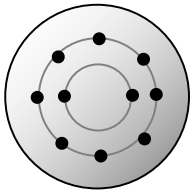
§　原子②　原子と原子核

テーマ１　原子模型の変遷

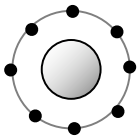
トムソンが電子を発見し、原子は電子によって構成されると考えられた。トムソンは具体的には『無核原子模型』を提唱した。この模型は原子を電子が構成しているとしているが、電子の質量が小さく実際の原子の質量と差異がありすぎるという問題があった。

その後、長岡半太郎は質量が大きく正の電荷もつ角の周りを電子のリングが回っているとした『有核原子模型』を提唱した。このモデルは現在明らかにされたモデルにかなり近いが、電子の安定性などに種々の困難を抱えていた。

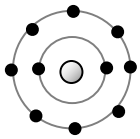
現在のものにかなり近いのはラザフォードが提唱したものとなる。



トムソンモデル

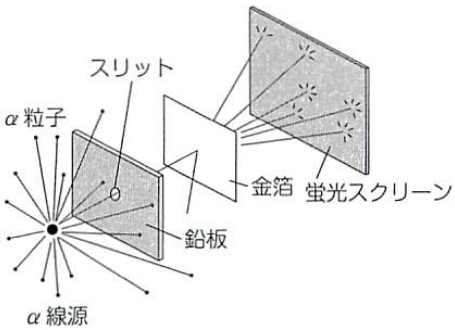


長岡モデル

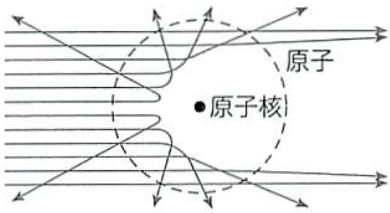


ラザフォードモデル

☆　原子核の発見　　ラザフォードの実験



ラザフォードのα粒子の散乱実験



原子核によるα粒子の散乱

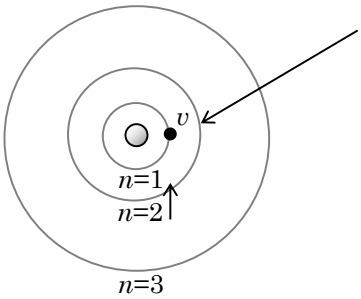
ラジウム原子から出るα粒子(+2e の電荷をもつ。He の原子核)をきわめて薄い金箔に当てると、α粒子の散乱が見られた。トムソンモデルのような形ではなく、原子の中心に正の電荷をもった重たい粒子があると予測ができる実験である。

テーマ 2　ラザフォードモデルの不完全な点

ラザフォードが提唱したモデルでは電子軌道に関しての説明が不完全であった。電子軌道が、どのような軌道も取れる状況なら、様々な振動数の光がでてくるはずなのだが、原子から発生する X 線などの光子の波長が、ある決まった値しかなかった。そのことの説明がされていなかったのだ。

この点に関して、ボーアが水素原子を例に 2 つの仮説を導入し、ラザフォードのモデルの不完全な部分を解決した。

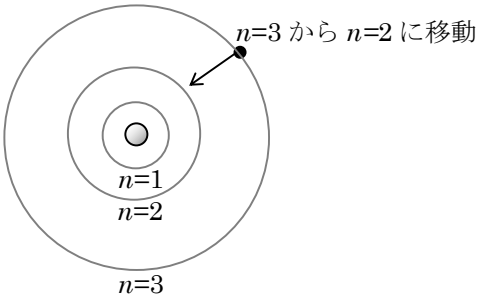
仮説①　原子内の電子は、とびとびのエネルギーE_1、E_2、E_3・・・のみを持つことが許される。
(自由な大きさのエネルギーはもてない)



電子は運動エネルギーと電気力による位置エネルギーを持っている。外側ほどエネルギーが大きい。
そして、好きな半径をとることは出来ずに、どの周回にいるかによってエネルギーの量が決まってしまう。（n=2.5 の半径の場所に電子はいられない）
このような、とることができるエネルギーの値をエネルギー準位 E_n という。

仮説②　原子が高いエネルギー準位 En から、低いエネルギー準位 En'に移るとき、原子はそのエネルギー準位の差に等しいエネルギーを持つ光子 1 つを放出する。(固有 X 線発生のメカニズム!!)

例



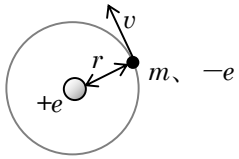
左図のように、n = 3 から n = 2 に電子が移動した際には、エネルギー準位が E_3 から E_2 になっている。
外側の方が高いエネルギーを持っているので、E_3-E_2 のエネルギーを失ったといえる。この分のエネルギーを持つ光子が放出されるのだ。光子のもつエネルギーは $h\nu$ なので、
$E_3-E_2 = h\nu$　という関係式になる。

テーマ 3　エネルギー準位の導出

水素原子のエネルギー準位を考察する。

STEP① 電子の円運動の運動方程式

水素原子は、原子核に$+e$の電荷をもち、その周りに電荷$-e$の電子を 1 つ持つ。



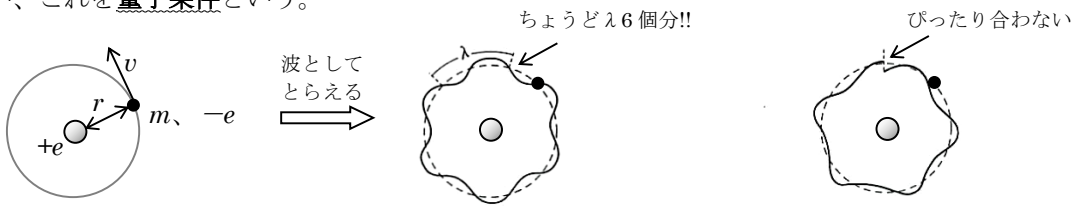
このとき、電子の円運動に関する運動方程式を立てる。

静電気力 $F = k_0\frac{e^2}{r^2}$が向心力となるので、

$$m\frac{v^2}{r} = k_0\frac{e^2}{r^2} \quad \cdots(a)$$

STEP② 量子条件

電子を電子波と捉えたとき、電子波の波長と軌道の円周の長さは、波長の整数倍しか取れない、これを**量子条件**という。



この軌道は存在する　　この軌道は存在しない

量子条件より、円周 $2\pi r$ と λ の関係は、

$2\pi r = n\lambda \qquad (n = 1,2,3\cdots)$

ここで、λはド・ブロイ波の式より、

$$\lambda = \frac{h}{mv}$$

この 2 式より

$$2\pi r = n\frac{h}{mv} \quad (n = 1,2,3\cdots) \qquad \cdots(b)$$

STEP③ (a)、(b)から v を消去し、軌道半径 r を求める

(b) $2\pi r = n\frac{h}{mv}$ を変形し、$v = \frac{nh}{2\pi r\, m}\cdots$(b')　　これを(a) $m\frac{v^2}{r} = k_0\frac{e^2}{r^2}$ に代入し、

$$\frac{m}{r}\left(\frac{nh}{2\pi\ r\ m}\right)^2 = k_0\frac{e^2}{r^2}$$

$$\frac{m}{r}\left(\frac{nh}{2\pi\ m}\right)^2 = k_0 e^2$$

$$r = \frac{h^2}{4\pi^2 k_0 m e^2}n^2 \qquad (n = 1,2,3\cdots)$$

このとき n に 1 が入るときの r が、最も原子核に近い軌道半径である。この軌道に電子がある状態を基底状態といい、そのときの半径をボーア半径という。

$n = 2$ の軌道に電子があるときも存在し、そのときはボーア半径より少し大きい円軌道を描いているのだ。

STEP④ エネルギー準位を導く

電子が STEP③で求めた軌道半径に存在するときに持っているエネルギーを考える。
電子は運動エネルギーと、静電気力にとる位置エネルギーを持つので、それぞれ求める。

運動エネルギーK

STEP①の(a)式 $m\frac{v^2}{r} = k_0\frac{e^2}{r^2}$ の関係式を、運動エネルギー$K = \frac{1}{2}mv^2$ の形に変形する。

$$m\frac{v^2}{r} = k_0\frac{e^2}{r^2}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{k_0e^2}{2r}$$

よって

$$K = \frac{k_0e^2}{2r}$$

静電気力による位置エネルギーU

無限遠点を基準にとると、

$U = k_0\frac{Qq}{r}$より、

$U = -k_0\frac{e^2}{r}$　　（原子核の電気量 Q が$+e$、電子の電気量 q が$-e$ ）

全エネルギーE（$K+U$）

これら 2 つのエネルギーを合計すると

$$E = \frac{k_0e^2}{2r} + \left(-k_0\frac{e^2}{r}\right)$$

$$E = -\frac{k_0e^2}{2r}$$

軌道半径は、STEP③で求めたように、$r = \frac{h^2}{4\pi^2k_0me^2}\cdot n^2$ という値をとる。n の値によって計算できるとびとびの値のみ半径をとることができ、これを r_n と置いたとき、それぞれの半径のときに持つエネルギー準位を E_n と置くと、

$E_n = -\frac{k_0e^2}{2r_n}$　とかけ、$r_n = \frac{h^2}{4\pi^2k_0me^2}\cdot n^2$ を代入すると、

$$E_n = -\frac{k_0e^2}{2\left(\frac{h^2}{4\pi^2k_0me^2}n^2\right)}$$

$$E_n = -\frac{2\pi^2{k_0}^2me^4}{h^2}\cdot\frac{1}{n^2} \qquad (n = 1,2,3\cdots)$$

となる。この式の n に整数を入れていったときの、とびとびの値しか、電子はエネルギーを取れないのだ。
これらの様な軌道に電子があるときを、その軌道上から移動しないという意味で、定常状態、と呼んだりする。

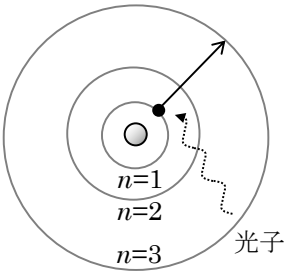
テーマ 4　水素原子の励起

電子が違うエネルギー準位に移るときに、光としてエネルギーの差分を処理する。

エネルギー準位の式 $E_n = -\dfrac{2\pi^2 {k_0}^2 me^4}{h^2}\cdot\dfrac{1}{n^2}$　　$(n = 1,2,3\cdots)$

を用いてエネルギーの変化量を考える。

≪例 1≫



n = 1 の軌道(基底状態)にいた電子が、n' = 3 の軌道に移ったとき

(電子がより外の軌道に移ることを『遷移する』といい、電子が遷移した後の原子の状態を『励起状態』という)

$$E_1 = -\frac{2\pi^2 {k_0}^2 me^4}{h^2}\cdot\frac{1}{1} \qquad E_3 = -\frac{2\pi^2 {k_0}^2 me^4}{h^2}\cdot\frac{1}{9}$$

とそれぞれの状態でのエネルギーを計算できるので、エネルギーの変化量 ΔE は

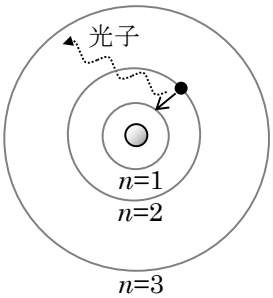
$$\Delta E = E_3(\text{後}) - E_1(\text{前}) = -\frac{2\pi^2 {k_0}^2 me^4}{h^2}\cdot\frac{1}{9} - \left(-\frac{2\pi^2 {k_0}^2 me^4}{h^2}\cdot\frac{1}{1}\right) = \frac{2\pi^2 {k_0}^2 me^4}{h^2}\cdot\frac{8}{9}$$

n = 1 から n = 3 の軌道に移る際には、$\dfrac{2\pi^2 {k_0}^2 me^4}{h^2}\cdot\dfrac{8}{9}$のエネルギーを電子は得ている。

外にいくには、エネルギーをもらう必要があり、エネルギーを得るために光や熱を吸収しているのだ。

エネルギーの式にマイナスがついていて、大小のイメージが湧きづらいが、n = ∞のとき、エネルギーの大きさが 0 で最大。n = 1 のとき、マイナスの大きさが大きくエネルギーが最小、という大きさの関係なのだ。

≪例 2≫



n = 2 の軌道にいた電子が、n' = 1 の軌道に移ったとき

E_2 = ①　　E_1 = ②

ΔE = ③

(失ったエネルギー) = ④

このエネルギー分だけ、電子は光を放出する。エネルギー準位の差分が、光エネルギーにかわったのだ。式にすると、(出る光のエネ $h\nu$) = (失ったエネ) となり、これを振動数条件という。

穴埋めの解答

① $E_2 = -\dfrac{2\pi^2 {k_0}^2 me^4}{h^2}\cdot\dfrac{1}{4}$　　②$E_1 = -\dfrac{2\pi^2 {k_0}^2 me^4}{h^2}\cdot\dfrac{1}{1}$

③ $\Delta E = -\dfrac{2\pi^2 {k_0}^2 me^4}{h^2}\cdot\dfrac{3}{4}$　　④ (失ったエネ) $= \dfrac{2\pi^2 {k_0}^2 me^4}{h^2}\cdot\dfrac{3}{4}$

問題１　言葉の整理

水素原子の電子の電荷を$-e$、電子の質量を m、クーロンの法則の比例定数を k_0、プランク定数を h とする。$n = 1,2,3\cdots$とする。

(1) 量子条件を式で表せ。

(2) 電子の速さを v、軌道の半径を r としたとき、電子の運動方程式を表せ。

(3) 基底状態とはどういう状態か説明せよ。

(4) 定常状態とはどういう状態か説明せよ。

(5) 励起状態とはどういう状態か説明せよ。

(6) 振動数条件とは何か説明せよ。

問題１解答　(1) $2\pi r = n\lambda$　(2) $m\dfrac{v^2}{r} = k_0\dfrac{e^2}{r^2}$

(3) 電子が一番内側の軌道にあり、最も安定している状態

(4) 電子が遷移せず、いずれかの電子軌道に電子があり続ける状態

(5) $n = 2$ 以上の軌道に電子が遷移している状態　（基底状態ではない状態ともいえる）

(6) 電子が遷移するとき、エネルギー準位の差分のエネルギーを持つ光が放出されるので、出てくる光の振動数には規則性があること。式にすると、$h\nu = E_{n'(後)} - E_{n(前)}$　となる。

問題１解説

(1) 量子条件は、電子軌道の長さが、ぴったり波長の整数倍である、という部分である。それを式にすると、$2\pi r = n\lambda$

(2) 電子の加速度は、円運動の公式より $a = \dfrac{v^2}{r}$、受ける力 F は、クーロン力 $k_0\dfrac{e^2}{r^2}$である。よって、運動方程式は $m\dfrac{v^2}{r} = k_0\dfrac{e^2}{r^2}$

問題 2　リュードベリ定数

水素原子の電子のエネルギー準位は $E_n = -\dfrac{2\pi^2 {k_0}^2 me^4}{h^2}\cdot\dfrac{1}{n^2}$　$(n = 1,2,3\cdots)$ で示される。E_n から E_n'に移った際(n>n')、光が観測された。

(1) エネルギー準位の移動の際に、電子の持つエネルギーはどれだけ変化するか。h、π、k_0、m、e、n、n'用いて答えよ。

(2) 発光された光の波長を λ とすると $\dfrac{1}{\lambda}$ の値はいくらか。h、π、k_0、m、e、n、n、c を用いて答えよ。

問題 2 解答 (1) $\Delta E = E_n' - E_n = -\dfrac{2\pi^2 {k_0}^2 me^4}{h^2}\left(\dfrac{1}{n'^2} - \dfrac{1}{n^2}\right)$

(2) $\dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{2\pi^2 {k_0}^2 me^4}{ch^3}\left(\dfrac{1}{n'^2} - \dfrac{1}{n^2}\right)$

問題 2 解説

(1) 変化と言えば後−前。よって、$\Delta E = E_n' - E_n = -\boxed{\dfrac{2\pi^2 {k_0}^2 me^4}{h^2}\left(\dfrac{1}{n'^2} - \dfrac{1}{n^2}\right)}$

$n > n'$ という関係から、ΔE は負の値であるといえる。

(2) (光のエネルギー $h\nu$) = (電子の失ったエネルギー分)、なので前問の ΔE のマイナスをとり

$$h\nu = \frac{2\pi^2 {k_0}^2 me^4}{h^2}\left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

波の式 $v = f\lambda$ より $c = \nu\lambda \quad \Rightarrow \quad \nu = \dfrac{c}{\lambda}$

これを代入し、

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{2\pi^2 {k_0}^2 me^4}{h^2}\left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

整理して

$$\frac{1}{\lambda} = \boxed{\frac{2\pi^2 {k_0}^2 me^4}{ch^3}\left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2}\right)}$$

＊ このときの $\dfrac{2\pi^2 {k_0}^2 me^4}{ch^3}$ をリュードベリ定数 R と呼び、$\dfrac{1}{\lambda} = R\left(\dfrac{1}{n'^2} - \dfrac{1}{n^2}\right)$ と書くこともある。ただ、リュードベリ定数を覚える必要はない。

問題 3　イオン化エネルギー

水素原子が水素イオンになるということは、物理的にいうと、基底状態にある電子が、原子核からの引力の影響を受けることのない『自由電子』になることをいう。水素原子がイオン化するために必要なエネルギーを求めよ。ただし、水素原子の電子のエネルギー準位は

$E_n = -\dfrac{2\pi^2 {k_0}^2 me^4}{h^2} \cdot \dfrac{1}{n^2}$　　$(n = 1,2,3 \cdots)$ で示される。

問題 3 解答　$\dfrac{2\pi^2 {k_0}^2 me^4}{h^2}$

問題 3 解説

基底状態→イオン化、という現象は、$n = 1$ のエネルギー準位から $n = \infty$ のエネルギー準位に遷移することと理解しましょう。電子が、すごく遠くにいってしまう、というイメージです。必要なエネルギー ΔE は、$n = 1$ から $n = \infty$ に遷移する場合を考えればよい。

$$\Delta E = E_\infty - E_1 = -\frac{2\pi^2 {k_0}^2 me^4}{h^2}\left(\frac{1}{\infty^2} - \frac{1}{1}\right) = \boxed{\frac{2\pi^2 {k_0}^2 me^4}{h^2}}$$

テーマ 5　水素原子のスペクトル系列

ライマン、パルマー、パッシェンの 3 人の科学者は、ボーアの模型から求められた振動数条件 $h\nu = \dfrac{2\pi^2 {k_0}^2 me^4}{h^2}\left(\dfrac{1}{n'^2} - \dfrac{1}{n^2}\right)$、リュードベリ定数で示すと$\dfrac{1}{\lambda} = R\left(\dfrac{1}{n'^2} - \dfrac{1}{n^2}\right)$となる式を求めることはできなかったが、水素原子から特定の波長しか出ないことに気づき、以下の様な式を提唱していた。

ライマン：$\dfrac{1}{\lambda} = R\left(\dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{n^2}\right)$（$n = 2$、3、4…）　パルマー：$\dfrac{1}{\lambda} = R\left(\dfrac{1}{2^2} - \dfrac{1}{n^2}\right)$（$n = 3$、4、5…）

パッシェン：$\dfrac{1}{\lambda} = R\left(\dfrac{1}{3^2} - \dfrac{1}{n^2}\right)$（$n = 4$、5、6…）

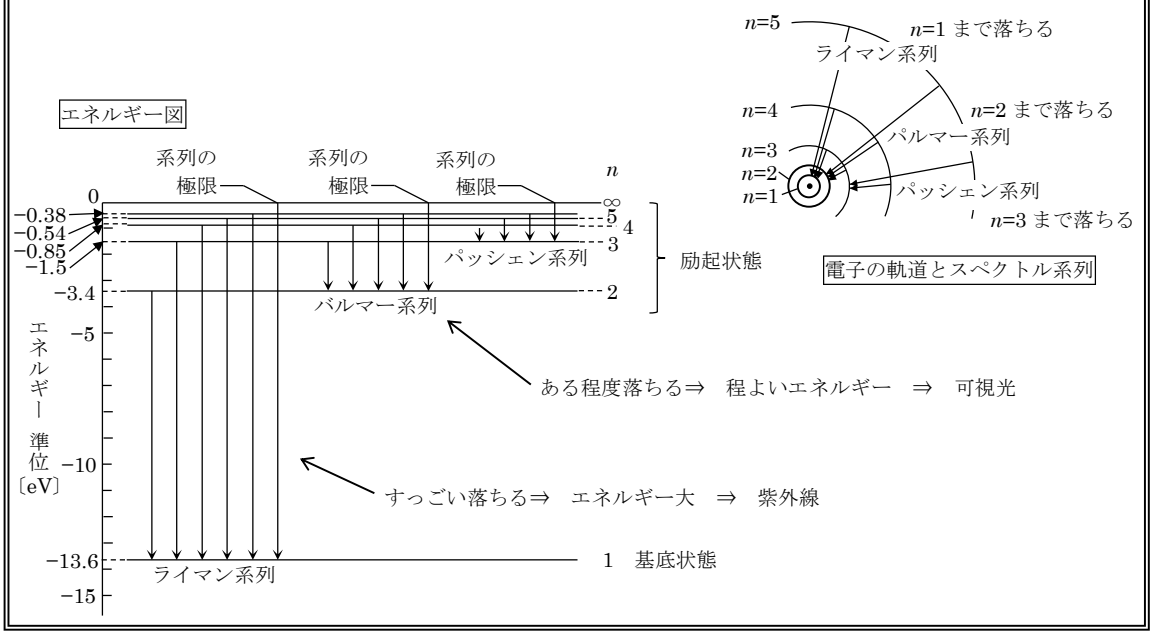
三者の提唱した式の違いは、それぞれの人物が観測していた光の種類が違っていたことで、起きている。

観測した光の種類と波長の大小関係

短い ←	λ	→ 長い
紫外線	可視光	赤外線
ライマン	パルマー	パッシェン

今となっては、$\dfrac{1}{\lambda} = R\left(\dfrac{1}{n'^2} - \dfrac{1}{n^2}\right)$という一般式がわかったため、ライマンは、外側の軌道から $n = 1$ まで落ちてきたとき、パルマーは、外側の軌道から、$n = 2$ まで落ちたとき、パッシェンは、外側の軌道から、$n = 3$ まで落ちてきたときの発生する光をそれぞれ観測していたと説明できる。また、発生の仕方ごとに『パルマー系列のスペクトル』などと呼び、光の種類を区別している。『スペクトル』とは、『出てくる光の一覧』という意味である。

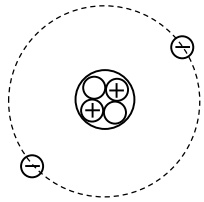
エネルギー図と、電子軌道図によるイメージ



テーマ 6　原子核の構造と表記

原子は下図のような構造をとっている。

例　$^{4}_{2}\mathrm{He}$



① 中央に原子核

原子核は中性子(ニュートロン)と陽子(プロトン) でできている。

中性子、陽子のことを区別なく核子と呼ぶことがある。

『$^{4}_{2}\mathrm{He}$の原子核には核子が 4 つ含まれている』

といった感じ。

表記のルール

$^{4}_{2}\mathrm{He}$

質量数 A
重い粒の数。
核子の数。

原子番号 Z
$+e$ を単位とした電荷
化学では陽子の数、
電子の数と習うけど。

② 周りには回転する電子(エレクトロン)

③ 中性子、陽子、電子には以下のような特徴がある。

	中性子 $^{1}_{0}\mathrm{n}$	陽子 $^{1}_{1}\mathrm{p}$	電子 $^{0}_{-1}\mathrm{e}$
電荷	なし	$+e$	$-e$
質量	1 u (重い) ⇒≒m_{n} と書く	1u (重い) ⇒m_{p} と書く	0.0005u (軽い) ⇒ほぼ 0

＊質量の単位〔u〕読み：ユニット

陽子、中性子約 1 個分の質量を 1 u という。

④ 表記の一般化をすると、

$^{A}_{Z}\mathrm{X}$　A が質量(重さの目安)

Z が電荷(電子・陽子の数)を示す。

重い粒である陽子、中性子の総数が A で、陽子の数が Z なので、中性子の数は(A−Z)個となる。

問題 4　同位体

以下の表を埋めよ

	$^{1}_{1}\mathrm{H}$	$^{2}_{1}\mathrm{H}$　重水素	$^{3}_{1}\mathrm{H}$　三重水素	$^{7}_{3}$（　　）
中性子の数	（　　）	（　　）	（　　）	（　　）
電子の数	（　　）	（　　）	（　　）	（　　）
陽子の数	（　　）	（　　）	（　　）	（　　）

＊$^{1}_{1}\mathrm{H}$や$^{2}_{1}\mathrm{H}$、$^{3}_{1}\mathrm{H}$のように陽子の数が同じだが中性子の数が違うものを同位体(アイソトープ)という。

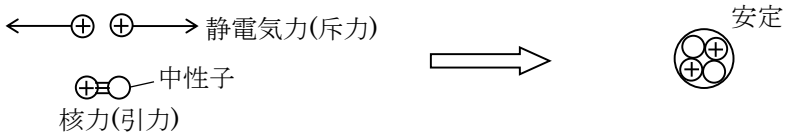
問題４解答

	$^{1}_{1}$H	$^{2}_{1}$H　重水素	$^{3}_{1}$H　三重水素	$^{7}_{3}$（　Li　）
中性子の数	（　0　）	（　1　）	（　2　）	（　4　）
電子の数	（　1　）	（　1　）	（　1　）	（　3　）
陽子の数	（　1　）	（　1　）	（　1　）	（　3　）

イオンになっていないのならば､いつも電子と陽子の数は同じになる｡電気的に中性なのだ｡
中性子と陽子が重い粒子で、その合計が、左上の数字である質量数となる。

＊核力

原子核に注目すると、陽子と陽子は共に+の電荷をもっているので静電気力による斥力がはたらくはずである｡しかも､すごく距離が近いので､この力はとても大きいはずなのだ｡しかし、そんな陽子が離れることなく原子核に収まっているのは、中性子があるからである。中性子と陽子の間には『核力』という強力な引力がはたらき、原子核内に収まっているのだ。



$^{238}_{92}$Uなどは、陽子がとても多いため、反発力が強く、核力だけでは安定せず、核分裂を起こしやすい。次のテーマではこのようなバランスの悪さが起こす『崩壊』を学習する。

テーマ 7　崩壊

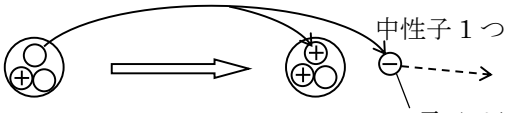
① α崩壊 (He の原子核が飛び出す)

$^{238}_{92}$Uなど陽子が非常に多い原子核では陽子を外におい出す動きが起こる。しかし単純に陽子が飛んでいくのではなく、すごく安定した状態の というかたまりで飛んでいく。これは$^{4}_{2}$Heの原子核と等しく、これをα粒子(α線)という。核反応式でα崩壊を示すと、

$^{A}_{Z}\mathrm{X} \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}\mathrm{X}' + {}^{4}_{2}\mathrm{He}$(α線) となる。　　ウラン$^{238}_{92}$Uの場合、$^{238}_{92}\mathrm{U} \rightarrow {}^{234}_{90}\mathrm{Th} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}$(α線)

② β崩壊 (中性子から電子と陽子が生まれる)

$^{14}_{6}$Cなど、中性子が過剰で、核力が多い原子核は、バランスをよくするために反発力を増やしたい。反発力を増やすために陽子を増やすのがβ崩壊である。β崩壊は、多すぎる中性子が足りない陽子に変わる。しかし中性子はもともと電気的に中性なので、陽子だけでなく電子も生み出す。下図のように絵にできる。



中性子 1 つが、陽子と電子に**分裂**

電子は原子核の中にはとどまらず、外に飛び出す。この飛び出している電子$^{0}_{-1}$e をβ線という。

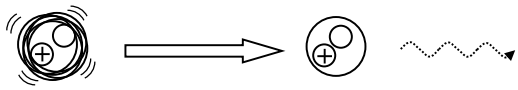
β崩壊を核反応式で表すと、

$^{A}_{Z}\mathrm{X} \rightarrow {}^{A}_{Z+1}\mathrm{X}' + {}^{0}_{-1}\mathrm{e}$(β線)　となる。炭素$^{14}_{6}$Cのβ崩壊を示すと$^{14}_{6}\mathrm{C} \rightarrow {}^{14}_{7}\mathrm{N} + {}^{0}_{-1}\mathrm{e}$(β線)となる。

上の図でもわかる通り、β崩壊では変化前と変化後で重い粒(核子)の数は変わっていない。
($^{14}_{6}\mathrm{C} \rightarrow {}^{14}_{7}\mathrm{N} + {}^{0}_{-1}\mathrm{e}$の変化では、重い粒の数は 14 で変わっていない)
質量数 A は変化しないが、陽子が 1 つ増えているので、原子番号 Z は+1 されて、別の元素になる。式だけを暗記するのではなく、現象とリンクさせて頭に入れよう。

③ γ崩壊 (何も変化しない。光子が出る。)

γ崩壊は、α崩壊やβ崩壊が起こった後に起こる。α崩壊やβ崩壊が起こった時には、原子核自体が大きなエネルギーを持っている。何かが飛び出した反動で、ぶるぶる震えているようなイメージである。このぶるぶるが止まった時、エネルギーが減少し、減ったエネルギー分が光子として処理されるのだ。



ぶるぶる　　ぴた　　光子(γ線)が出る。

陽子、中性子が飛び出ていないので、核反応式で示すと、$^{A}_{Z}\mathrm{X} \rightarrow {}^{A}_{Z}\mathrm{X}$となる。エネルギーが少なくなるだけで、原子核自体に変化は起きないのだ。

④ α線、β線、γ線の特徴

以下の表はまとめて整理しておこう。

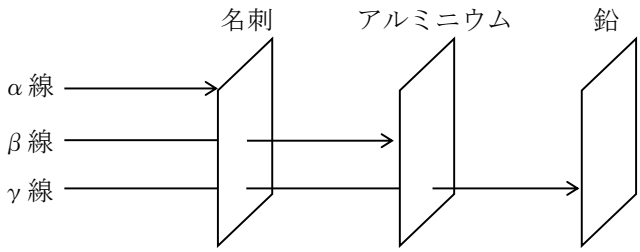
	電離作用	透過作用
α線	強い	弱い
β線	中	中
γ線	弱い	強い

電離作用とは、自分とぶつかった粒子から電子を奪う能力。
透過作用とはものを貫通する能力である。

α線は、2+の電荷をもっていることからも、ターゲットの電子を奪う力が強いことが容易にイメージできる。β線の正体は電子であり、斥力でターゲットの電子を弾き飛ばすが、電荷がα線より小さくなる。また、質量に注目しても、α線は重い粒の集まりで、β線は軽い粒1つであることから、衝突する際のエネルギーも小さく電離作用は小さいといえる。
γ線は電荷をもっていないので、奪う力は最も弱い。

透過作用とはものを貫通する能力のイメージだが、いかに自分の持ったエネルギーを保持し続けるかがカギとなる。α線はすぐにターゲットの電子を奪うが、奪うことでエネルギーを使ってしまう。エネルギーを失うと止まってしまうのだ。

下図のような差がある。紙にα線をぶつけると、α線を遮蔽できるが、紙はボロボロになる。



電離作用⇒相手を破壊する能力　　透過作用⇒相手を壊さずに通過する能力　とイメージ

問題5 核反応式とα、β、γ崩壊

(1) 次の□を埋めよ。

(ア) ${}^{\square}_{4}\mathrm{Be} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \rightarrow {}^{12}_{\square}\square + {}^{1}_{0}\mathrm{n}$　(イ) ${}^{235}_{92}\mathrm{U} + {}^{1}_{0}\mathrm{n} \rightarrow {}^{93}_{\square}\mathrm{Sr} + {}^{\square}_{54}\mathrm{Xe} + 3 \times {}^{1}_{0}\mathrm{n}$　(ウ) ${}^{14}_{6}\mathrm{C} \rightarrow {}^{\square}_{\square}\square + {}^{0}_{-1}e$

(2) ${}^{232}_{90}\mathrm{Th}$が崩壊をくりかえしていくと、やがて鉛 Pb になる。それは以下のどの Pb になるか答えよ。また、その際、α崩壊と、β崩壊をそれぞれ何回しているか答えよ。

${}^{206}_{82}\mathrm{Pb}$　${}^{207}_{82}\mathrm{Pb}$　${}^{208}_{82}\mathrm{Pb}$　${}^{209}_{82}\mathrm{Pb}$　${}^{210}_{82}\mathrm{Pb}$

問題 5 解答

(1) (ア) ${}^{9}_{4}\mathrm{Be} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \rightarrow {}^{12}_{6}\mathrm{C} + {}^{1}_{0}\mathrm{n}$ (核融合)　(イ) ${}^{235}_{92}\mathrm{U} + {}^{1}_{0}\mathrm{n} \rightarrow {}^{93}_{38}\mathrm{Sr} + {}^{140}_{54}\mathrm{Xe} + 3 \times {}^{1}_{0}\mathrm{n}$(核分裂)

(ウ) ${}^{14}_{6}\mathrm{C} \rightarrow {}^{14}_{7}\mathrm{N} + {}^{0}_{-1}e$ (β崩壊)

(2) ${}^{208}_{82}\mathrm{Pb}$　α 崩壊：6 回　β 崩壊：4 回

問題 5 解説

(1) 核反応式は『質量数の和』と、『原子番号の和』が、両辺で同じになる。

(ア) ${}^{\square}_{4}\mathrm{Be} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \rightarrow {}^{12}_{\square}\square + {}^{1}_{0}\mathrm{n}$

和 13 ⟸ 和 13

和 6 ⟹ 和 6

(イ) ${}^{235}_{92}\mathrm{U} + {}^{1}_{0}\mathrm{n} \rightarrow {}^{93}_{\square}\mathrm{Sr} + {}^{\square}_{54}\mathrm{Xe} + 3 \times {}^{1}_{0}\mathrm{n}$

和 236 ⟹ 和 236

和 92 ⟹ 和 92

(ウ) ${}^{14}_{6}\mathrm{C} \rightarrow {}^{\square}_{\square}\square + {}^{0}_{-1}e$($\beta$線)

和 14 ⟹ 和 14

和 6 ⟹ 和 6

(2) α 崩壊は、${}^{A}_{Z}\mathrm{X} \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}\mathrm{X}' + {}^{4}_{2}\mathrm{He}$　β 崩壊は${}^{A}_{Z}\mathrm{X} \rightarrow {}^{A}_{Z+1}\mathrm{X}' + {}^{0}_{-1}\mathrm{e}$　という変化を起こすが、

注目したいのは、『質量数 A を変えられるのは α 崩壊だけであること』である。

よって、方針としては、

① まずは質量数をヒントに α 崩壊の回数を確定させる

その後、

② 原子番号 Z を合わせるように、β 崩壊の回数を確定させる　という手順で行う。

${}^{232}_{90}\mathrm{Th} \rightarrow {}^{\square}_{82}\mathrm{Pb}$

α 崩壊により質量数は 4 ずつ減っていくので、

1 回	2 回	3 回	4 回	5 回	6 回	7 回
228 →	224 →	220 →	216 →	212 →	208 →	204

と変化していき、選択肢にあるのは、${}^{208}_{82}\mathrm{Pb}$ のみ。

よって、どの Pb になるかは、${}^{208}_{82}\mathrm{Pb}$で確定し、α 崩壊は 6 回となる。

次に 6 回 α 崩壊をした後を考えて、β 崩壊の回数を確定させる。

$${}^{232}_{90}\mathrm{Th} \xrightarrow{\alpha\text{崩壊}\ 6\text{回}} {}^{232-(4\times 6\text{回})}_{90-(2\times 6\text{回})}\square \xrightarrow{\text{計算}} {}^{208}_{78}\square \xrightarrow{\beta\text{崩壊}\ ?\text{回}} {}^{208}_{82}\mathrm{Pb}$$

原子番号 Z は 4 増えないといけない。

β 崩壊 1 回で原子番号 Z は 1 増えるので、

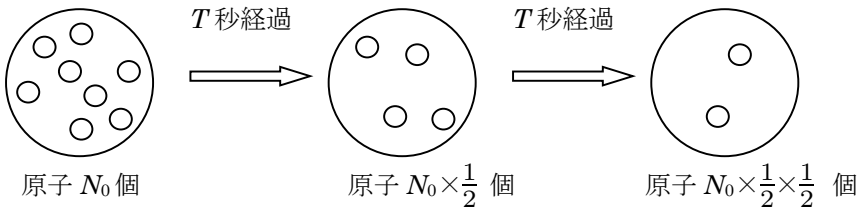
β 崩壊の回数は 4 回で確定となる。

テーマ 8　半減期

安定していない原子は テーマ 7 のような崩壊をどんどん起こす。しかし、安定している原子も実はゆっくりと崩壊を起こす。ここで、ある原子の集団が、崩壊していき、数が最初の半分になるまでの時間を『半減期 T』という。

安定している原子は半減期が長く、不安定な原子は半減期が短いということである。

イメージ



一般化すると、T 秒経過するたびに数が半分になるので、t 秒経過する間に半分になる回数は$\frac{t}{T}$回といえる。半減期が $T = 2$ s、経過時間が $t = 4$ s だったら、半分になる回数は

$\frac{t}{T} = \frac{4}{2} = 2$ 回、というように、具体的な数字を入れると、この式の意味を理解しやすい。

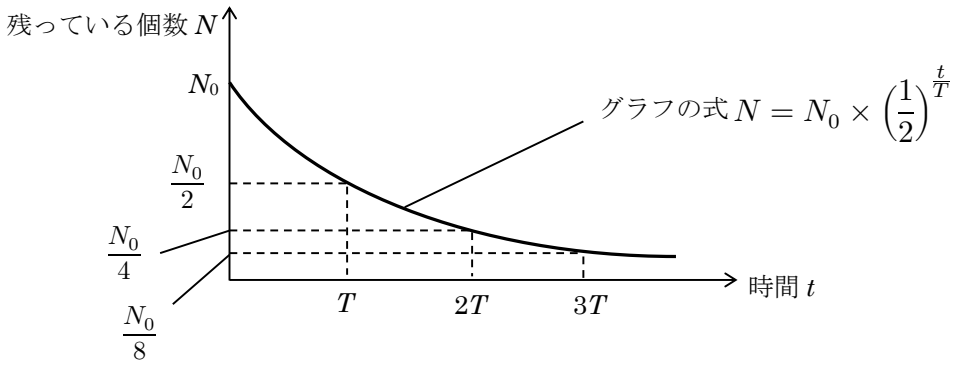
よって、生き残る原子の個数 N は $\boxed{N = N_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}}$ となる。

よく問題で『崩壊した原子の数』が聞かれるが、この公式のまま計算してしまうミスが多い。

この数は生き残りの個数なので、崩壊した個数 N' は $\boxed{N' = N_0 - N_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}}$ となるので注意。

崩壊した数 ＝ 元の個数－生き残りの個数、で計算するのだ。

半減期の式をグラフにすると以下のようになる。



問題 6　半減期

(1) 半減期が 1 時間の放射性物質がある。3 時間経過すると、この放射性物質はどれだけ崩壊するか。元々の全体量に対しての量を答えよ。

(2) α 崩壊をする物質がある。この物質は 12 分ではじめの量の$\frac{7}{8}$が他の物質に変換する。$\log_{10} 2 = 0.30$、$\log_{10} 3 = 0.48$ とする。次の問い(a)〜(c)に答えよ。

(a) この物質の半減期を求めよ。

(b) この物質はある時点から 20 分後には何%が崩壊しないで残っているか。

(c) この物質が現在ある量の$\frac{2}{3}$になるのは何分後か。

問題 6 解答　(1) $\frac{7}{8}$　　(2) (a) 4 分　　(b) 3.1 %　　(c) 2.4 分

問題 6 解説

(1) 半減期が 1 時間ということは、3 時間では 3 回 $\frac{1}{2}$倍になる、ということである。よって、$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{8}$ の量になる。これは、崩壊せずに残っている量なので、崩壊した量は、全体の$\frac{7}{8}$といえる。

＊ この問題に公式を適用してみると、以下のようになる。

残った量を N、最初の量を N_0 として、

$$N = N_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} \quad \Rightarrow \quad N = N_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{1}} \quad \Rightarrow \quad N = N_0 \times \frac{1}{8}$$

この式を見て、残った量が最初の$\frac{1}{8}$であることを示している、と読めるようになっておこう。

問題 6 解説続き

(2)

(a)　12 分で$\frac{7}{8}$の量が他の物質に変わったということは、残っていたのは$\frac{1}{8}$であり、

公式 $N = N_0 \times \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}}$　この部分が$\frac{1}{8}$ということである。

半減期を T として、このことを立式すると、

$$\frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{12}{T}}$$

となる。$\frac{12}{T}$ =3 と言えるので T = 4 分

(b)　半減期が 4 分で、20 分経過しているので、半分になるのが $\frac{t}{T} = \frac{20}{4}$ = 5 回、起きているということである。よって、$\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32} \fallingdotseq 3.1\,\%$ 残っているといえる。

(c)　これまでの問題のように、半減期 T と経過時間 t がぴったりした数なら、暗算でも処理できるが、(c)のように中途半端な時間だと、指数・対数計算をしないと処理できない。

全体が $\frac{2}{3}$ になるということは、

公式 $N = N_0 \times \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}}$　この部分が$\frac{2}{3}$ということである。

よって、経過時間を t 分とすると、$\frac{2}{3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{4}}$

両辺の対数をとると、

$$\log_{10}\frac{2}{3} = \log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{4}}$$

$$\log_{10}2 - \log_{10}3 = \log_{10}1^{\frac{t}{4}} - \log_{10}2^{\frac{t}{4}}$$

$$\log_{10}2 - \log_{10}3 = 0 - \frac{t}{4}\log_{10}2$$

$$0.30 - 0.48 = -\frac{t}{4} \times 0.30$$

よって、

$$t = \frac{4 \times 0.18}{0.30} = 2.4\text{ 分}$$

テーマ 9　アインシュタインの式 $E = mc^2$

≪準備≫ 単位

このテーマでは普段使わない単位が出てくるので、準備としてそこを理解しておこう。

①〔eV〕　読み：エレクトロンボルト　または　電子ボルト

前の章『電子と光』で登場したエネルギーの単位である。読みの最後がボルトなので、電圧の単位と勘違いする人が多いので気をつけよう。

エネルギーの単位〔J〕と同じものを示す単位であり、換算すると以下のようになる。

$1\ \mathrm{eV} \fallingdotseq 1.60\times10^{-19}\ \mathrm{J}$　　$1\ \mathrm{MeV} = 10^{6}\ \mathrm{eV} = 1.60\times10^{-13}\mathrm{J}$　　＊覚える必要はない

＊ 電子ひとつ(電気量 1.60×10^{-19} C)を 1 V で加速したときのエネルギー量が 1 eV、という定義なので、以下のように〔J〕と〔eV〕の換算式は導ける。

(電子が加速中にされる仕事) = (電子の持つエネルギー)

$$1.60\times10^{-19}\ \mathrm{C}\times1\mathrm{V} = 1.60\times10^{-19}\ \mathrm{J} = 1\ \mathrm{eV}$$

②〔u〕　読み：ユニット

この章のテーマ 6『原子核の構造と表記』で登場した質量の単位である。

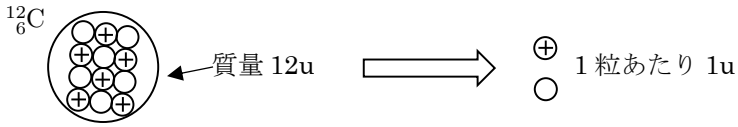
${}^{12}_{6}\mathrm{C}$ 1 粒の質量を 12 u とする、という定義である。

以下のように、普段使っている単位〔kg〕と換算できる。

${}^{12}_{6}\mathrm{C}$ 1 mol が 12 g なので、${}^{12}_{6}\mathrm{C}$ 1 粒の質量〔kg〕が $\dfrac{12\times10^{-3}\ \mathrm{kg}}{6.02\times10^{23}\ \text{粒}}$ と計算でき、

これが 12 u なので　$1\mathrm{u} = \dfrac{12\times10^{-3}\ \mathrm{kg}}{6.02\times10^{23}\ \text{粒}} \times \dfrac{1}{12} \fallingdotseq 1.66\times10^{-27}\ \mathrm{kg}$　と求まる。

また、${}^{12}_{6}\mathrm{C}$は陽子 6 個と中性子 6 個と電子 6 個の集まりで、その質量が 12 u ということから、陽子と中性子を同じ質量、電子は軽い粒だから無視してよいと考えてしまえば、核子 1 つあたりの質量が 1u ということもできる。(核子は中性子と陽子を区別せずに読んだときの名前)



(陽子 6 個+中性子 6 個)

しかし厳密には、電子に質量はあるし、陽子と中性子でもわずかに質量は違うので、核子 1 粒あたり 1u というのは正確ではない。

このテーマ 9 アインシュタインの式では、陽子と中性子の質量の差など、非常にわずかな差も厳密に見ていかないといけないので気をつけよう。

≪質量の持つエネルギー$E = mc^2$≫
この式は『エネルギーと質量は同じものですよ』ということを表現している。
これまでの学習では、エネルギーは〔J〕、質量は〔kg〕という単位で示してきて、明確に違うもの、としてきたけれど、『○kg という質量は、△J のエネルギーと同じものだ！』ということを示しているのである。

具体的には、陽子と中性子がバラバラのときと、陽子と中性子が核力によりくっついているときを比べると、わずかに質量が小さくなっている。そして、失った分の質量がエネルギーとして放出されている。くっつくことで質量を失ってしまうのだ。これが今期待されている核融合という技術につながる。

エネルギーを与える⇒　質量が増える
質量が減る　⇒　エネルギー放出する

という関係である。

このとき減る質量を $\boxed{\text{質量欠損 } \Delta m}$ と書き、質量に対応するエネルギーが $E = mc^2$ で計算でき、発生するエネルギーは $E = \Delta mc^2$ なのだ。(c は光速の大きさ 3.0×10^8)
質量欠損を図にするとこんな感じ

質量欠損 Δm は、$(3.347\times10^{-27})-(3.343\times10^{-27})$　で、0.004×10^{-27} kg
よって、この結合をすることで放出されるエネルギーは、
$E = \Delta m \times c^2$　より
$=(0.004\times10^{-27})\times(3.0\times10^{8})^2$
$=3.6\times10^{-13}$ J
単位をエレクトロンボルトに直すと、
$(3.6\times10^{-13}) \div (1.6\times10^{-19}) \fallingdotseq 2.25\times10^{6}$ eV となる。
↑電気素量 $e = 1.6\times10^{-19}$ で割ると単位変換できる。

問題 7　質量の持つエネルギーとアインシュタインの式

静止しているホウ素${}^{10}_{5}$Bに、運動エネルギーの無視できる速さの遅い中性子を当てたところ、${}^{10}_{5}\mathrm{B} + {}^{1}_{0}\mathrm{n} \rightarrow {}^{7}_{3}\mathrm{Li} + \mathrm{X}$の核反応が起きた。以下の問いに答えよ。ただし、それぞれの質量は、${}^{10}_{5}$B:10.0129u、${}^{7}_{3}$Li:7.0160u、${}^{1}_{0}$n:1.0087u、X :4.0026u とする。また、1u の質量は 9.3×10^2MeV のエネルギーに相当する。

(1) X を元素記号に質量数と原子番号をつけて表せ。

(2) 反応で発生したエネルギーEはいくらか。

(3) 反応で生じた Li と X の運動エネルギーはそれぞれいくらか。

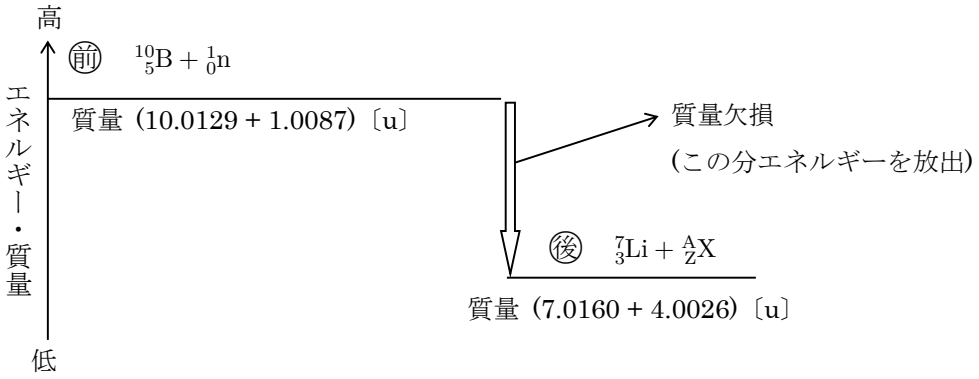
問題 7 解答　(1) ${}^{4}_{2}$He　(2) 2.79 MeV (3) Li : 1.01 MeV　X : 1.78 MeV

問題 7 解説

(1) ${}^{10}_{5}\mathrm{B} + {}^{1}_{0}\mathrm{n} \rightarrow {}^{7}_{3}\mathrm{Li} + {}^{A}_{Z}\mathrm{X}$ の核反応式を完成させると、A が 4、Z が 2 となる。
よって、X は${}^{4}_{2}$He

(2) 質量の持つエネルギーは $E = mc^2$ で計算できるが、この式の m には単位〔kg〕での質量が入る。今回は単位〔u〕で出題されているので、この式は使えないのだ。代わりに『1 u の質量は 9.3×10^2 MeV のエネルギー』という説明がある。これは、$E = mc^2$ を用いて 1 u を kg に直して計算したエネルギーを示しており、これを元に考えていけばよいのだ。

エネルギー・質量図を書いて、質量欠損を考えてみる。

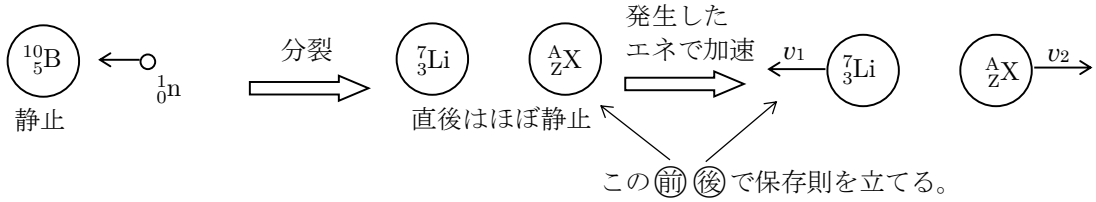


前と後で、質量欠損を計算すると 0.003 u とわかり、問題文より発生するエネルギーEは 1 u あたり 9.3×10^2 MeV なので、発生するエネルギーEは

$E = 0.003 \times 9.3 \times 10^2$ MeV　= 2.79〔MeV〕

問題 7 解説続き

(3) この反応は核分裂反応で、以下のような動き方をしている。



質量欠損によって生じたエネルギーが爆発して、分裂した原子が互いに逆向きに飛ばすのだ。爆発による力は、原子同士の内力といえるので、運動量は保存するのである。

質量数で質量比を考えることができ、Li の質量を $7m$、He の質量を $4m$ と文字でおくことができる。これを用いて立式をする。

運動量保存

$$0 = -7mv_1 + 4mv_2 \quad \cdots ①式$$

エネルギーの式

前の運動エネ ＋ 発生したエネ E ＝ 後の運動エネ(2 つの合計)

$$0 \quad + \quad 2.79〔\mathrm{Mev}〕 \quad = \quad \frac{1}{2}\cdot 7mv_1^2 + \frac{1}{2}\cdot 4mv_2^2 \quad \cdots ②式$$

さて、Li の運動エネルギーは②式の $\frac{1}{2}\cdot 7mv_1^2$ の部分であり、その大きさを求めたい。

①式を変形して、

$$v_2 = \frac{7}{4}v_1$$

これを②式に代入して v_2 を消去

$$2.79 = \frac{1}{2}\cdot 7mv_1^2 + \frac{1}{2}\cdot 4m\left(\frac{7}{4}v_1\right)^2$$

整理して、

$$2.79 = \frac{1}{2}\cdot 7mv_1^2 + \frac{1}{2}\cdot \frac{49}{4}mv_1^2$$

$$2.79 = \frac{1}{2}\cdot \frac{77}{4}mv_1^2$$

Li の運動エネルギー $\frac{1}{2}\cdot 7mv_1^2$ の大きさを知りたいので、両辺に$\frac{4}{77}\times 7$ をかけて

$$2.79\times\frac{4}{77}\times 7 = \frac{1}{2}\cdot \frac{77}{4}mv_1^2\times\frac{4}{77}\times 7$$

$$2.79\times\frac{4}{11} = \frac{1}{2}\cdot 7mv_1^2$$

$$\therefore \frac{1}{2}\cdot 7mv_1^2 = 2.79\times\frac{4}{11} = 1.014\cdots \fallingdotseq 1.01\ \mathrm{MeV}$$ …Li の運動エネルギー

②式にこれを代入し、

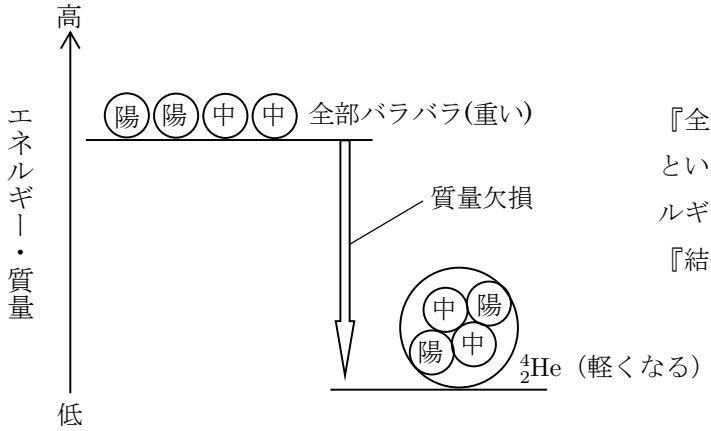
$$2.79 = 1.014 + \frac{1}{2}\cdot 4mv_2^2$$

$$\therefore \frac{1}{2}\cdot 4mv_2^2 = 1.776 \fallingdotseq 1.78\ \mathrm{MeV}$$ …X の運動エネルギー

テーマ 10　結合エネルギー

陽子と中性子が完全にバラバラな状態から、1 つの原子になるときの質量欠損を考えてみる。

モデル　陽子 2 個と中性子 2 個が合わさり、$^{4}_{2}$Heができた。



『全部バラバラ⇒くっついた』というときの質量欠損によるエネルギーを特別に『結合エネルギー』という。

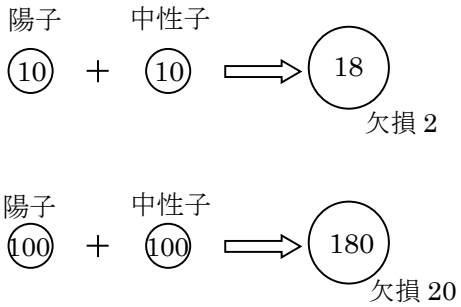
結合エネルギーの大小を比べるとき、合体する核子の数が多いほど、失われる質量は大きいことが多い。

しかし、いっぱい核子を集めたらいっぱい質量が欠損する、というおおざっぱな結論で終えてはいけない。核子 1 個当たりの質量欠損には、細かく差があることが分かったのだ。

下図のようなイメージを持っておこう。

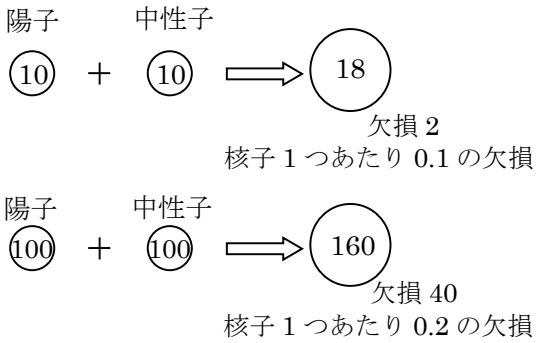
イメージ　核子 1 つあたりの欠損具合は一定なのか

《一定ならこうなる》



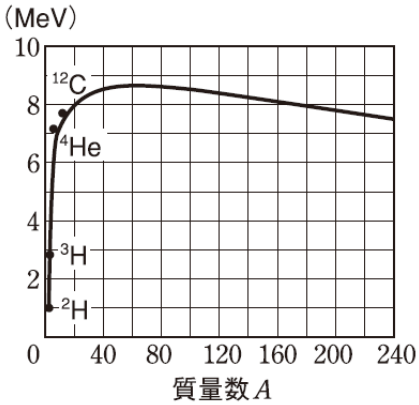
常に核子は 1 個あたり 0.1 欠損

《実際は一定ではない》



質量数が大きいとき、核子 1 つあたりの欠損の割合が大きくなる傾向が見つかった!!

さて、核子１つあたりの欠損具合に差があることがわかり、これには『核子１つあたりの結合エネルギー』と名付けられた。『核子 1 つあたりの』がつくと違う意味の言葉になるので気をつけよう。核子 1 つあたりの結合エネルギーは下図のようになることがわかっている。



核子１個当たりの結合エネルギー

グラフの上にあるほど、『バラバラ状態⇒合体』となったときの核子 1 つあたりの欠損具合が大きいということになる。具体的に数字を出すと下記のようになる。

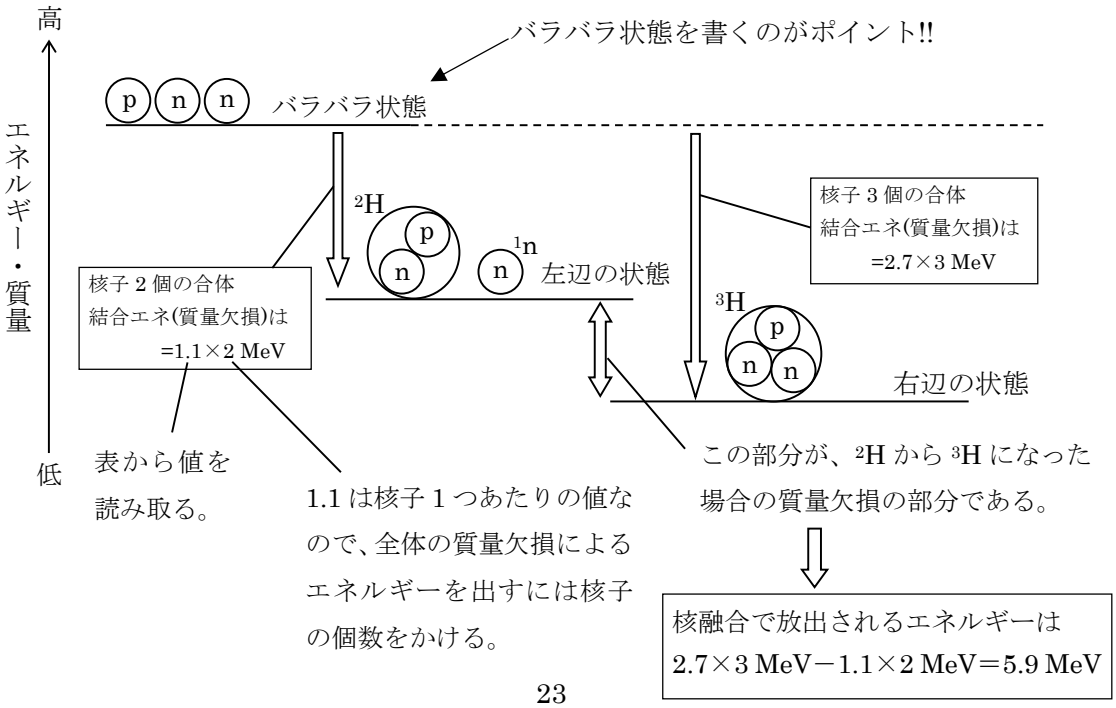
原子核	^{2}H	^{3}H	^{4}He	^{12}C
核子１個当たりの結合エネルギー(MeV)	1.1	2.7	7.1	7.7

《グラフの使い方》

こんな問題が出る。

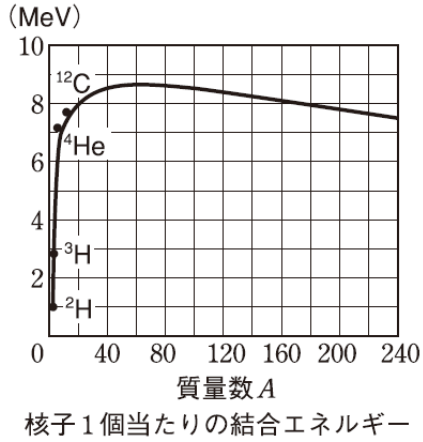
^{2}H + ^{1}n → ^{3}H　という反応(核融合反応)が起きたとき、放出されるエネルギーはいくらか。

グラフや表をもとにエネルギー表を書いてみる。陽子を p、中性子を n で示す。



問題 8　結合エネルギー

図は原子核の結合エネルギーを質量数でわった、1 核子当たりの結合エネルギーの実測値を、横軸に質量数をとって示したものである。ただし、計算に必要な実測値は表に示してある。



(1) 原子核 ^{12}C の結合エネルギーは何 MeV か。

(2) 原子核 ^{12}C の質量欠損は電子の質量の何倍か。ただし、電子が静止状態でもつエネルギーは 0.51MeV である。

(3) 2 つの原子核 ^{3}H と ^{2}H が核融合を起こし、^{4}He と中性子がつくられたとする。このときに発生するエネルギーはいくらか。

(4) 原子核 ^{235}U が核分裂を起こし、質量数のほぼ等しい 2 つの原子核に分裂したとする。このときに放出されるエネルギーはおよそいくらになるか。次の数値から近いものを選び、その理由を簡単に記せ。

原子核	^{2}H	^{3}H	^{4}He	^{12}C
核子 1 個当たりの結合エネルギー(MeV)	1.1	2.7	7.1	7.7

{50MeV、100MeV、200MeV、500MeV、1000MeV}

(5) 質量数の小さい軽い原子核では(3)のような核融合が起こり、ウランのように重い原子核では(4)のように核分裂が起こる。図よりその理由を説明せよ。

問題 8 解答　(1) 92 MeV (2) 180 倍 (3) 18 MeV　(4) 200MeV　(5) 解説参照

問題 8 解説

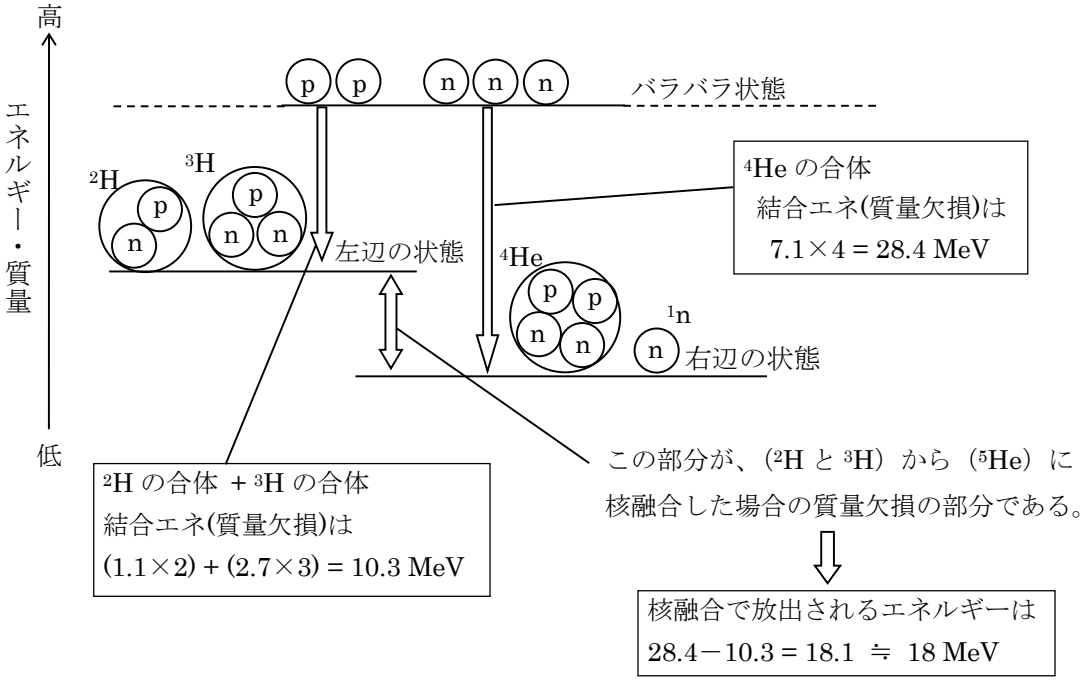
(1) 表より ^{12}C の核子 1 つあたりの結合エネルギーが 7.7 MeV で、核子の数は 12 個であることから、結合エネルギーE は、$E = 7.7 \times 12 = 92.4 \fallingdotseq 92$ MeV

(2) 前問(1)より ^{12}C の結合エネルギーは 92.4 MeV であり、問題文より電子の質量のエネルギー換算が 0.51 MeV である。この 2 つを比べて、

$$\frac{92.4}{0.51} = 181.17\cdots \fallingdotseq 1.8 \times 10^{2} \text{倍}$$

問題８解説続き

(3) エネルギー図を書いて $^{3}H+^{2}H \rightarrow {}^{4}He+^{1}n$ という核反応式のエネルギーを考える。



(4) グラフから大まかに核子１つあたりの結合エネルギーを把握し、計算する。

$^{235}U \rightarrow {}^{118}X + {}^{117}Y$ のように分裂したと仮定して、グラフをそれぞれ読み取る。

^{235}U … 質量数 A = 235 のあたりは、7.6 MeV　⇒ 結合エネルギーは 7.6×235 MeV

^{118}X　^{117}Y … 質量数 A = 120 弱のあたりは、8.5 MeV　⇒ 結合エネルギーは 8.5×235 MeV

この差が放出されるエネルギーとなるので、

(8.5×235) － (7.6×235) = 211.5 ≒ 200MeV

(5) 解答は『軽い原子核では核融合することで、重い原子核では核分裂することで、核子 1 個当たりの結合エネルギーの大きい原子核に変換され、より安定するから。』となる。

核子１つ当たりの結合エネルギーが大きいほど、質量欠損は大きく、エネルギー図では低い位置となり、エネルギーは低い方が原子は安定するのである。

グラフの高い位置の方が安定するので、高い方に移動するように変換したがる性質があるのだ。