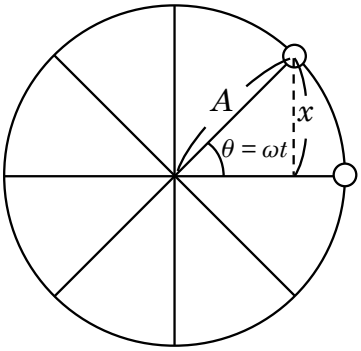
§　力学Ⅱ−3 章　単振動

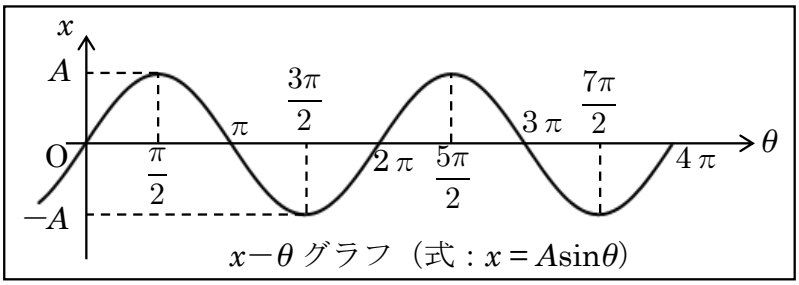
テーマ１　曲線のグラフ　～円運動のパラメータで三角関数のグラフの式をかく～



円運動の半径を A、角速度を ω とし、中心を通る水平線からの物体の高さを x とすると、

$x = A\sin\theta$　　とかける。

縦軸を x、横軸を θ としたグラフを書くと、



$x-\theta$ グラフ（式：$x = A\sin\theta$）

となる。

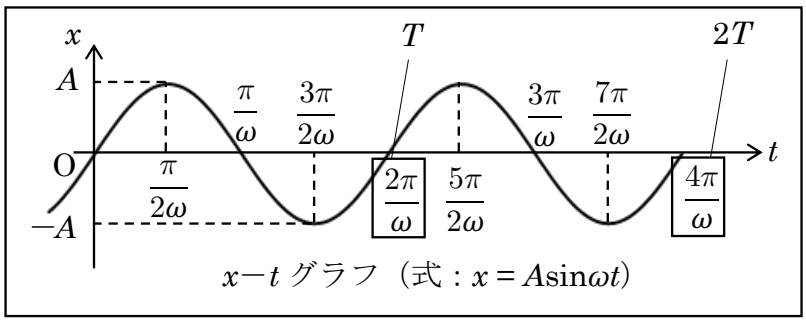
しかし、<u>物理では未来予知を行うことがメイン目的なので、使うのは横軸が t のグラフだ。</u>

θ を t に直そう。

$\theta = \omega t$ という関係なので、式自体は $x = A\sin\theta$ ⇒ $x = A\sin\omega t$ と書き直せる。

また $t = \dfrac{\theta}{\omega}$ といえるので、θ を ω で割れば t になると考えられる。

よって、上記の $x-\theta$ グラフの横軸全体を ω で割ると、以下のような $x-t$ グラフにできる。

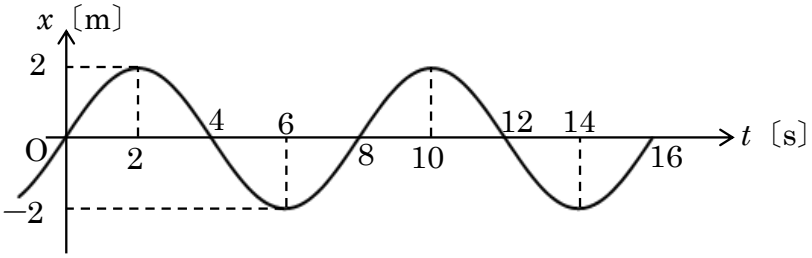


$x-t$ グラフ（式：$x = A\sin\omega t$）

となる。

問題１　グラフの式

上と同じルールで書かれた以下のグラフで示される等速円運動の半径、周期、角速度、速度をそれぞれ求めよ。また、このグラフの式を答えよ。



Point

物理で三角関数のグラフを扱う場合　この $x = (\text{最大値}) \times \sin\omega t$ という形が基本になる。

この形をスラスラと書き下せるように体に馴染ませよう。

問題１解答　半径：2.0 m　周期：8.0 s　角速度：$\frac{\pi}{4}$ rad/s　速度：$\frac{\pi}{2}$ m/s

グラフの式：$x = 2\sin\frac{\pi}{4}t$

問題１解説

半径：波の振幅の部分にあたる。グラフを読んで 2.0 m

周期：ちょうど波形１つ分の時間。グラフを読んで 8.0 s

角速度：周期が 8.0 s であることを利用する。公式 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ より、$8.0 = \frac{2\pi}{\omega}$　よって、$\omega = \frac{\pi}{4}$

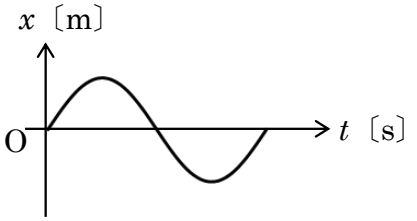
速度：公式 $v = r\omega$ より、$v = 2.0 \times \frac{\pi}{4}$　よって、$v = \frac{\pi}{2}$ m/s

グラフの式：基本の形である $x = A\sin\omega t$ にここまで求めた A と ω を代入する。$x = 2\sin\frac{\pi}{4}t$

テーマ２　典型的な曲線の式 ~物理に出てくる式の 80%はこれ~

数学の三角関数では、曲線の式は $x = A\sin(\omega t + ○○)$ のように色々な形で出てくるが、物理で出題されるのは以下の 4 タイプに絞られる。まずは基本の型を丸暗記してしまおう。

① ＋sin 型

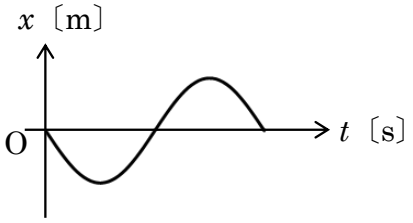


原点スタートで最初に正に向かうパターン

前ページのパターンである。

グラフの式は $x = A\sin\omega t$ となる。

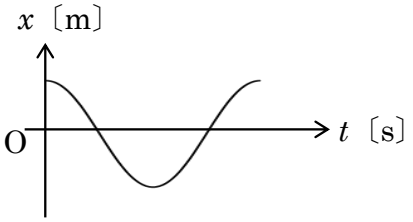
② −sin 型



原点スタートで最初に負に向かうパターン

グラフの式は、$x = -A\sin\omega t$ となる。

③ ＋cos 型

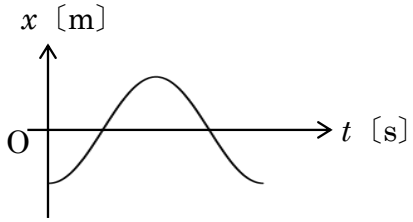


変位が正に最大の点から始まるパターン

スタートが上からだと

グラフの式は $x = A\cos\omega t$　となる。

④ −cos 型



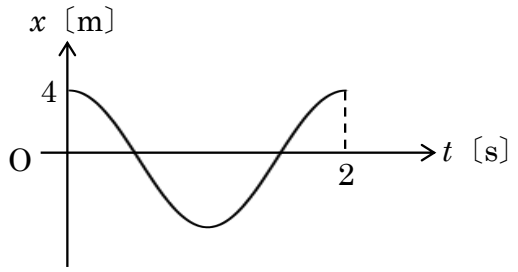
変位が負に最大の点から始まるパターン

スタートが下からだと

グラフの式は $x = -A\cos\omega t$　となる。

グラフの形から、型を見極め、A を読み取れば、式を書き下せるのである。

問題 2　典型的な波の式



左のグラフの式を答えよ。

問題 2 解答　$x = 4\cos\pi t$

問題 2 解説

STEP①　グラフが何型か見極める

正に最大から始まっているので、+cos 型である。

STEP②　グラフから A を読み取る

A は 4.0 m である。

STEP③　グラフから ω を読み取る

グラフより、周期 $T = 2.0$ s

公式 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ より、$2.0 = \frac{2\pi}{\omega}$ よって、$\omega = \pi$

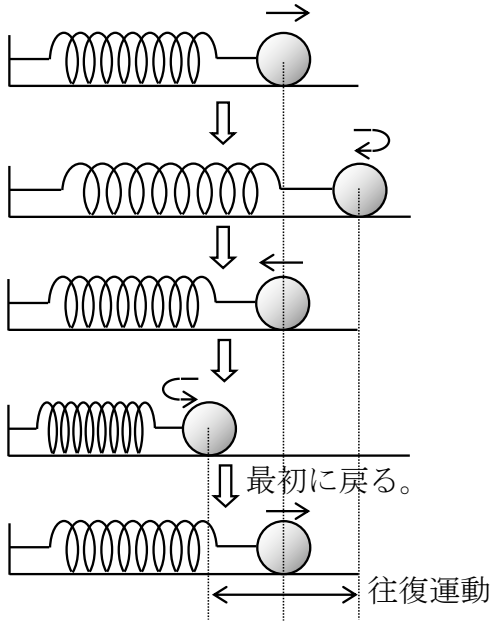
STEP④　式にする

+cos 型で、A が 4.0 m、ω が π であることから、$x = 4\cos\pi t$

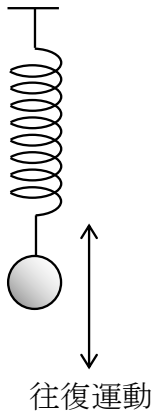
テーマ 3　単振動の要素

単振動とは、『**ある範囲内を往復する運動**』である。

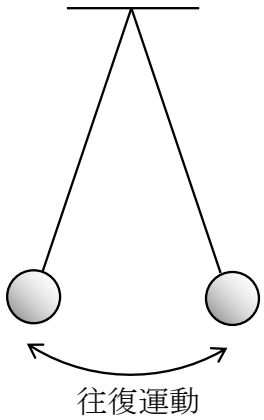
例　水平バネ振り子



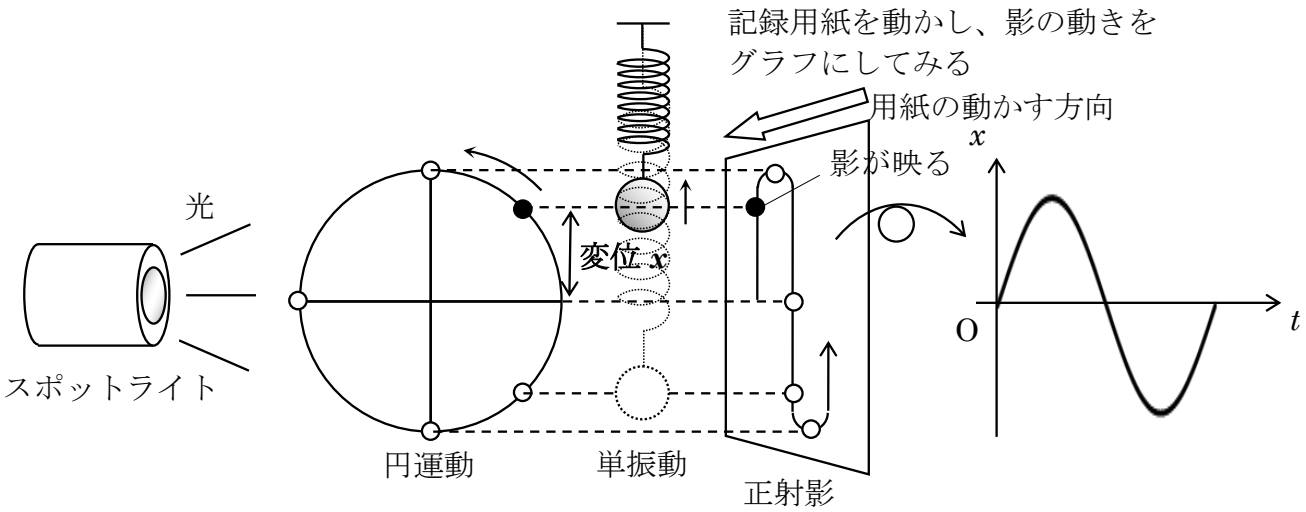
鉛直バネ振り子



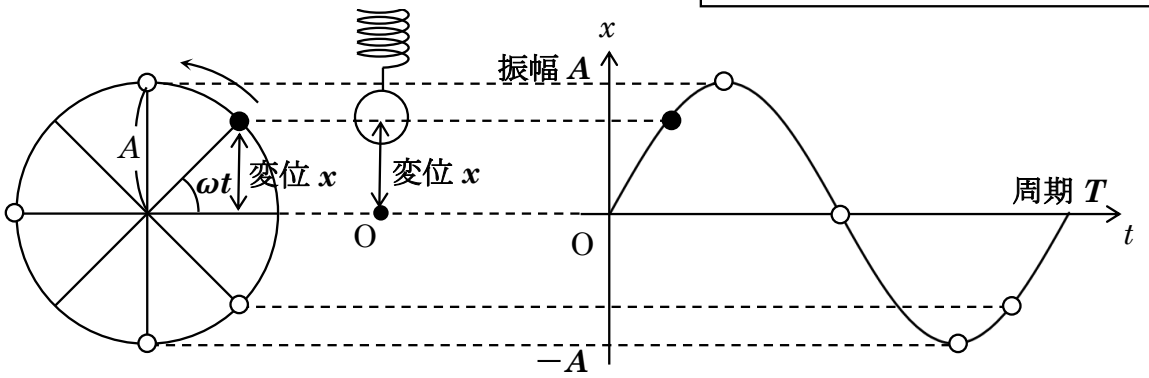
単振り子



ここで、単振動の変位は、偶然にも等速円運動の正射影の変位と一致する。



単振動の変位は、テーマ１で書いたグラフで示すことができる！



このとき以下のものを単振動の要素として抑えておこう。『　』は定義、□は公式である。

・『振動の中心』・・・往復のちょうど真ん中、ここを原点 O にしよう　⇒　円運動の中心に対応

・『振幅（しんぷく）A』・・・振動の中心からもっとも離れる点までの距離　⇒　円運動の半径に対応

・『単振動の変位 x』・・・振動の中心からおもりまでの距離　⇒　円運動の正射影に対応

・単振動の変位 x の公式・・・円運動の正射影の式 $x = A\sin\omega t$ を、公式として扱う。

・『角振動数 ω』・・・単振動の公式での ω　⇒　円運動の角速度に対応

・『周期 T』・・・1 往復にかかる時間。公式は $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$　⇒　円運動の周期と対応

・『振動数 f』・・・1s で往復する回数。公式は $f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega}{2\pi}$ ⇒円運動の回転数と対応

＊角振動数 ω について

単振動は直線上の往復運動で、実際に円運動をしているわけではない。なので、ω を『角速度』と表現するのは変なので、『角振動数』という名前が新たについている。

ω が大きくなると、1 往復にかかる時間が短くなり往復のペースが速くなっていくといえる。

テーマ 4　公式の使えなさがスゴイ

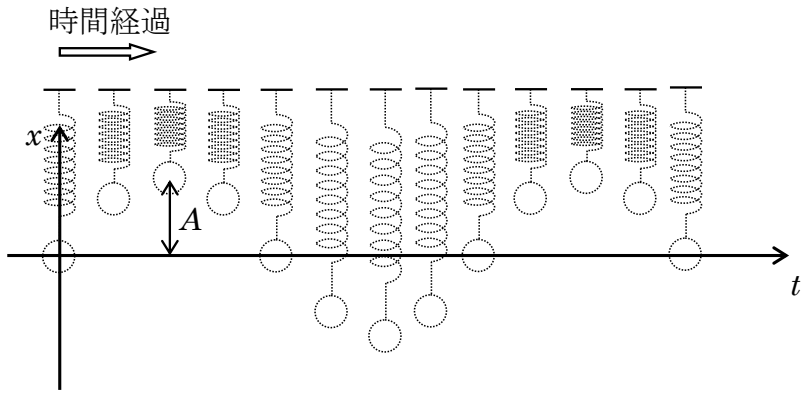
単振動の変位 x の公式 $x = A\sin\omega t$ は、高校物理の中で最も使えない公式である。
例えば、以下のモデル①、モデル②で、単振動の変位 x の式を立ててみよう。

《モデル①》

振動の中心で、
上向きの初速度を
与える
振幅は A となった

Point
単振動のグラフの式は、
『運動の軌跡をイメージ』→『これがそのまま x–t グラフ』
→『グラフの式を立式』の流れで書こう

ストロボ図をイメージするようなイメージで、下図のように運動の軌跡をイメージする。



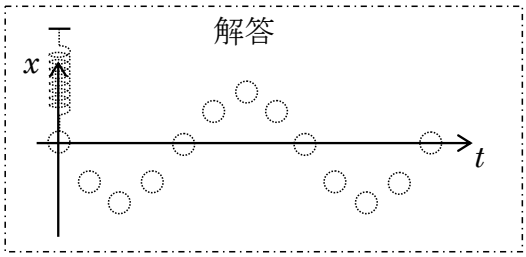
すると、原点から始まり、上向きにスタートするグラフになるので、+sin 型のグラフであるから、
$x = A\sin\omega t$ と式を書ける。
これは公式の通りである。

《モデル②》

振動の中心で、
下向きの初速度を
与える
振幅は A となった

軌道を書いてみる。（解答は左下）

軌跡からグラフを書くと、−sin 型になっていることがわかるので、この場合の式は、
$x = -A\sin\omega t$　となるのである。公式 $x = A\sin\omega t$ は初期条件で容易に変わってしまうのだ。
公式を覚えて適用することはしてはいけない。



問題 3　単振動の変位の式

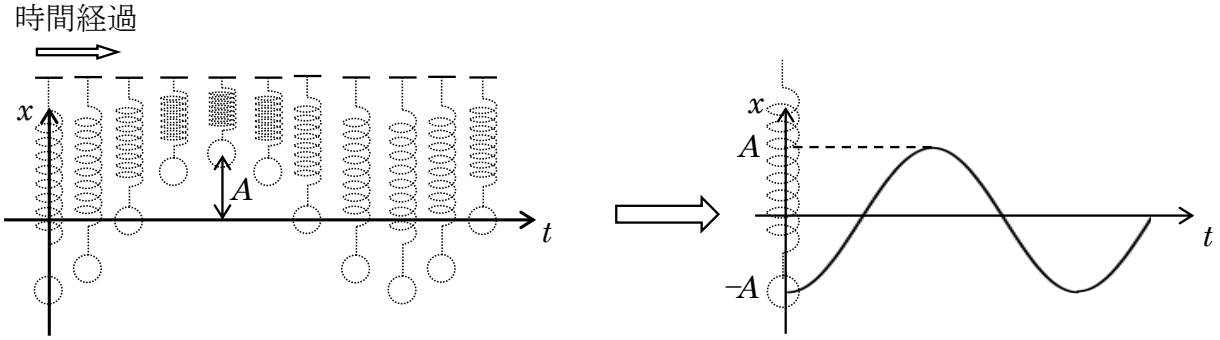
ばねを振動の中心から、下に伸ばして、静かに手を放した

左の初期条件での単振動の x–t グラフを書き、振幅を A、角振動数を ω として式も示せ。ただし、上向きを正とする。

問題 3 解答　グラフ：解説参照　　グラフの式：$x = -A\cos\omega t$

問題 3 解説

ストロボ図をイメージする要領で軌道を書くと以下のようになり、球の位置を結べば、グラフが書ける。



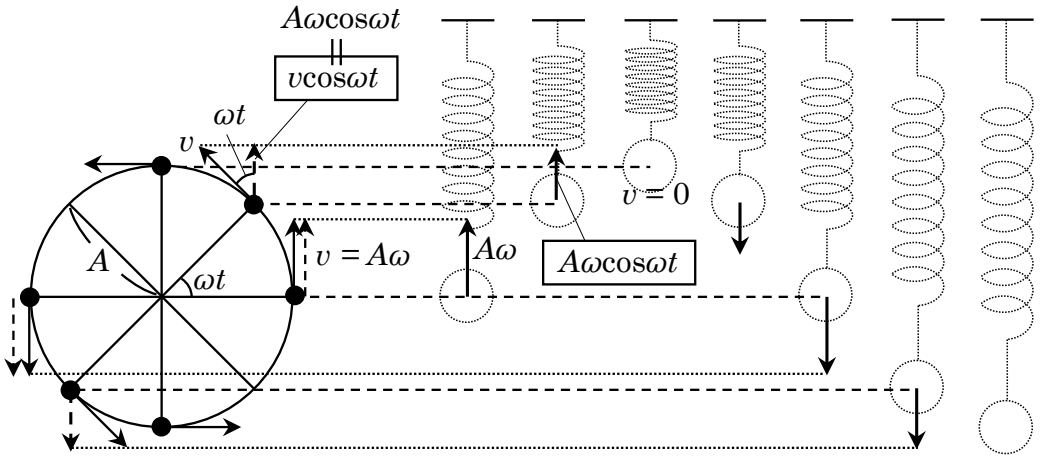
このグラフは、負に最大から始まっているので、−cos 型といえる。よってグラフの式は、$x = -A\cos\omega t$　となる。

テーマ５ 単振動の速度・加速度

等速円運動の正射影と単振動が一致することを利用して、速度や加速度を求める。

≪速度について≫

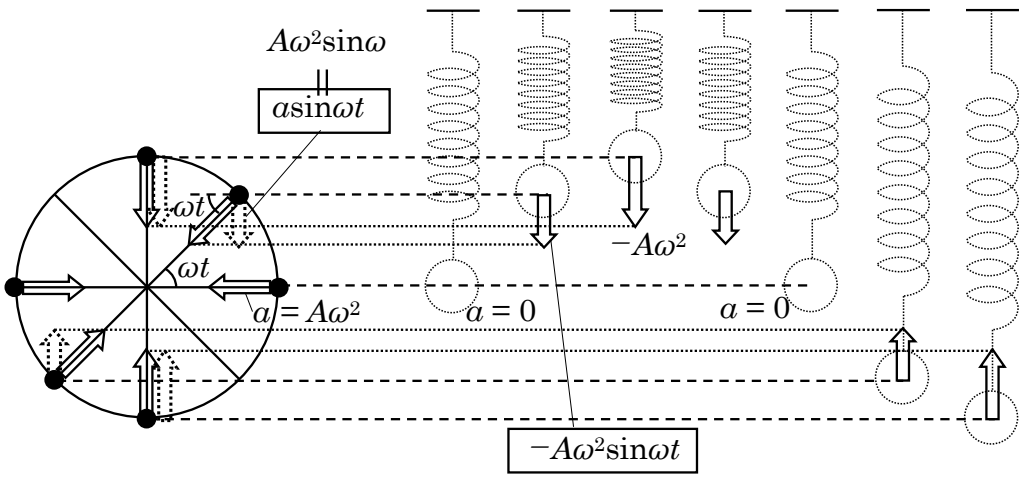
円運動の速度は $v = r\omega$（$= A\omega$）であり、円の接線方向であることに注意し、正射影をとると、それは単振動の速度になる。



このことから、$x = A\sin\omega t$ の単振動の速度の式を立てると、$v = A\omega\cos\omega t$ となる。

≪加速度について≫

円運動の加速度は $a = r\omega^2$（$= A\omega^2$）で円の中心方向であることに注意し、正射影をとると、それは単振動の加速度になる。



このことから、$x = A\sin\omega t$ の単振動の速度の式を立てると、$a = -A\omega^2\sin\omega t$ となる。

⇒重要　また、変位の式 $x = A\sin\omega t$ を加速度の式に代入すると、$a = -\omega^2 x$ といえる。

このマイナスは、単振動の変位 $x = A\sin\omega t$　が正の値をとるとき、加速度は負の向きになることを示している。中心より上にいる時は、下向きに加速度があり、中心より下にいる時は、上向きに加速度があることを確認しよう。

テーマ 6　公式の使えなさがスゴイ　その 2

単振動の変位 x の公式 $x = A\sin\omega t$ が初期条件で容易に形は変わるのと同じで、速度や加速度の式も形が変わるので、公式の暗記は意味がない。次の問題で立式の練習をしよう。

問題 4 重要　単振動の式

初期条件(1)

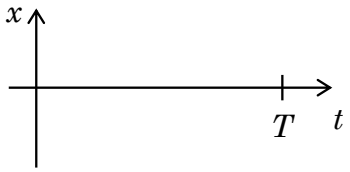
振動の中心で、
下向きの初速度
を与える

初期条件(2)

振動の中心

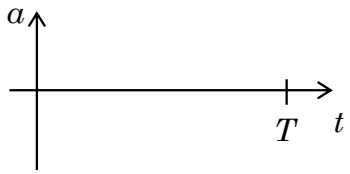
ばねを振動の中心から、下に
伸ばして、静かに手を放した。

(1) 初期条件(1)の単振動の x–t グラフ、v–t グラフ、a–t グラフを書き、振幅を A、角振動数を ω として、グラフの式も示せ。



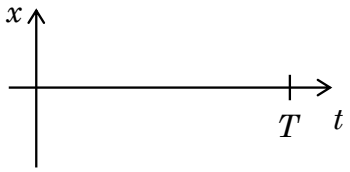
$x =$ ①

$v =$ ②



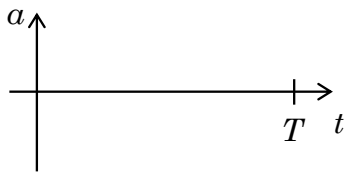
$a =$ ③　$=$ ④（x を使って）

(2) 初期条件(2)の単振動の x–t グラフ、v–t グラフ、a–t グラフを書き、振幅を A、角振動数を ω として、グラフの式も示せ。



$x =$ ⑤

$v =$ ⑥



$a =$ ⑦　$=$ ⑧（x を使って）

問題 4 解答　グラフ：解説参照

① $x = -A\sin\omega t$　② $v = -A\omega\cos\omega t$　③ $a = A\omega^2\sin\omega t$　④ $a = -\omega^2 x$

⑤ $x = -A\cos\omega t$　⑥ $v = A\omega\sin\omega t$　⑦ $a = A\omega^2\cos\omega t$　⑧ $a = -\omega^2 x$

問題 4 解説

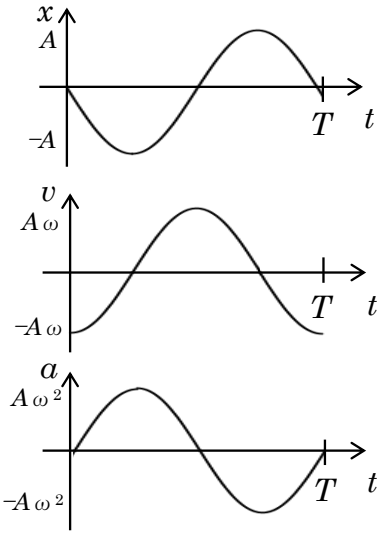
ストロボ図をイメージして、実際の球の運動と速度や加速度の正負を考えられるようになろう。特にスタート時を考えることができれば、グラフは容易に書くことができる。

(1) 位置 x　中心からスタートして、次に下に向かうことから、x–t グラフは–sin 型。

速度 v　下向きの初速度を持っているので、v–t グラフは–cos 型となる。

加速度 a　円運動の対応から考えると中心では $a=0$ であり、その後、下向きの速度を上向きに変えるので、『スタートが 0、その後、正の加速度』→ + sin 型となる。

それぞれの最大値は円運動との対応から、$x = r = A$ 、$v = r\omega = A\omega$ 、$a = r\omega^2 = A\omega^2$ であることにも注意してグラフと式を書くと以下のようになる。



$x =$ ① $-A\sin\omega t$

$v =$ ② $-A\omega\cos\omega t$

$a =$ ③ $A\omega^2\sin\omega t$ $=$ ④ $-\omega^2 x$

超重要な別解　必ずマスターしましょう

速度 v ⇒ 位置 x の変化率 ⇒ $v = \frac{dx}{dt}$、加速度 a ⇒ 速度 v の変化率 ⇒ $a = \frac{dv}{dt}$ であり、

位置 x の微分が速度 v、速度 v の微分が加速度 a ということがいえる。

この問題でも、x–t グラフを書いた後、その式を微分していけば、速度と加速度の式が書ける。

$$x = -A\sin\omega t \Rightarrow v = \frac{dx}{dt} = -A\omega\cos\omega t \Rightarrow a = \frac{dv}{dt} = A\omega^2\sin\omega t$$

数学の復習①　sin の微分は cos

数学の復習②　sin と ωt の合成関数なので合成関数の微分をする

$v = \frac{dx}{dt} = (-A\sin\omega t)' = -A\cos\omega t \times (\omega t)'$

$= -A\omega\cos\omega t$

数学の復習①　cos の微分は –sin

数学の復習②　cos と ωt の合成関数なので合成関数の微分をする

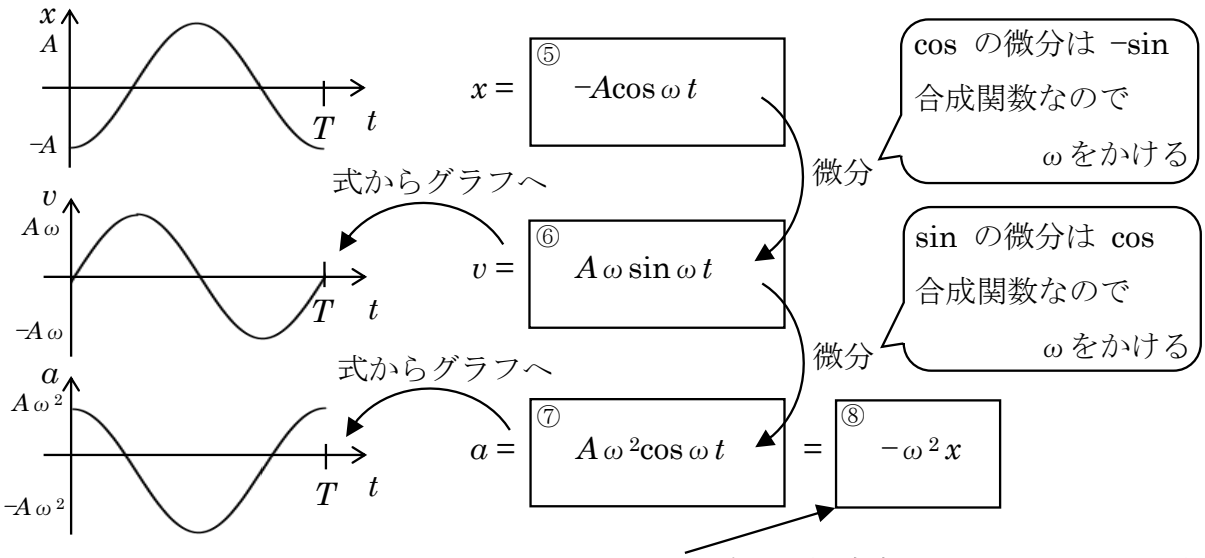
$a = \frac{dv}{dt} = (-A\omega\cos\omega t)' = A\omega\sin\omega t \times (\omega t)'$

$= A\omega^2\sin\omega t$

問題 4 解説続き

(2) 位置 x 一番下からスタートしていることから、x–t グラフは−cos 型。式は $x = -A\cos\omega t$

この問題では速度 v 加速度 a は、前問(1)別解の、微分の関係を使って考えてみる。



(1)も(2)も同じ結果。加速度 $a = -\omega^2 x$ という公式は、どんな初期条件でも成り立つ公式と言える。この手順で、$a = -\omega^2 x$ を書き出せるようになることは必須スキルなので、練習しましょう。

単振動の要素でマスターすべきことリスト

□ 初期状態で公式の形が変わるので、ストロボ図から式を書きだす。(問題 3 問題 4)

□ **振動の中心**と、**折り返し点**の特徴を把握する。(テーマ 5 問題 4)

	速度 v	加速度 a
中心	最大	0
折り返し	0	最大

□ 変位 x $\xrightarrow{\text{微分}}$ 速度 v $\xrightarrow{\text{微分}}$ 加速度 a という関係を活用する。(問題 4)

□ $a = -\omega^2 x$ はどんな初期条件でも成り立つので、書き出せるようにしておく。(問題 4)

例えば、適当な x の式として $x = A\sin\omega t$ を書き出し、

微分して $v = A\omega\cos\omega t$、これをさらに微分して、$a = -A\omega^2\sin\omega t$ と書き出す。

これに最初の $x = A\sin\omega t$ を代入して、$a = -\omega^2 x$ と書き出すことができる。

テーマ 7　単振動をする条件と周期の求め方

円運動をするには、『円の中心に向かう力が必要』という条件があったように、単振動にも『単振動をする条件』というものがある。基本的な思考の流れは以下のようになる。

① 単振動は、『振動の中心に引き戻される』ことを繰り返している運動

② よって『常に振動の中心向きに力がはたらく』なら単振動となる。これが単振動の条件。
また、このような力を『復元力』という。

③ 運動方程式 $ma = F$ に、単振動の加速度の公式 $a = -\omega^2 x$ を代入すると、$-m\omega^2 x = F$
これが復元力の大きさを示しており、この式から、次のような分析ができる。

・変位 x が正なら力 F の向きは負、変位 x が負なら力 F の向きは正、
これは、力 F が常に振動の中心向きの力であることを示す。

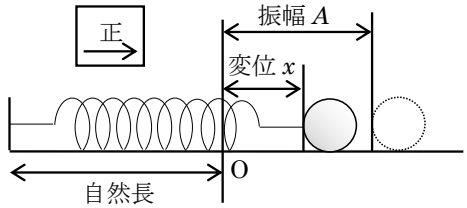
・変位 x が大きいほど、はたらく力 F が大きくなる。このような力でないと復元力にはならない。例えば、ばねなどが復元力になる。

＊ 加速度の式 $a = -\omega^2 x$ は初期条件によらず成立する式だったので、
単振動の運動方程式 $-m\omega^2 x = F$ も全ての初期条件で成立する。

復元力の式から角振動数 ω を求めることができ、そこから周期を求めることができる。

問題 5　水平ばね振り子の周期

図のように、ばね定数 k の軽いばねをなめらかで水平な台上に置き、一端を壁につけ、他端には質量 m の物体をつなぐ。自然長からばねを伸ばし、手を離すと物体は単振動をした。問題文の誘導に従い、この単振動の周期を求めよ。ただし、図の右向きを正とする。



自然長の位置を原点 O とする。
原点から x のびた点を物体が通過するときを考える。
角振動数を ω とすると、

公式より、物体の加速度 a は $a =$ ①

物体にはたらく力は、ばね定数を k とすると フックの法則 より、$F =$ ②

単振動の運動方程式 をたてると ③

これを角振動数 ω について解くと、$\omega =$ ④

周期 T の公式 $T =$ ⑤ にこれを代入すると、$T =$ ⑥ となる。

問題 5 解答　① $a = -\omega^2 x$　② $F = -kx$　③ $-m\omega^2 x = -kx$

④ $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$　⑤ $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$　⑥ $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

問題 5 解説

① 単振動の加速度の公式より $a = -\omega^2 x$

（中心より右にあるときは、加速度の向きは左なのでマイナスがつく）

② フックの法則より、$F = -kx$　（力の向きが左向きなのでマイナスがつく）

③ 運動方程式 $ma = F$ に代入して、$-m\omega^2 x = -kx$

（加速度 $a = -\omega^2 x$ の式を覚えずに、単振動の運動方程式の公式として $-m\omega^2 x = F$ を丸暗記する人もいる。好みで覚える式を選んで良い。）

④ 空欄③の式を ω について解いて、$\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

⑤ 周期の公式は $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

⑥ 空欄④の ω を空欄⑤の式に代入して、$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

（ほとんどの場合、ばね振り子の周期は $2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ なので、『2πルート上からミカン』という語呂合わせが存在する。しかし、これが成立するかしないかを判断できるようになるまでは語呂合わせに頼らずに、この問題の手順で周期を出す練習をしよう。）

テーマ 8　単振動の解法

単振動は、加速度が時間変化する運動で、運動の分析がすごく複雑である。しかし、『問題を解く』ことだけに特化すれば、パターンが少なく意外と得点できる。解法をなぞってみよう。

① どの問題でも必ずやる準備

振動の中心を見つける
そこを原点 O とする。

超重要
振動の中心は、加速度 0 の点。
よって『**力のつりあう**』点である

⇩

時間の問題はこのルート

② 復元力を立式するための特別な作図をする

振動の中心を原点として、**適当な正の位置 x に物体を配置した作図**をする。

③ はたらく力を見出し、復元力を式にする

単振動をしているなら、必ず『**−○○x**』という形の力がはたらいており、これを探し出す。そのために適当な位置 x に物体を設定した図が必要なのだ。

④ 運動方程式を立てて、角振動数ωを出す

単振動の運動方程式 $-m\omega^2 x = F$ の F に前ステップ③で式にした復元力『**−○○x**』を代入し、ωを求める。

⑤ 周期 T の公式に角振動数ωを代入する

周期の公式 $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ のωに前ステップ④で求めたωを代入し、周期 T を求めることができる。そして、T が求まれば、単振動のいろいろな時間が求められる。

時間以外の問題はこのルート

② 折り返し点がどこか考察する

折り返し点は速度が 0 であることから、

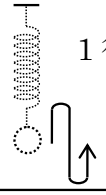
・『**静かに手を放す**』と言われれば
　→**その地点が折り返し点。**

・『**初速度 v_0 がある**』と言われれば
　→**エネルギー保存則で $v = 0$ になる位置を求める。**

・振動の中心から、両端への折り返し点が対称的になることも、よく使うので、頭に入れておこう。

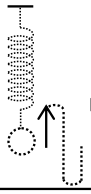
③ 問題で聞かれている数値を求める

折り返し点がどこかわかった後なら、**通常の運動方程式**や**力学的エネルギー**など、今までの力学の理論で求めることができることがほとんどである。
単振動の特別な解法がある訳ではない。



1 往復は T

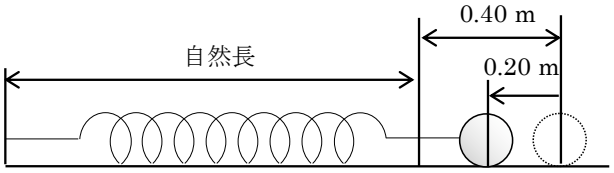
中心からスタートして、
最初に戻ってくるまでは $\dfrac{T}{2}$



中心から端までは $\dfrac{T}{4}$

問題 6　水平ばね振り子

ばね定数 5.0 N/m の軽いつる巻きばねを、なめらかな水平面上におき、一端を固定し、他端に質量 0.20 kg の小球をとりつける。小球を水平方向に距離 0.40 m だけ引いてからはなすと小球は単振動をする。



(1) この単振動の振幅はいくらか。

(2) 小球の速さの最大値はいくらか。

(3) 手を放してから 0.20 m 移動したときの球の速さはいくらか。

(4) この単振動の加速度の最大値はいくらか。

(5) 振動の周期 T を求めよ。

(6) 手を放してから、初めて振動の中心を通過するまでの時間はいくらか。

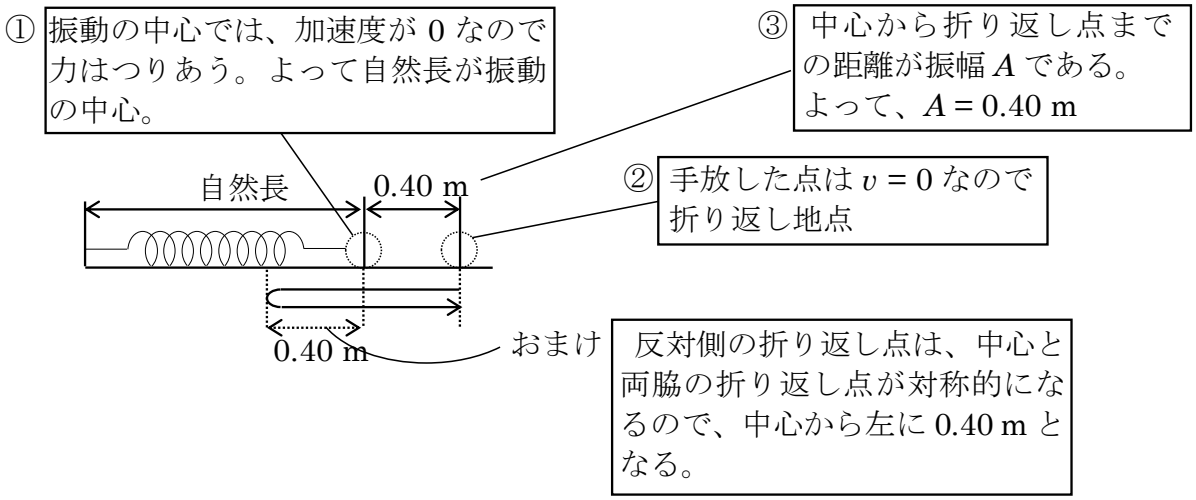
(7)難 手を放してから、0.20 m 動くまでの時間 t はいくらか。

問題 6 解答　(1) 0.40 m　(2) 2.0 m/s　(3) 1.7 m/s　(4) 10 m/s²

(5) $\frac{2}{5}\pi$〔s〕　(6) $\frac{1}{10}\pi$〔s〕　(7) $\frac{1}{15}\pi$〔s〕

問題 6 解説　前ページの解法のマスターをこの問題で目指そう。

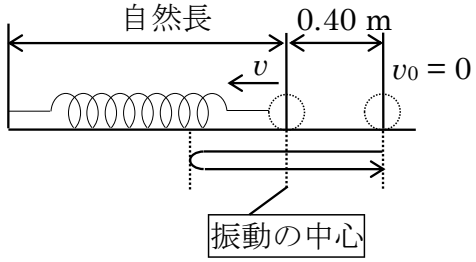
(1) まずは、問題に入る前に、**振動の中心**を見つける。その後、**時間以外**の問題なので、折り返し点を探る。



①→②→③の流れから、振幅 A は 0.40 m とわかる。

問題６解説 続き

(2) v が最大となるのは、振動の中心を通過するときである。これは、単振動の特徴である。右図の２箇所で力学的エネルギー保存則の式を立てると、



$$\underbrace{\frac{1}{2}m\times 0^2+\frac{1}{2}kx^2}\quad=\quad\underbrace{\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}k\times 0^2}$$

（スタート点の力学エネ）＝（振動の中心での力学エネ）

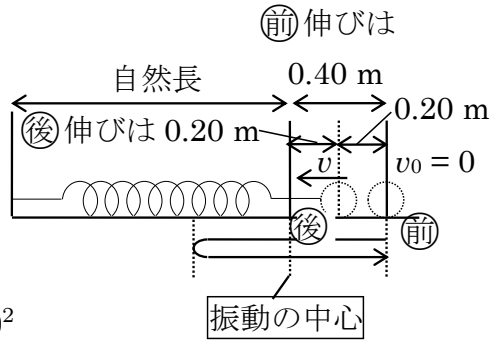
値を代入して、

$$0+\frac{1}{2}\times 5.0\times 0.40^2=\frac{1}{2}\times 0.20\times v^2+0$$

$v^2 = 4.0$

$\therefore\ v = 2.0$ m/s

(3) 指定された位置で力学的エネルギー保存則を立てる。



前　＝　後

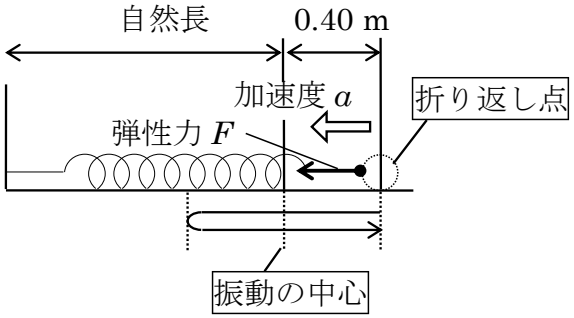
$$\frac{1}{2}m\times 0^2+\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx'^2$$

$$0+\frac{1}{2}\times 5.0\times 0.40^2 = \frac{1}{2}\times 0.20\times v^2+\frac{1}{2}\times 5.0\times 0.20^2$$

$v^2 = 3.0$

$\therefore\ v = \sqrt{3} \fallingdotseq 1.7$ m/s

(4) 加速度が最大となるのは、折り返し地点である。これは単振動の特徴である。
折り返し点ではたらく力を見出し、通常の運動方程式を立てればよい。
はたらく力は、弾性力 F のみである。



（重力と垂直抗力もはたらくが、鉛直方向で打ち消しあっている。）

フックの法則『弾性力 $F = kx$』より

弾性力 $F = 5.0$ N/m $\times 0.40$ m $= 2.0$ N

よって、運動方程式を立てると、

$ma = F$

$0.20\times a = 2.0$　　$\therefore\ a = 10$ m/s^2

＊これは、通常の運動方程式であることがポイント。

単振動の運動方程式 $-m\omega^2 x = F$ は、**時間関係の問題**でのみ登場する。慣れるまでは意識して、**時間の問題**か、**それ以外の問題**か、という区別をしよう。

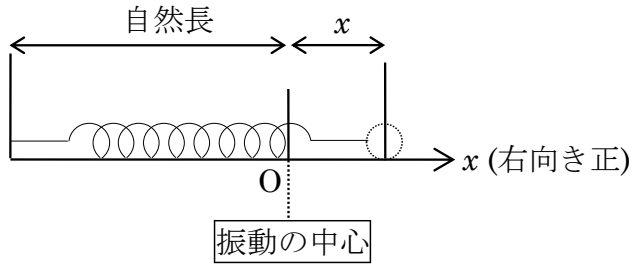
(5) 時間を聞かれる問題なので、今までの問題とは方針が大きく違う。解法ページを参考にして、１つずつこなしていこう。

STEP① 振動の中心を見つけて、そこを原点 O とする

振動の中心は、つりあいの点なので、自然長の位置である。そこを原点 O とする。

STEP② 復元力を立式するための特別な作図をする

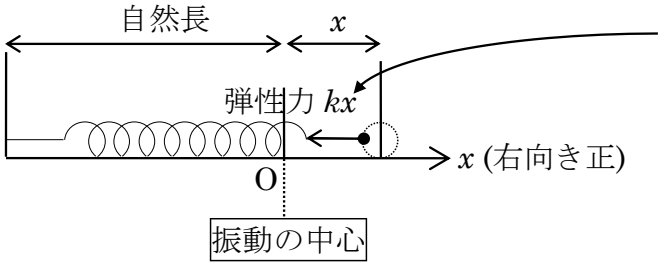
適当な正の位置 x に物体があるときの作図を行う。下図のようになる。



この作図をせよ、という指示を問題で誘導されることは少ないので、意識的に書けるようにしよう。

STEP③ はたらく力を見出し、復元力を式にする

はたらく力を見出すと、負の向きに kx の力がはたらいているとわかる。



復元力は、

・変位 x の向きと逆向きに

・変位 x に比例する力

であり、『$-$〇〇x』という形のはず。

今回は、この作図より『$-kx$』が復元力となっているとわかる。

STEP④ 運動方程式を立てて、角振動数 ω を出す

単振動の運動方程式 $-m\omega^2 x = F$ の F に STEP③で求めた復元力を代入すると、

$$-m\omega^2 x = F$$

$$-0.20\times\omega^2\times x = -5.0\times x$$

これを ω について解いて

$$\omega^2 = 25 \qquad \therefore\ \omega = 5.0$$

STEP⑤ 周期 T の公式に角振動数 ω を代入する

周期の公式 $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ の ω に、前ステップで求めた角振動数を代入し T を求めると、

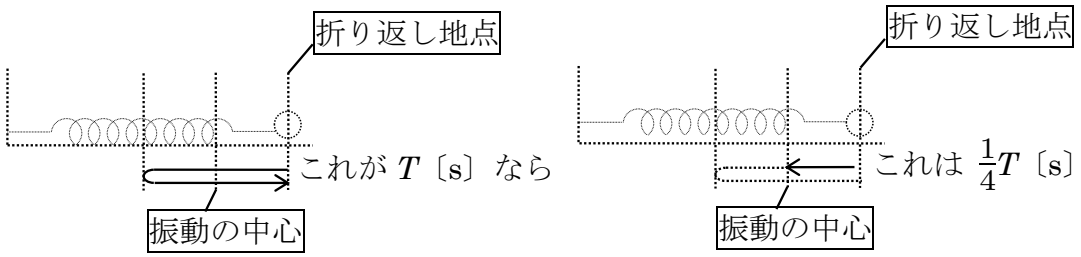
$$T = \frac{2}{5}\pi$$

＊(2) (4)の別解　ここで、角振動数 ω が 5.0 とわかると、速度の最大値は $A\omega$、加速度の最大値は $A\omega^2$ という単振動の特徴から(2)や(4)を求めることもできる。しかし、使いどころが最大値に限られてしまうので、この方法はあまり使わない方針にしておいた方が良い。

問題 6 解説 続き

(6) 前問(5)で求めた周期 T を使って求めることができる。

運動の対称性から

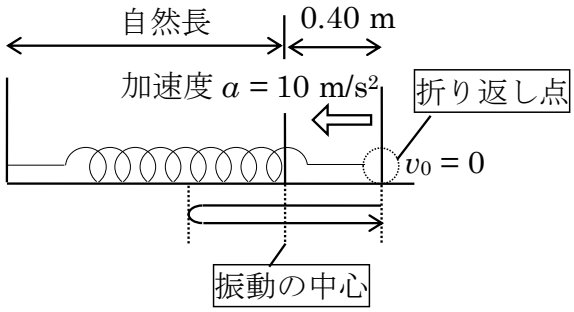


よって、初めて振動の中心を通過するまでの時間は

$$\frac{1}{4}T = \frac{1}{4}\times\frac{2}{5}\pi = \frac{1}{10}\pi \text{〔s〕}$$

(6)のよくある間違い例

前問(4)で折り返し点の加速度を 10 m/s² と求めているので、それを右図のように書き込んでみる。



ここで、折り返し点→中心、までの移動にかかる時間を t として、

等加速度運動の公式 $x = v_0t + \frac{1}{2}at^2$ より

$$0.40 = 0 + \frac{1}{2}\times 10\times t^2$$

これを t について解いて、

$$t = \sqrt{0.080}$$

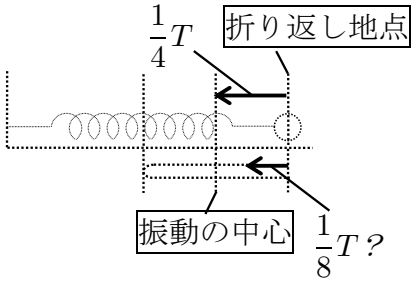
この解き方は誤りなのである。

単振動は位置によって加速度が変化するので、等加速度運動ではない。なので、

$x = v_0t + \frac{1}{2}at^2$　などの等加速度運動の 3 公式は全て使えないのだ。

単振動で時間を聞かれたら、周期 T を出すのが最初の一歩であると考えよう。

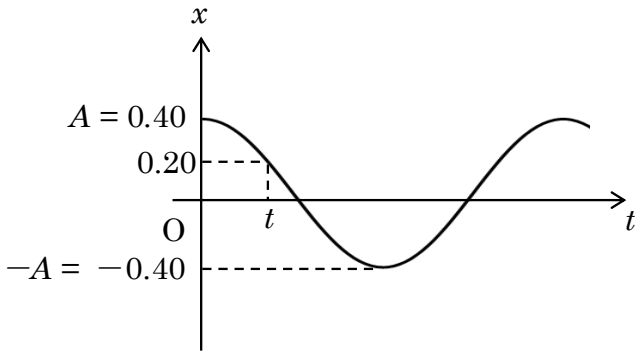
(7) この問題のように、中途半端な位置までの時間を聞く問題の出題頻度はすごく低い。参考程度に見ておこう。



折り返し地点から、振動の中心までが$\frac{1}{4}T$なので、その半分の$\frac{1}{8}T$〔s〕、とするのは誤りなので注意!!

折り返し→中心、までの移動を半分に分けたとき、最初は速度がゆっくりで、後半は速い、というように、対称性がなく、ちょうど半分の時間で、半分の位置を通過する訳ではないのだ。

中途半端な地点までの時間は、グラフを書いて考える。$x-t$ グラフを書くと、



左図のように、最大値 0.40 の+cos 型のグラフになる。

前問(5)で求めた $\omega = 5.0$ を活用して、グラフの式を書くと $x = +0.4\cos 5t$ となる。

ここで、$x = 0.20$ となる時刻を聞かれているので、

$$0.20 = 0.4\cos 5t$$

となるときの t を求めればよい。

t について解くと、

$$\cos 5\mathrm{t} = \frac{1}{2}$$

ここで、初めて $\cos\theta = \frac{1}{2}$ となるのは $\theta = \frac{1}{3}\pi$ のときなので、

$$5t = \frac{1}{3}\pi$$

$\therefore\ t = \frac{1}{15}\pi$〔s〕と求めることができる。

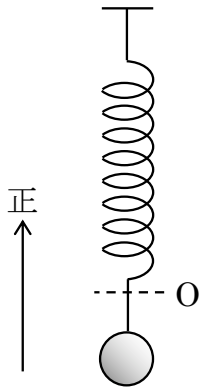
ConcepTest 1　つりあいの意味

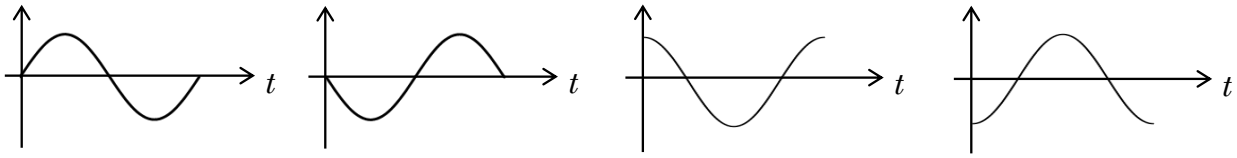
力のつりあいと、物体の挙動に関して正しく説明しているものを選び、A、B、C の記号で答えよ。

A. 力がつりあっているとき物体は必ず静止している
B. 力のつりあいの条件を満たすために物体が静止している必要はない
C. 物体の速度が 0 ならば、力はつりあいの状態にある

ConcepTest 2　単振動のグラフ

天井にばねを接続し、物体をくくりつけ、静止させた。静止した点からさらに少しだけ物体を引き下げ、静かに手をはなしたところ、物体は単振動を行った。静止していた点を原点 O、手を離した瞬間を $t = 0$ とする。原点 O からの変位 x、速度 v、加速度 a と時間 t の関係を示したグラフをそれぞれ選べ。ただし、上向きを正とする。





ア　　イ　　ウ　　エ

ConcepTest 1 解答　B

ConcepTest 1 解説

A に関して：力がつりあっていても、加速度が 0 なだけで、初速度を持っていたら、等速直線運動をおこなう。

(例：摩擦のない氷の上を等速ですべる物体は、力がつりあっているのに運動している)

B に関して：A の説明で記した通り、運動していても力がつりあっている状況はあり得る。『力のつり合い ⇒ $a = 0$』という関係なのだ。v は関係ない。単振動の中心では、力がつりあっているが、速度が最大となっている。

C に関して：物体の速度が 0 ⇒ 力がつりあう、という訳ではない。単振動が例として挙げられる。単振動の折り返し点では、速度が 0 だが、働く力は最大になっている。

ConcepTest 2 解答　x：エ　v：ア　t：ウ

ConcepTest 2 解説

変位 x は最初、負に最大の点からスタートしているので、−cos 型。よってエ。
速度 v は最初、0 から始まり、正の速度を得るので、+sin 型。よってア。
加速度 a は最初、正に最大の点からスタートしているので、+cos 型。よってウ。

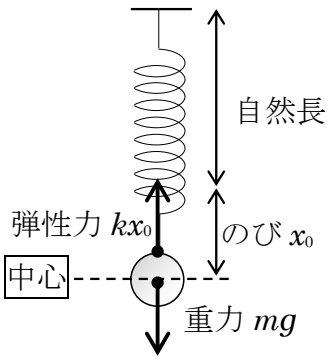
単振動のグラフを書くときは、$t = 0$ の時の分析が鍵!!

変位 x の式を微分していくことで、速度 v と加速度 a のグラフの式を求めて形を求めてもよい。

テーマ 9　鉛直ばね振り子

鉛直につるしたばねにつけたおもりを、少し引っ張って放すと、単振動をする。このときの、振動の中心、復元力、振幅を穴埋め形式で分析していこう。

≪振動の中心について≫



振動の中心は、① [　　] が 0 となる点である。

よって、力が ② [　　] 点が振動の中心となる。

鉛直につるしたバネにつけたおもりにはたらく力は、左図のように、重力と弾性力である。これがつりあうところが振動の中心なので、

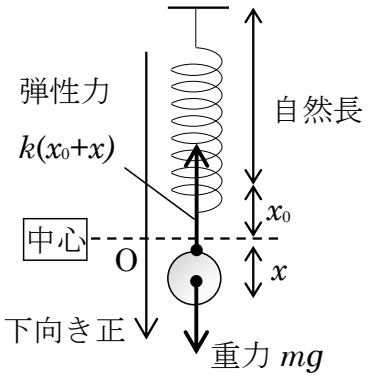
③ [　　] という式を立てられ、

x_0 = ④ [　　] だけバネがのびたところが振動の中心だとわかる。

≪復元力と周期について≫

周期を求める際には、復元力を求めて、運動方程式を立てる必要がある。ここで、ポイントとなるのは、復元力は『－○○x』という形にならなければいけないことである。

水平ばね振り子のときと同じステップを踏んで、復元力を考察してみよう。



STEP① 振動の中心を見つけて、そこを原点 O とする

振動の中心は、つりあいの点なので、先ほど求めた x_0 のびた位置が振動の中心で、そこを原点 O とする。

STEP② 復元力を立式するため特別な作図をする

適当な正の位置 x に物体があるときの作図を行う。左図のようになる。

STEP③ はたらく力を見出し、復元力を式にする

はたらく力を見出すと、弾性力と重力がはたらき、

合力 F = ⑤ [　　] となる。

ここで、≪振動の中心について≫の項目で立式した $kx_0 = mg$ を代入すると、

合力 F = ⑥ [　　] となり、復元力の形『－○○x』の形になる。

穴埋めの解答

① 加速度　② つりあう　③ $kx_0 = mg$　④ $x_0 = \dfrac{mg}{k}$　⑤ $-k(x_0 + x) + mg$　⑥ $-kx$

STEP④ 運動方程式を立てて、角振動数ωを出す

単振動の運動方程式 $-m\omega^2x=F$ の F に STEP③で求めた復元力を代入すると、

$$-m\omega^2x=F$$

$$-m\omega^2x=-kx$$

これをωについて解いて

$$\omega^2=\frac{k}{m}\qquad\therefore\ \omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

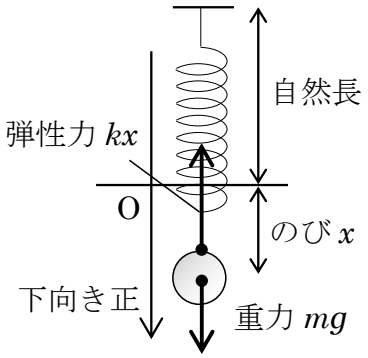
STEP⑤ 周期 T の公式に角振動数ωを代入する

周期の公式 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$ のωに、前ステップで求めた角振動数を代入し T を求めると、

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

鉛直ばね振り子でも『2πルート上からみかん』になるのだ。

発展 自然長の位置を原点Oにすると？



自然長の位置を原点Oとすると、変位 x がそのままばねの伸びとなり、はたらく力は、$F=-kx+mg$　となり、

これは『－○○x』という形ではなく、『－○○x＋□□』という形になっている。

こうなると、

単振動の運動方程式 $-m\omega^2x=F$ の F に $-kx+mg$ を代入することになり、x が消えずに、ωを計算出来ない。これは、左辺の加速度部分の『$-\omega^2x$』の x は、**振動の中心からの変位**なのに対し、右辺の力 F の『$-kx+mg$』の x は**自然長からの変位**であるから、ズレが出てしまっているのである。

このようなミスをしないために、**どの問題でも振動の中心を原点Oとして、図を書くようにしよう**。

ただし、問題の誘導で、**自然長の位置を原点O**とされる場合がある。（セミナーP116 229など）

その場合は、以下のように解釈しよう。

（＊この解釈は、単振動の定期試験を終えた後くらいじゃないと、理解が難しいと思います。後回しで良いです。）

$F=-kx+mg$ を、$F=-k\left(x-\dfrac{mg}{k}\right)$ と変形　　＊『$-$○○($x-$ 定数)』という形を目指す。

そして、**振動の中心 x_0** は $F=0$ となる点なので、$x_0=$ 定数 となるときで、$x_0=\dfrac{mg}{k}$ と求まり、

運動方程式を立てるときは、定数部分を勝手にカットして $-m\omega^2x=-kx$ と立式する。

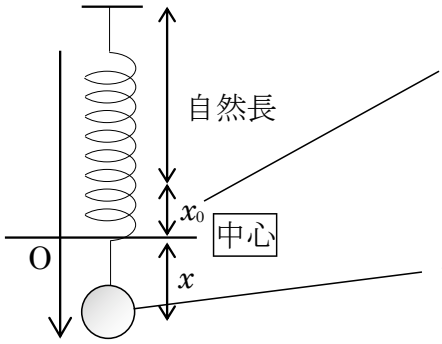
定数部分を勝手にカットしてしまったが、これを正確に示すと、

$-m\omega^2(x-x_0)=-k\left(x-\dfrac{mg}{k}\right)$、という立式が正しく、$x_0=\dfrac{mg}{k}$ という関係から、変位部分を消すことができて、$-m\omega^2=-k$　という同じ結論を導く形となる。

≪振幅≫

振幅は『①振動の中心から、折り返し点までの距離』『②折り返し点は、速度が 0 の点』というポイントから考える。

モデル　振動の中心から x だけ下げて、静かに手を放した



振動の中心はつりあいの点なので、$mg = kx_0$

(この式は後で使う)

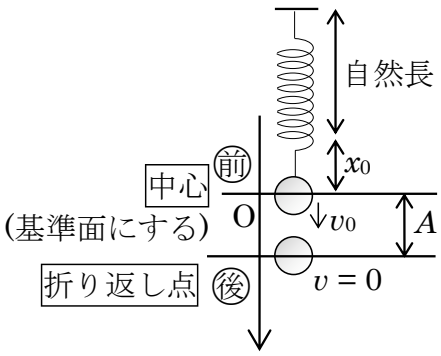
静かに手を放したら

放した場所が速度 0

よって、放したところが折り返し点 ⇒ 振幅 $A = x$

上のように、静かに放した場合は、難しい計算もなく簡単である。やっかいなのは、初速度が与えられている場合で、この場合は、エネルギー保存則を立て、速度が 0 の場所を求めなければいけない。鉛直方向での運動なので、『運動エネルギー』『弾性力による位置エネルギー』の 2 つに加えて、『**重力による位置エネルギー**』に関しても考えなければいけなくなる。

モデル　振動の中心から下向きに初速度 v_0 を与えた



左図のように、振動の中心から、折り返し点までの距離が、振幅 A であると作図でき、振動の中心を重力による位置エネの基準面としたら、力学的エネルギー保存則の立式は以下のようになる。

⑦

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{前} = \underbrace{\qquad\qquad}_{後}$$

これを A について解く。このページの上部で出した式、$mg = kx_0$ を代入して、mg を消去

⑧

$$\qquad\qquad = \qquad\qquad$$

これを A について解くと ⑨ $A =$ 　←必ず 1 回は自分で計算すること

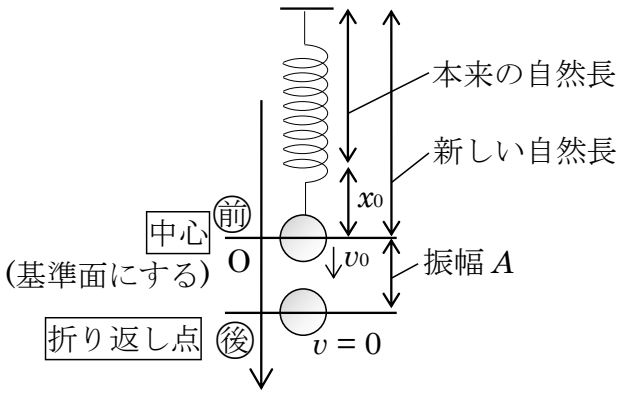
穴埋めの解答

⑦ $\frac{1}{2}mv_0^2 + 0 + \frac{1}{2}kx_0^2 = 0 + (-mgA) + \frac{1}{2}k(x_0 + A)^2$　⑧ $\frac{1}{2}mv_0^2 + 0 + \frac{1}{2}kx_0^2 = 0 + (-kx_0A) + \frac{1}{2}k(x_0 + A)^2$

⑨ $A = v_0\sqrt{\frac{m}{k}}$

鉛直方向の力学的エネルギー保存の式を解くと、このように計算が大変になるが、これを劇的に楽にする**裏ワザ**がある。それが『復元力による位置エネルギー』という考え方である。

『復元力による位置エネルギー』というのは、振動の中心をバネの自然長として考えて計算する位置エネルギーで、このようにすると、**重力の要素を無視して良くなる**。
重力のエネルギーと弾性力によるエネルギーを合体させたものが、復元力の位置エネルギー、というイメージである。
では、裏ワザを使って、折り返し点を求める立式をしてみよう。



左図のように、振動の中心までを新しい自然長として、力学的エネルギー保存則の立式をすると、重力の要素を無視して良くなる。

本来の自然長とのずれである、kx_0 の部分が重力の分を打ち消しているのだ。

これを用いて立式すると、

前(運エネ＋復元エネ)=後(運エネ＋復元エネ)

⑩ =

これを A について解けば、

$A = v_0\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ となる。計算がすごく楽になる。

Point

新しい自然長にする

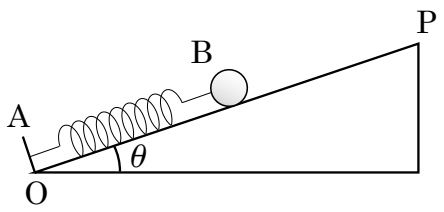
→重力のない世界になる！！

穴埋めの解答

⑩ $\dfrac{1}{2}mv_0^2 + 0 = 0 + \dfrac{1}{2}kA^2$

問題 7　斜面上のばね振り子

図のように、水平面から角度 θ をなすなめらかな斜面 OP がある。自然の長さが l でばね定数 k のばねの A 端を斜面の下端 O に固定し、ばねの上端 B に質量 m の小球を固定した。重力加速度の大きさを g とする。ただし、小球と斜面の間の摩擦および、空気抵抗はないものとし、ばねの質量と、小球の大きさは無視してよい。



(1) 小球を静止させたところ、ばねの自然の長さ l から a だけ縮んだ位置でつりあった。a の大きさを求めよ。

(2) (1)の小球の静止位置から、小球を斜面にそって距離 b だけ押し下げて手をはなすと、小球はばねの上端 B から離れることなく斜面にそって振動運動を続けた。

(a) 斜面上向きを x 軸正の向きとして、小球がつりあいの位置から変位 x にあるとき、小球にはたらく力を k、x を用いて表せ。

(b) 振動運動をする小球の周期 T はいくらか。

(c) 小球が最も高い位置にあるとき、小球のつりあいの位置からの変位はいくらか。

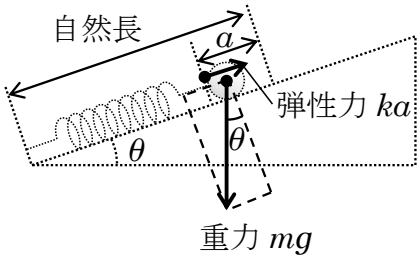
(d) 小球の振幅 A はいくらか。

(e) 小球の最大の速さ v_{max} を、θ、a を用いずに表せ。

問題 7 解答 (1) $a = \dfrac{mg\sin\theta}{k}$　(2) (a) $-kx$　(b) $2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$　(c) b　(d) b　(e) $\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,b$

問題 7 解説 単振動の解法をベースに、復元力の位置エネルギーの考え方もミックスして解いていこう。

(1) 力を書き出し、斜面と平行方向の力でつりあいの式を立てよう。



物体にはたらく力は、重力、垂直抗力、弾性力、の 3 つである。左図では、垂直抗力は省略している。

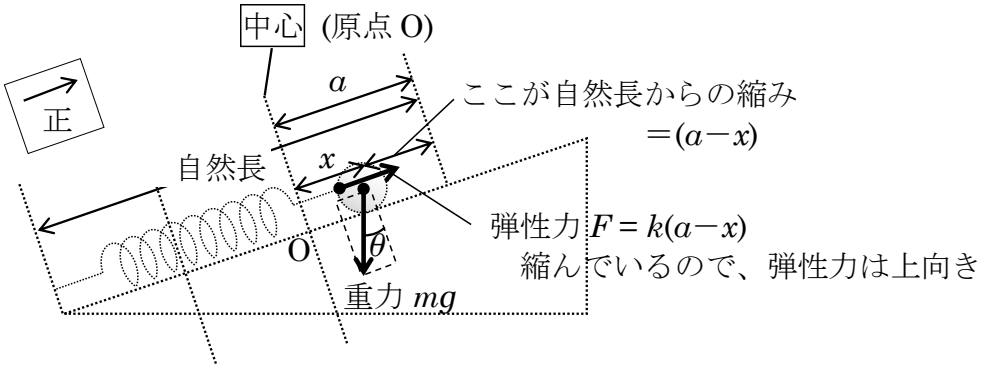
斜面平行方向のつりあいより

$ka = mg\sin\theta$　… ①式とする

$\therefore a = \dfrac{mg\sin\theta}{k}$　と a が求まる。

(2)

(a) この問題(a)は、時間に関する解法の STEP② 復元力を立式するための特別な作図をする、STEP③ はたらく力を見出し、復元力を式にする、というのを誘導してくれている問題である。



適当な正の位置 x に球をおいた作図を行うと上図のようになる。つりあいの位置が原点であることと、正の向きに気をつけて、合力を式にすると、

$$F = k(a-x) - mg\sin\theta$$

展開して

$$F = ka - kx - mg\sin\theta$$

前問(1)の①式 $ka = mg\sin\theta$ を代入すると、

$$F = mg\sin\theta - kx - mg\sin\theta$$

$$F = -kx$$

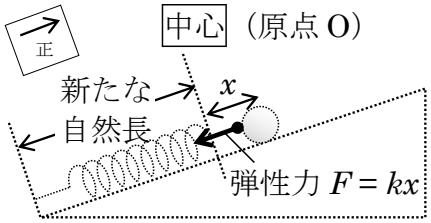
となる。『−○○x』という形になり、これが復元力であると言える。

＊ 次ページの最初に、この問題の重要な別解を紹介しています。必ず読んでおきましょう。

問題 7 解説続き

(2)(a) 別解　単振動の裏ワザの拡大

裏ワザとは、『P24 復元力の位置エネルギー』で出てきた、振動の中心を自然長としたら、重力の要素を無視してよくなる、というものだ。



左の図は、振動の中心を新たなばねの自然長と考えている。

すると、ばねは伸びていると判断できて、弾性力は負の向きであり、大きさは kx となる。

これが、(a)の解答 $-kx$ と一致する。

前ページの裏技なし版と、違いを見比べましょう。

復元力による位置エネルギーを考える要領で、**自然長の位置を変える裏ワザ**を使うと、

『エネルギー保存の立式で重力の要素を無視してよくなる』に加えて、

『力の書き出しの場面でも重力を無視してよくなる』のである

裏ワザ適用後は、重力がない世界になったと考えてよいのだ！

(b) 周期の解法の STEP④ 運動方程式を立てて、角振動数 ω を出す、STEP⑤ 周期 T の公式に角振動数 ω を代入する、を行う問題である。

単振動の運動方程式 $-m\omega^2 x = F$ の F に前問(2)(a)で求めた F を代入して、

$-m\omega^2 x = -kx$

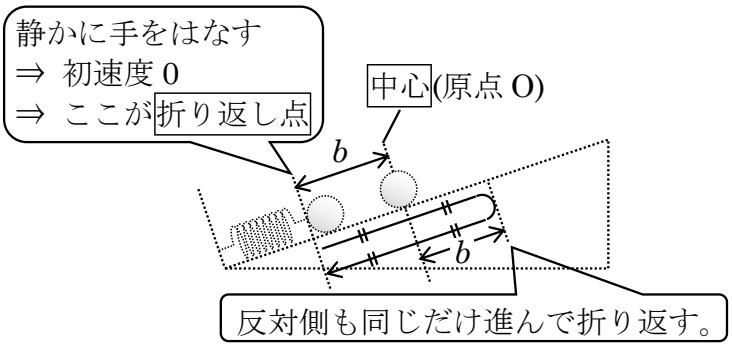
ω について解いて、

$\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

周期の公式 $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ に、この ω を代入して、

$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$　　斜面の単振動でも『2 π ルート上からみかん』が成立するのだ。

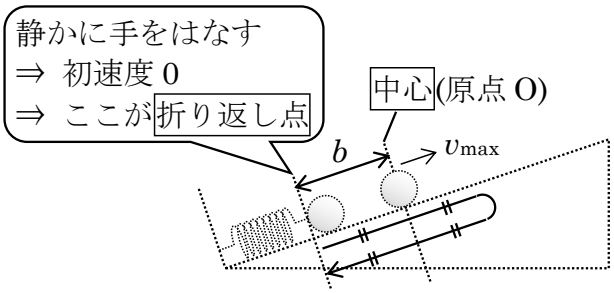
(c) この問題は**時間以外**の問題なので、(b)までの問題から、頭を切り替える必要がある。



めんどくさがらずに作図をしなおすことが大切。中心と折り返し点を**強調した作図**をしよう。振動の中心から b だけ引き下げて、静かに手をはなす、ということから左のような図がかける。このことから、最も高い位置のときの変位は b であるといえる。

(d) 振幅 A は前問(c)で整理した情報から $A = b$ と即答できる。

(e) 速度を聞く系の問題は力学的エネルギー保存則で解いていける。速度が最大になる点は、振動の中心を通過するとき、なので、そこで力学的エネルギー保存則を立てよう。



振動の中心を『新たな自然長』とする裏ワザを使って、重力の要素を無視してよい状態にして、力学的エネルギー保存の式を立てると、

前(運エネ＋復元エネ)=後(運エネ＋復元エネ)

$$0 + \frac{1}{2}kb^2 = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 + 0$$

$v_{\max}^2$について解いて

$v_{\max} = \sqrt{\frac{k}{m}}\,b$　　となる。

(2)(e) 重要じゃない別解

速度の最大値は、$v_{\max} = A\omega$ と計算できるので、(b)で求めた $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ と、(d)で求めた $A = b$ より、$v_{\max} = \sqrt{\frac{k}{m}}\,b$ と求めることができる。この解き方は、最大値しか出せないので、メインの解き方にはしないようにしましょう。見直しのために使う程度が良いです。

Point ～水平方向じゃない単振動まとめ～

① 必ず問題を解き始める前に、**振動の中心を見極める。**

⇒振動の中心は『力のつりあう点』

② 単振動の**変位 x は、『振動の中心からの距離』**で考える。中心を原点とする。

⇒めんどくさがらずに、何種類も作図するつもりで問題を解こう

③ 『振動の中心を自然長とする裏ワザ』を使うと、**重力の要素を無視できる。**

⇒エネルギー保存のときも、力の見出しのときも、裏ワザは成立

単振動は、他の分野に比べて、作図の種類や、書き直しの頻度が多いので、問題の練習がたくさん必要である。同じ問題も日を分けて 4～5 回は解かないと身につかないと思っておきましょう。

ConcepTest 3　単振動の特徴

10 kg のおもりをバネにつけ、天井から吊り下げたところ、床から 1.0 m の高さで静止した。おもりを卵のすぐ上につくようにばねを引き下げて手を離すと、重りは引き上げられ、ばねの縮みが最大になったところから再度落下する。この後、どうなるか適切なものを答えよ。

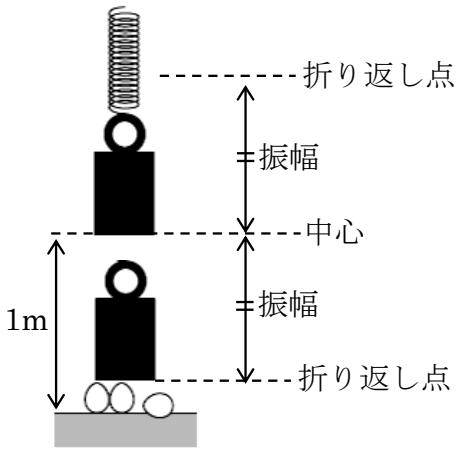
(ア) 卵のまぁまぁ上の位置でおもりは止まる
(イ) 卵ギリギリの高さまでおもりが落ちてくるが、卵には当たらない
(ウ) 卵は割れてしまう

ConcepTest 3 解答　イ

ConcepTest 3 解説

卵のすぐ上で手を離すと、そこで $v = 0$ となり、そこが単振動の折り返し点となる。つまり、手を離した位置までしか物体は落ちてこないので、卵のぎりぎりの高さまでは落ちてくるが、衝突はしない。よってイ。

ちなみに最初に静止していた床から 1m の高さの点が振動の中心となる。



ここまで上昇して折り返す

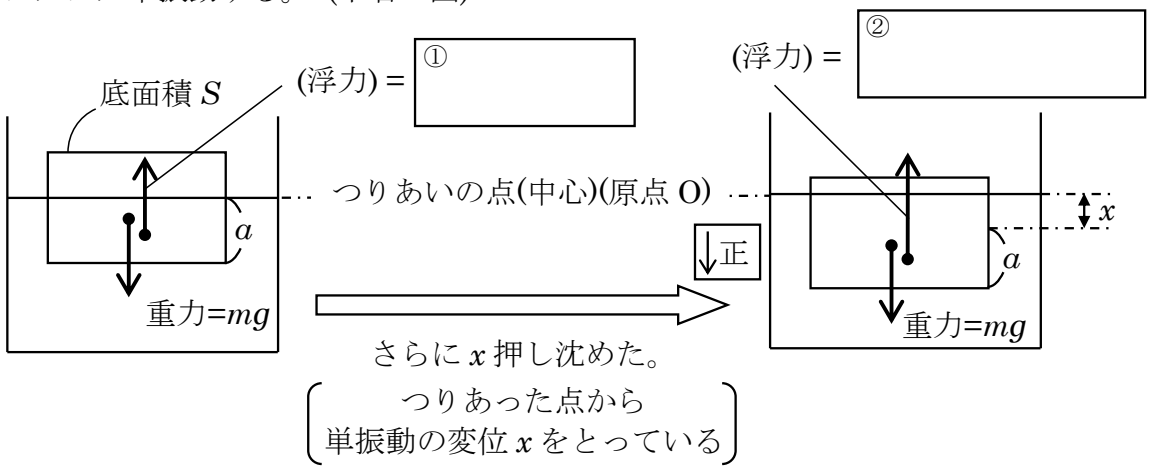
中心と折り返し点を見極め、どんな単振動を行うか判断できるようになろう。

テーマ 10　仮想のばねを作り出す　～復元力の比例定数 K～

例えば、水中に浮かべた木片をさらに押し込んで手離したとき、木片は水面あたりでプカプカする。これはまさに単振動である。単振動しているということは、木片には、『－○○x』という力がはたらいているはずである。このモデルを穴埋め形式で分析してみよう。

まず、密度 ρ の液体に、質量 m、断面積 S の木片を浮かべ、物体が a だけ沈み、静止したとする。このとき、物体は静止しているので、はたらく力はつりあっている。(下左の図)

つりあって静止したところから、さらに x だけ押し沈め、手を静かに離すと、木片は上下にプカプカ単振動する。 (下右の図)



左図のときは力がつりあっており、つりあいの式を立てると、

③
=

右図のように、適当な変位 x で物体にはたらく力を考えると、その合力 F は

④
$F =$

この式を展開して、穴埋め③のつりあいの式 $mg = \rho Sag$ を代入すると

⑤
$F =$

これは『$-$○○x』という形なので復元力としての性質を持っており、単振動の条件を満たしているといえるのだ。

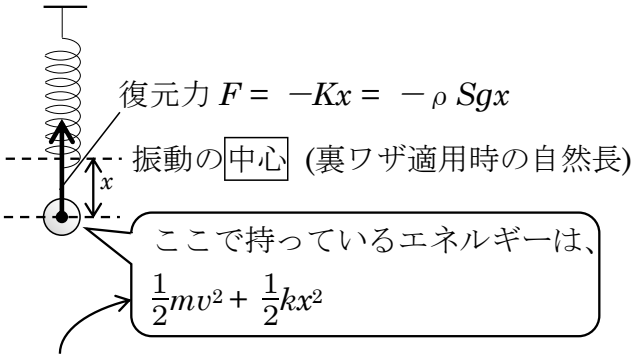
穴埋めの解答

① (浮力) $= \rho Sag$　　② (浮力) $= \rho S(a+x)g$　　③ $mg = \rho Sag$

④ $F = -\rho S(a+x)g + mg$　　⑤ $F = -\rho Sgx$

前ページのことから、水中に浮かぶ物体が浮力により単振動をするとき、復元力が$-\rho Sgx$だということが分析でき、これは$\boxed{\text{ばね定数 } K}$がρSgのときの単振動と同じ状況だといえる。

浮力の単振動と同じ力のかかり方をばねで再現した図



浮力による単振動は、ばね定数 $K = \rho Sg$ のばねを仮想することで、鉛直ばね振り子のように考えることができるのだ。

単振動で速度を出す時など『力学的エネルギー保存則の式を立てる』とき、『浮力による位置エネルギー』というものはなく、浮力の場合にどう立てていいかよくわからなくなる。そこで『ばね定数 $K = \rho Sg$ のばねによる単振動』、と考えれば、『復元力による位置エネルギー』を用いて、エネルギー保存の式を立てられるのだ。

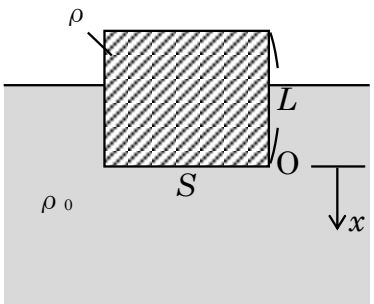
Point

『復元力 ＝ －○○x』の形を見極めた時、『○○』の部分がばね定数 K となる**『仮想のバネ』**を考えると、ばね振り子と同様に考えることができる。

＊ この○○の部分を『単振動の比例定数 K』または、『復元力の比例定数 K』といったりする。文字は大文字の K を用いる。

問題 8　浮力による単振動

図のように、長さ L、断面積 S、密度 ρ の円柱の木片が、密度 ρ_0 の水に浮いて静止している。底面は常に水面に平行であり、重力加速度の大きさを g として、各問いに答えよ。



(1) 水面から木片の底面までの長さはいくらか。

木片を d だけ押しさげ、静かに離すと、木片は単振動を始めた。木片が振動しても、水位に変動はなく、また、水や空気の抵抗は無視できるものとする。

(2) 静止状態の物体の底の位置 O を $x = 0$ とし、鉛直下向きに x 軸をとるものとして、振動中の物体(位置 x)にはたらく力の合力 F を ρ_0、S、g、x で表せ。

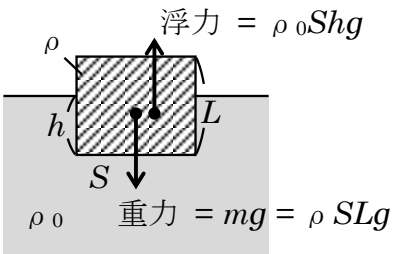
(3) この振動の周期 T を求めよ。

(4) 物体の速さの最大値 v_{max} を求めよ。

問題 8 解答 (1) $h = \dfrac{\rho}{\rho_0}L$　(2) $F = -\rho_0 Sgx$　(3) $2\pi\sqrt{\dfrac{\rho L}{\rho_0 g}}$　(4) $\sqrt{\dfrac{\rho_0 g}{\rho L}}d$

問題 8 解説

(1) 密度の定義が『単位体積あたりの質量』であることと、アルキメデスの原理『押しのけた流体の重さの分だけ浮力を受ける』がポイント。これを機会に復習しよう。



密度の定義から導ける公式 $m = \rho V$ より、物体の質量 m は、$m = \rho SL$ よって、物体にかかる重力は

(重力) $= mg = \rho SLg$

物体の底面から水面までの長さを h とすると、

アルキメデスの原理より、

(浮力) $= \rho_0 Shg$

つりあいの式を立てると、

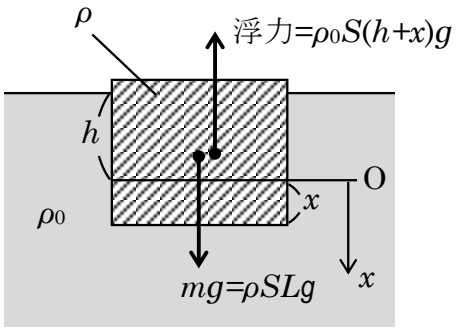
$\rho SLg = \rho_0 Shg$　… ①式とする(後で使う)

$\therefore\ h = \dfrac{\rho}{\rho_0}L$

(2) この問題以降は、単振動の問題となるので、『めんどくさがらずに作図をすること』と、『時間に関する問題の解法』なのか『時間に関係ない問題の解法』なのか、を意識して解いていこう。

この問題(2)は『適当な正の変位 x に物体があるときの作図をする』ことを誘導してくれている問題である。この問題がなくても、この作図をする考え方の指針は持てるようにしておこう。

つりあいの位置から、物体が x だけ正の位置に移動したとすると、右図のように書ける。



はたらく力 F は、下向きを正にして考えると、

$F = -\rho_0 S(h+x)g + \rho SLg$

展開して

$F = -\rho_0 Shg - \rho_0 Sxg + \rho SLg$

①式 $\rho SLg = \rho_0 Shg$ を代入して

$F = -\rho_0 Shg - \rho_0 Sxg + \rho_0 Shg$

$\therefore F = -\rho_0 Sxg$　　復元力として見やすくするために並び替えて、$F = -\rho_0 Sgx$

$-\bigcirc\bigcirc x$ の形になっているので、これが復元力であるといえる。

(3) 単振動の周期 T を求めるには、角振動数 ω を必ず求めることが必要である。

単振動の運動方程式 $-m\omega^2 x = F$ を立式して、ω を求める。

復元力 F は前問(2)より $-\rho_0 Sgx$ なので、

$$-m\omega^2 x = -\rho_0 Sgx$$

$$\therefore \omega = \sqrt{\frac{\rho_0 Sg}{m}}$$

周期の公式 $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ より

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\rho_0 Sg}}$$

となる。ここで解答に m は使えないので、$m = \rho SL$ を代入し、

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\rho L}{\rho_0 g}}$$

＊『2πルート上からみかん』にならない周期の珍しい答え

(4) 力学的エネルギー保存を用いるが、『浮力による位置エネルギー』の公式はないので、『裏ワザを使って復元力による位置エネルギー』として考える必要がある。**裏ワザを適用したあとは、重力の要素を無視できる**ことに気をつけましょう。

以下のステップで考えていく。

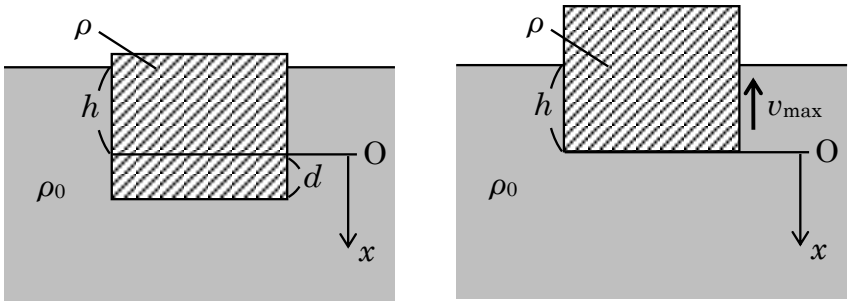
STEP① 前問(2)の復元力 F から単振動の定数 K を決定し、仮想ばねをイメージする。

STEP② つりあいの点を自然長とすることで裏ワザを適用し、重力のない世界にして、

STEP③ 復元力による位置エネルギーを $\frac{1}{2}Kx^2$ と計算して、力学的エネルギー保存則。

STEP① 復元力は、前問(2)より $F = -\rho_0 Sgx$、$-\bigcirc\bigcirc x$ の○○にあたる部分が定数 K なので、$K = \rho_0 Sg$ となる。

STEP② 下図のように、手を放した瞬間（前）と、速度が最大の瞬間（後）の図が書け、振動の中心を自然長として、そこからの変位をのびや縮みとすると、前の仮想ばねの伸びが d、後の仮想ばねの伸びが 0 といえる。



前　　後

前（手を放した瞬間）…物体の底面が、つりあいの位置から d だけ沈んだ点で、速度が 0。

後（速度が最大の瞬間）… 物体の底面が、つりあいの点を通る瞬間で速度が v_{max} となる。

STEP③ ㊀と㊁で、力学的エネルギー保存則を立式すると、

$$\frac{1}{2}Kd^2 = \frac{1}{2}mv_{\max}^2$$

(㊀ = ㊁)

$$\therefore\ v_{\max} = \sqrt{\frac{K}{m}}d$$

ここに、$K = \rho_0 Sg$ 、$m = \rho SL$ を代入すると、

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{\rho_0 g}{\rho L}}d$$

(3) 重要じゃない別解

周期の公式は $T = \frac{2\pi}{\omega}$ であるが、『2π ルート上からみかん』の $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$ も公式として扱ってよい。ただし、K には、問題(4) STEP①で出した『単振動の比例定数 K』を代入する必要がある。普段は、$K = k$ となることがほとんどなので、解答が $2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ になることが多いのだ。

今回の場合は、(4)で $K = \rho_0 Sg$ と求められ、$m = \rho SL$ ということも代入すると、

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} = 2\pi\sqrt{\frac{\rho SL}{\rho_0 Sg}} = 2\pi\sqrt{\frac{\rho L}{\rho_0 g}}$$

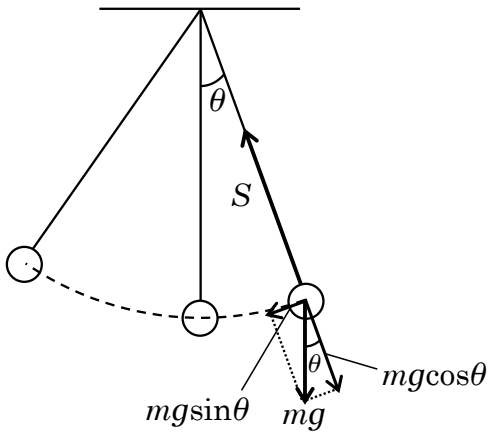
このように角振動数 ω を出さずに周期を出すことができる。
ただし、あまりやっていることは変わらないので、この別解は重要ではない。

～　M　E　M　O　～

テーマ 11　単振り子

軽い糸に小球をつるして、鉛直面内で振動させたものを単振り子という。
単振り子は、ある条件下でのみ単振動とみなせる。運動を分析してみよう。

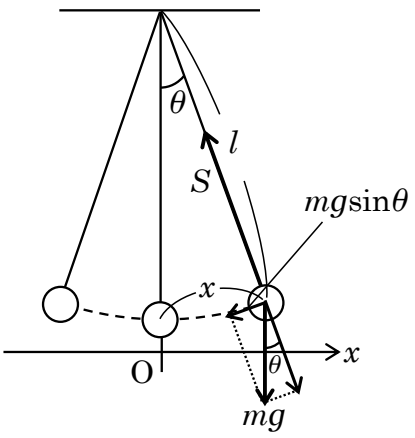
張力 S や、重力の中心方向成分 $mg\cos\theta$ は、振り子の運動方向と垂直なので、速さに変化を及ぼさない。
一方で、重力の接線方向成分 $mg\sin\theta$ は球の速度を変化させている力である。まとめると、



$S - mg\cos\theta$ ⇒ 向心力となって、球の向きを変える。
$mg\sin\theta$ ⇒ 球のスピードを変える。

というように、力の役割をイメージできる。

ここで、単振り子の振幅が非常に小さい場合のみ、単振動とみなせるようになる。復元力を発見できれば、その運動は単振動とみなせるので、復元力となるものを探そう。



左図のように水平向きに x 軸をとる。
ここで θ がとても小さければ、単振り子の円軌道がほぼ水平で、x 軸に沿っている直線と近似できる。

そして、$mg\sin\theta$ も x 軸に沿った力と近似できる。
また、図形的に $\sin\theta \fallingdotseq \frac{x}{l}$ とも近似できる。
右向きを正として立式すると $F = -mg\sin\theta = -mg\frac{x}{l}$
これは『$-$〇〇x』という形なので、復元力になっているといえる。

単振り子の復元力を $F = -mg\frac{x}{l}$ と示たので、$\boxed{\text{単振動の運動方程式}}$ $-m\omega^2 x = F$ を立てて、単振り子の周期を求めることができる。

$$-m\omega^2 x = -mg\frac{x}{l}$$

$$\therefore \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

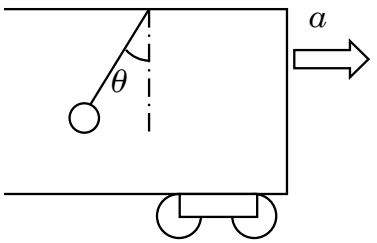
$$\therefore\ T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad \left(\because\ T = \frac{2\pi}{\omega}\right)$$

① 式に m がないので、球の重さで周期が変化することはない。
② 振り子の振幅も周期に関係がない。
③ 糸の長さが長いと、周期が長くなる
④ 『2π ルート上からりんご』という語呂合わせが存在する。

問題 9　単振り子と見かけの重力

電車の中で、長さ l の糸に質量 m の球をつけ天井からつるした。

(1) この球を少し後方にひいてはなすと球は単振動した。その周期 T はいくらか。



球を静止させ、電車が一定の加速度 a で加速すると、球は鉛直方向から θ 傾いて静止した。

(2) $\tan\theta$ の値を求めよ。

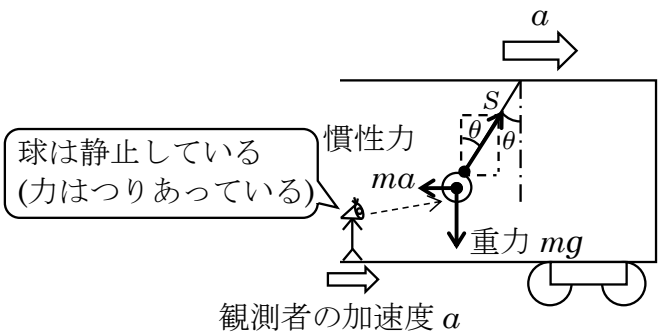
(3) この物体を少し後方にひいてはなすと単振動をした。その周期 T を求めよ。

問題 9 解答　(1) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$　(2) $\tan\theta = \dfrac{a}{g}$　(3) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{\sqrt{a^2+g^2}}}$

問題 9 解説　慣性力の復習と、『見かけの重力』というという考え方が後半のポイント。

(1) (1)の段階では、ただの単振り子である。周期 T は $2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ である。暗記してもよいが、導出もできるようにしないといけないので、導出に慣れるまでは暗記しないようにしよう。

(2) 加速度運動している電車の中での球の運動を分析する。この問題は『見かけの重力問題』と呼ばれる典型問題である。観測者を電車に乗せて考えてみよう。



観測者も電車と同じ加速度 a で動いているので、物体には慣性力 ma が働く。

糸の張力を S と置き、鉛直方向と水平方向に分解して、つりあいの式を立てると、

$$\begin{cases} S\cos\theta = mg & \text{（鉛直方向）} \\ S\sin\theta = ma & \text{（水平方向）} \end{cases}$$

$\dfrac{\text{(水平の式)}}{\text{(鉛直の式)}}$ と連立して、$\tan\theta$ を求める。

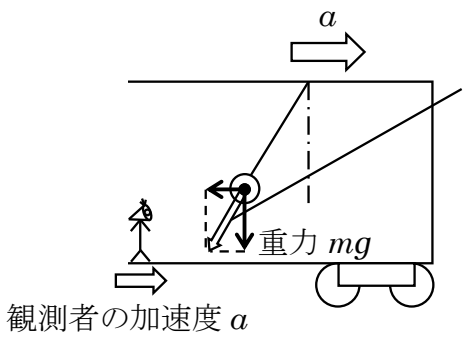
$$\frac{S\sin\theta}{S\cos\theta} = \frac{ma}{mg}$$

$$\therefore\ \tan\theta = \frac{a}{g}$$

(3)　この問題で、特殊な技法『見かけの重力』というものをマスターしよう。

この運動は、電車の中で観測する人から見ると単振り子で、地面から見た人から見ると、単振り子の動きと、右向きへの加速度運動を合成した動きをする。結果、外から見たときの力学の分析だと、単振動としての分析ができない。なので、中の人から見た単振り子として分析をしよう。

ここで、慣性力と重力を合わせたものを見かけの重力と呼ぶ。



見かけの重力

三平方の定理より

$\sqrt{(ma)^2+(mg)^2}$

$= \sqrt{m^2(a^2+g^2)}$

$= m\sqrt{a^2+g^2}$

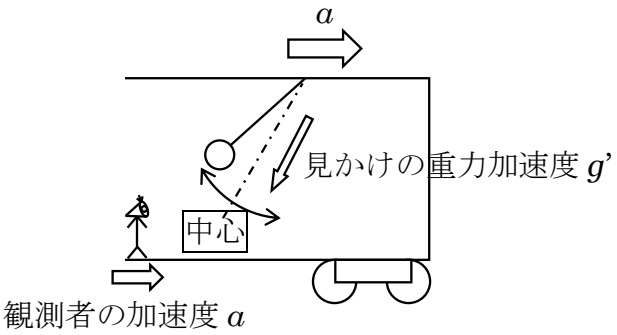
見かけの重力加速度を g' とすると、見かけの重力を mg' と書けるので、

$mg' = m\sqrt{a^2+g^2}$

$\therefore\ g' = \sqrt{a^2+g^2}$

慣性力はどの位置に物体があっても、『全ての物体に』『同じ向き』『同じ大きさ』ではたらき、これは重力と同じ性質といえ、電車内では、左下に重力がはたらいている世界である、と考えてよくなるのだ。

重力が斜め下にはたらいている世界で、静止した状態から球を少しだけ後方に引いて離すと以下のような運動をする。



元々静止していた点を中心に、単振動を行うのである。

そしてこのときの周期は、

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g'}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\sqrt{a^2+g^2}}}$$

となる。