合は、曲面に沿った動きに加えて、曲面自体の右向きの動きが合わさり、A の進行方向と垂直抗力 $N_{B\to A}$ は 90° の関係ではなくなるのだ。



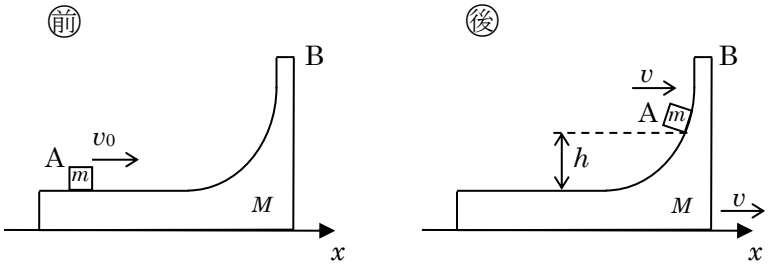

よって、非保存力が仕事をしてしまい、単体の力学的エネルギー保存は成立しない。

系全体での力学的エネルギー

全ての面で摩擦がなく、衝突なども起きていないので、熱によるロスはない。よって、系全体での力学的エネルギー保存は成立する。

---

さて、水平方向の運動量保存と、系全体での力学的エネルギー保存、の式を立てる。




最高点では、小物体 A が台 B からみて一瞬静止している。

これは、A と B が同じ速度で進んでいることを意味する。$v$ とおく。

水平方向の運動量保存

$(m\times v_0) + (M\times 0) = (mv) + (Mv)$　　整理して　$mv_0 = (m + M)v$　…①式とする

系全体での力学的エネルギー保存の式

$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mgh + \frac{1}{2}Mv^2$　整理して $\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}(m+M)v^2 + mgh$ …②式とする

①式より、

$$v = \frac{m}{m+M}v_0 \quad \cdots\text{これが(1)の解答}$$

(2) ②式を $h$ について解く。

$$\frac{1}{2}mv_0{}^2 = \frac{1}{2}(m+M)v^2 + mgh$$

これに、前問(1)の $v = \frac{m}{m+M}v_0$ を代入すると

$$\frac{1}{2}mv_0{}^2 = \frac{1}{2}(m+M)\left(\frac{m}{m+M}v_0\right)^2 + mgh$$

$h$ について解く。

$$\frac{1}{2}mv_0{}^2 = \frac{m^2}{2(m+M)}v_0{}^2 + mgh$$

$$mgh = \frac{1}{2}mv_0{}^2 - \frac{m^2}{2(m+M)}v_0{}^2$$

$$h = \frac{1}{2g}v_0{}^2 - \frac{m}{2(m+M)g}v_0{}^2$$

$$h = \frac{{v_0}^2}{2g}\left(1 - \frac{m}{m+M}\right)$$

$$h = \frac{{v_0}^2}{2g}\left(\frac{M}{m+M}\right)$$

$$h = \frac{Mv_0^2}{2(m+M)g}$$

発展　解答が妥当かの見直しをしてみる

見直し台 B がとてつもなく重かったら、ほぼ B は動かないと考えられる。B が動かないときの $h$ を考えると、A 単体の力学的エネルギーの保存が成り立ち、

$$\frac{1}{2}mv_0{}^2 = mgh \qquad \therefore\ h = \frac{{v_0}^2}{2g}$$

となりそうである。

解答の数式で検証すると

$$h = \lim_{M\to\infty}\frac{Mv_0^2}{2(m+M)g}$$

$$h = \lim_{M\to\infty}\frac{v_0^2}{2(\frac{m}{M}+1)g} = \frac{{v_0}^2}{2g}$$

ずばり一致するので、この解答は妥当といえそうである。