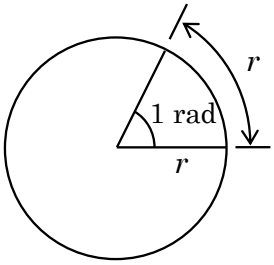
§　力学Ⅱ−2 章 円運動

テーマ 1　弧度法 ～ラジアン～

1 周を 360°とする角度の単位の他に〔rad〕（読み:ラジアン）という単位がある。

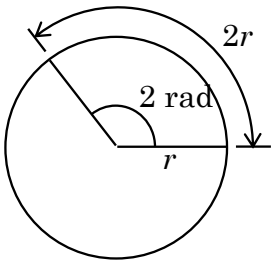
〔rad〕の定義・・・『半径に対する弧の長さ』を示す比例定数のこと。



この図だと、半径が r、弧の長さも r なので、

『半径の 1 倍』が弧の長さ。

よって角度は『1 rad』



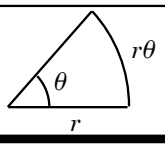
この図だと、『半径の 2 倍』が弧の長さ。

よって角度は『2 rad』

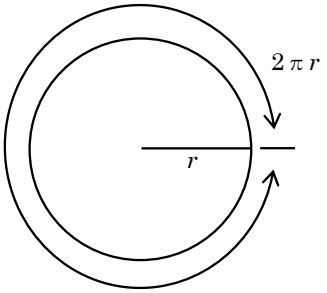
⇩

Point

半径のラジアン倍が弧の長さ!!



＊360°は何 rad か。



1 周の弧の長さは、直径$(2r)\times\pi$、よって $2\pi r$ となる。

半径の 2π 倍なので、

1 周 360°は 2π〔rad〕といえる。

Point

$$360^\circ = 2\pi \text{〔rad〕}$$

問題 1　弧度法

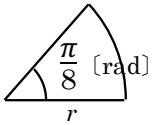
(1) 30°は何 rad か。

(2) 45°は何 rad か。

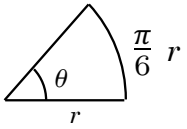
(3) 60°は何 rad か。

(4) 90°は何 rad か。

(5) 弧の長さはいくらか。



(6) 中心角 θ は何 rad か。



問題１ 解答　(1) $\frac{\pi}{6}$　(2) $\frac{\pi}{4}$　(3) $\frac{\pi}{3}$　(4) $\frac{\pi}{2}$　(5) $\frac{\pi}{8}r$　(6) $\frac{\pi}{6}$

テーマ２ 角速度と速さ

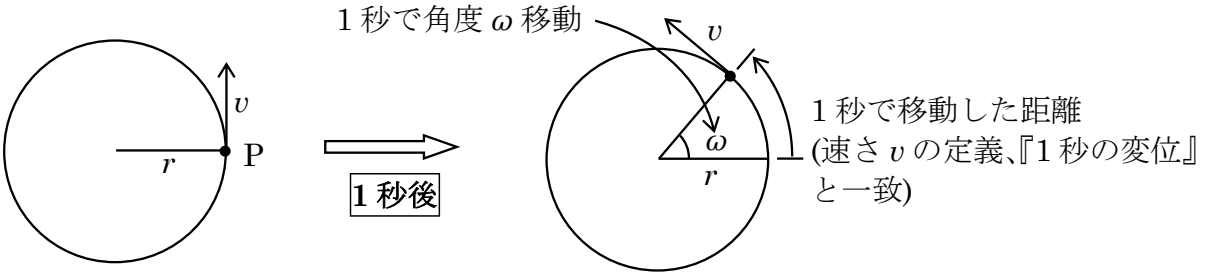
定義

角速度：単位時間に回転する角度

文字：ω　　読み方：オメガ　　単位〔rad/s〕

$\omega = \frac{\pi}{6}$ と言われたら
１秒に $\frac{\pi}{6}$ 回転、という意味

モデル　半径 r の円周上を角速度 ω、一定の速さ v で動く点 P がある。

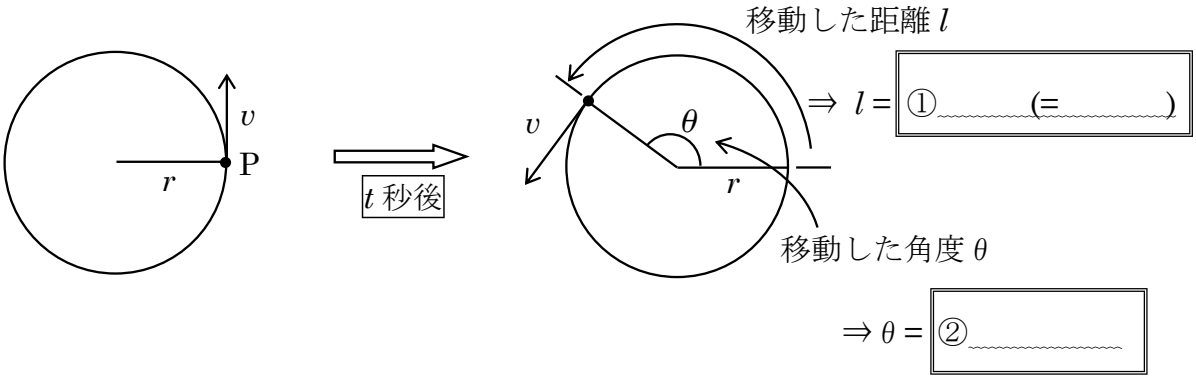


図を見ると、『1 秒で移動した距離』は、$r\omega$ といえる。
よって $\boxed{v = r\omega}$ という関係を導ける。

ポイント①　こういった運動を『**等速円運動**』という。
(『等速円運動』の『速』は『速さ』を示す。『向き』は変化しているので『速度』は等しくない)

ポイント②　速度の向きは、円の**接線方向**となる。
(ひもにおもりをつけて振り回し、どこかでひもを手離すと、おもりの飛んでいく方向は、離した点の接線方向になる)

ポイント③　『1 秒後』のモデルを『t 秒後』に拡大してみよう。



ここで、① $l = vt\ (=r\theta)$、② $\theta = \underline{\omega t}$
①と②の式から $vt = r\omega t$ といえるので、$v = r\omega$　となる。

このように『t 秒後』という考えからも、公式 $v = r\omega$ は導ける。

問題 2　基礎公式の確認

以下の問いに答えよ。(公式を並べて代入するのではなく、公式導出を考える練習をしよう。)

(1) 半径が r〔m〕の円周上を角速度 $\frac{\pi}{6}$〔rad/s〕で物体が等速円運動している。物体の速さ v〔m/s〕はいくらか。

(2) 半径 2.0〔m〕の円周上を速さ 8.0〔m/s〕で物体が等速円運動している。物体の角速度 ω〔rad/s〕はいくらか。

(3) 半径がわからない円周上で、速さ 2.0〔m/s〕、角速度 $\frac{\pi}{2}$〔rad/s〕で物体が等速円運動している。円運動の半径 r〔m〕はいくらか。

問題 2 解答　(1) $\frac{\pi}{6}r$〔m/s〕　(2) 4.0 rad/s　(3) $\frac{4}{\pi}$〔m〕

テーマ 3　周期と回転数

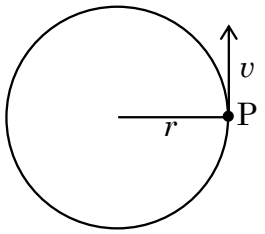
定義

周期：1 回転するのにかかる時間　文字：T　単位〔s〕

回転数：1 s に回転する回数　文字：n　単位〔Hz〕または〔回/s〕〔s^{-1}〕

速度と、角速度の 2 つのアプローチで周期の公式を導いてみる。

問題 3　周期と回転数



半径 r の円周上を角速度 ω、一定の速さ v で動く点 P がある。

(1) 円周の長さはいくらか。

(2) 速さ v と円周の関係から、周期 T を導け。

(3) 1 周分の角度の大きさはいくらか。(rad で示す)

(4) 角速度 ω と 1 周分の角度の関係から、周期 T を導け。

(5) 回転数を n とすると、1s に n 回転するという意味になる。1 周にかかる時間 T を n で示せ。

問題 3 解答　(1) $2\pi r$　(2) $T=\frac{2\pi r}{v}$　(3) 2π　(4) $T=\frac{2\pi}{\omega}$　(5) $T=\frac{1}{n}$

回転数 n は振動数 f と似た物理量。

$T=\frac{1}{f}$ という公式と同じ理屈で、$T=\frac{1}{n}$ が導ける

問題 4　公式の練習

以下の問いに答えよ。

(1) 半径 5.0 m の円周上を物体が、5.0 s 間に 2.0 回の割合で等速円運動している。
この円運動の周期と回転数はいくらか。また、速さはいくらか。

(2) 周期が 5.0 s で半径 2.0 m の円周上を等速円運動をしている物体がある。この物体の回転数と角速度はいくらか。

(3) 1 分間に 6.0 回転するメリーゴーランドの回転台上で、回転の中心から 4.0 m 離れたところにいる人の、周期、回転数、角速度、速さはいくらか。

問題 4 解答 (1) 周期:2.5 s　回転数:0.40 Hz　速さ：4π m/s

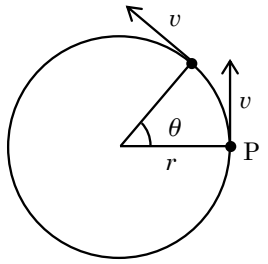
(2) 回転数:0.20 Hz　角速度:0.4π rad/s

(3) 周期:10 s　回転数:0.10 Hz　角速度:0.2π rad/s　速さ:0.8π m/s

等速円運動のパラメータまとめ

モデル

半径 r の円周上を
t 秒間で角度 θ 動いた



角速度の定義より、$\theta = \boxed{\omega t}$　$\omega = \boxed{\dfrac{\theta}{t}}$

t 秒間で移動した距離は、v と t を用いると $\boxed{vt}$ といえる。
また、r と θ を用いると $\boxed{r\theta}$ といえ、ω で示すと $\boxed{r\omega t}$ となる。

これらの式より、速さ v を ω で示すと $v = \boxed{r\omega}$ といえる。

周期 T は、$T = \boxed{\dfrac{2\pi r}{v}} = \boxed{\dfrac{2\pi}{\omega}}$ といえる。

回転数 n は $n = \boxed{\dfrac{1}{T}}$　、$T = \boxed{\dfrac{1}{n}}$

＊ $\boxed{}$ の部分を隠した状態で、穴埋めができるようになるまで書き出す練習をしよう。
これらのパラメータをマスターすることが円運動のスタート地点です。

おまけ

角速度 ω を回転数 n で表すと、$\omega = 2\pi n$ となる。

1 回転分の角度　×　1s での回転数 ＝1s での回転角度（ω）

速さ v を回転数 n で表すと、$v = 2\pi rn$ となる

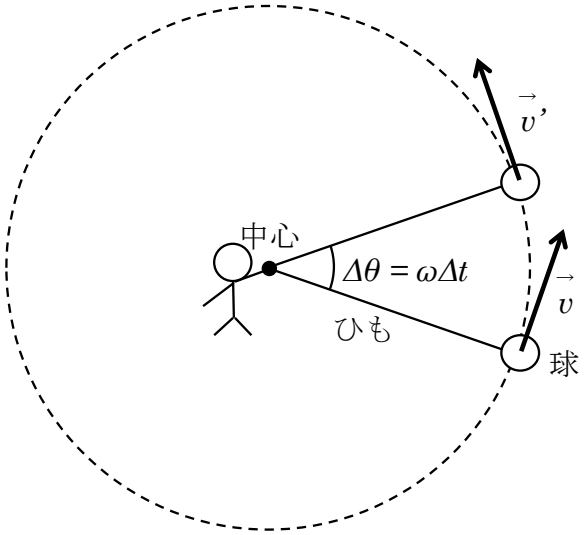
1 回転分の移動距離　×　1s での回転数 ＝1s での移動距離（v）

回転数 n が問題で扱われることが少ないので、登場頻度は少ないが、出せるようにしておこう。

テーマ 4　円運動に必要な力

モデル

ひもで結んだ球を回す運動



角速度 ω で、Δt 秒間回転させた。

ここで、速度は、

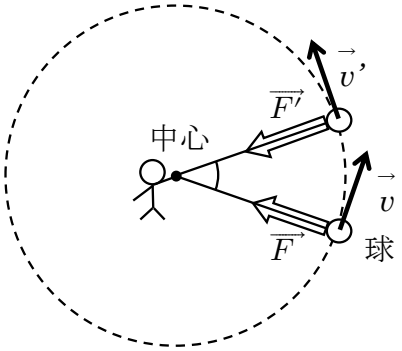
に変化している。

等速円運動なので、$|\vec{v}| = |\vec{v'}|$ であるのだが、向きが変わっている。

向きを変えるためには、力を加える必要があるはずである。

⇩ はたらいている力はなんだろうか？

このとき、球に触れているのはひもだけなので、ひもから張力がはたらいていると考えられる。張力はひもにそった向きにはたらくので下図のように、円の中心に向かって力がはたらいているといえる。



このように、円運動をするには、

『円の中心に向かってはたらく力』

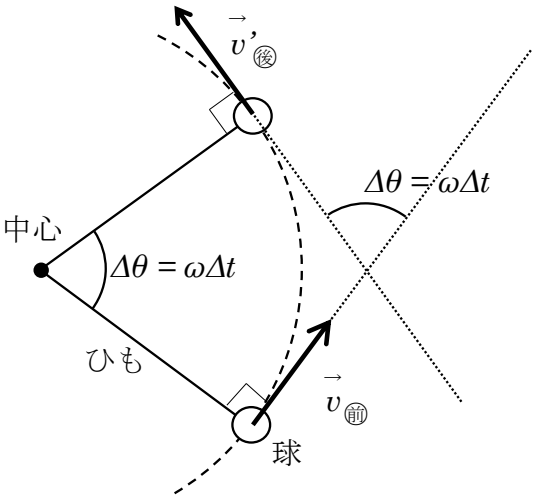
が必要なのだ。このような力を向心力と呼ぶ。

(中心に向かってはたらく力)

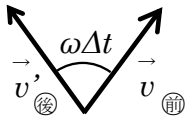
そして、『円の中心に向かってはたらく力』は、速度ベクトルと 90° の関係にあるので、速度の大きさには影響がなく、同じ速さで運動するのだ。

テーマ 5　円運動の加速度

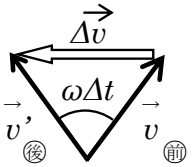
Δt 秒間での速度の変化$\overrightarrow{\Delta v}$を求めてみよう。
変化といえば後－前、ベクトルの引き算をする。



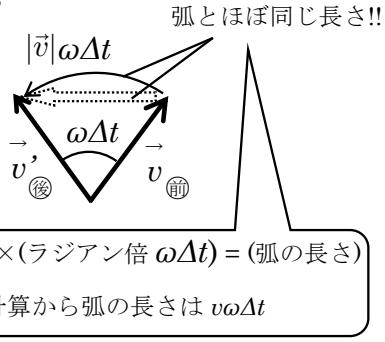
STEP 1　ベクトルの平行移動をしてケツを合わせる



STEP 2　後－前で速度の変化を求める



STEP 3　この太矢印の長さは簡単には求められないので近似する。



Point

太矢印の長さと、弧の長さはほぼ同じ!!
これは角度が小さければ小さいほど差は縮まる。
よっておさえておくべき近似の条件は
『Δt が非常に小さいとき』、『$|\overrightarrow{\Delta v}| \fallingdotseq v\omega\Delta t$』
変化ベクトルの大きさ≒弧の長さ

Δt 秒間での速度の変化の大きさが $v\omega\Delta t$ なので、加速度の大きさは、

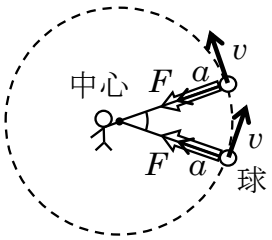
$a = \dfrac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t} = \dfrac{|\vec{v}|\omega\Delta t}{\Delta t} = |\vec{v}|\omega$　といえる。これに、

公式　$v = r\omega$ を代入すると、加速度 $a = v\omega = r\omega^2$

公式　$\omega = \dfrac{v}{r}$ を代入すると、加速度 $a = v\omega = \dfrac{v^2}{r}$ ともいえる。

これらはどちらも重要な公式となる。

また、『加速度は力の向きと同じ』という力学の基本から加速度の向きは、円の中心に向かっている。上図のベクトルの作図からも、円の中心向きということはわかる。この加速度を『向心加速度』という。



ここで、加速度と向心力の関係を考えてよう。
加速度と力の関係は、運動方程式 $ma = F$ で示せる。
a にさっきの公式を代入すると、

運動方程式 $mr\omega^2 = F$　または　$m\dfrac{v^2}{r} = F$

となり F の大きさを r と ω や v で示せる。

テーマ 6　円運動の解法

テーマ 5 までは、公式類の導出や整理を丁寧に行なったが、高校物理の円運動では、これらの公式を暗記して使うような流れとなる。等加速度運動の 3 公式を、導出はやったけれど、演習時は暗記して書き出しているのと同じ感覚である。

丸暗記してしまう公式

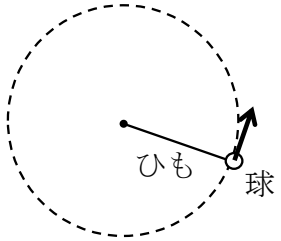
円運動の運動方程式　$mr\omega^2 = F$ 、 $m\dfrac{v^2}{r} = F$

この式と $ma = F$ を比べて

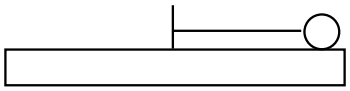
$\Rightarrow a = r\omega^2$ 、$a = \dfrac{v^2}{r}$ と書ける

$v = r\omega$、$\theta = \omega t$、$T = \dfrac{2\pi r}{v} = \dfrac{2\pi}{\omega}$、$T = \dfrac{1}{n}$ は定義や言葉の意味から書き出せるようにする。

問題 5　円運動の運動方程式



上からみた図



横からみた図

左図は、なめらかな台上でひもをつけた球を等速円運動させているのを、上からみた図と、横からみた図である。以下の問いに答えよ。

(1) 横からみた図に、物体に加わる力を全て書き出せ。

(2) 物体の質量を m、ひもの長さを l、張力の大きさを S、物体の速さを v として、物体の運動方程式をたてよ。

(3) 張力 S の大きさはいくらか。

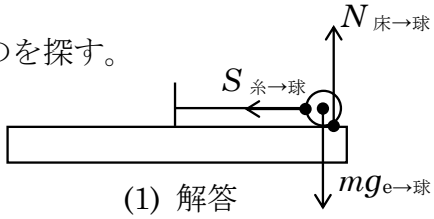
《誘導、穴埋め形式で典型的な解法を頭に入れよう》

(1) 力の見出しの方法を思い出す

STEP① 着目する系を丸で囲む。この作業で触れているものを探す。

STEP② 触れているものから受ける接触力を書く。

STEP③ 遠隔力である重力を書く



(1) 解答

重要『向心力がはたらく』という表現は間違い

円運動の分野で『向心力』という言葉を習った。しかし、問題 5 (1)の力の書き出しでは向心力という力を書いていない。円運動をするためには、必ず中心に向かって物体を引っぱる力が必要であるが、向心力という力がはたらいている訳ではなく、はたらいている力の中で、たまたま中心に向かっている力のことを向心力と呼ぶのだ。

問題 5(1)では、張力 S、垂直抗力 N、重力 mg の 3 種類がはたらいているが、球を中心向きに引っ張っているのは張力 S であるといえる。『張力 S が向心力となって円運動している』という表現が正しい言葉の使い方になるのだ。

今まで通り力を見出す ⇒ どれが向心力か見極める　という流れをマスターしよう。

問題 5 続き

(2) 円運動の運動方程式を立てる。

公式 ①　　F に向心力を代入 ⇒ ②

(3) 前問(2)の式を張力 S について解いて、

$S =$ ③

円運動の解法まとめ

円運動の解法は以下のようにまとめられる。

STEP① 力を書き出す。

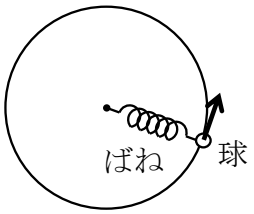
STEP② 向心力が何かを見極める。

STEP③ 運動方程式 $mr\omega^2 = F$、$m\dfrac{v^2}{r} = F$ の F に向心力を代入。

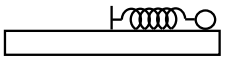
STEP④ 問題で聞かれているものについて解く。

問題 5 穴埋め解答　① $m\dfrac{v^2}{r} = F$　　② $m\dfrac{v^2}{l} = S$　　③ $(S =)\ m\dfrac{v^2}{l}$

問題 6 円運動の運動方程式



上から見た図



横から見た図

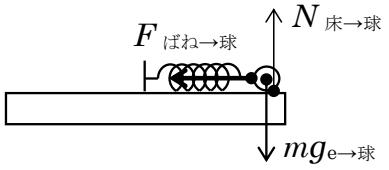
左図は、なめらかな台上でばね定数 k のばねをつけた球を、等速円運動させているのを、上からみた図と、横からみた図である。以下の問いに答えよ。

(1) 質量が 0.10 kg、速さが 2.0 m/s、ばねの長さが 0.50 m のとき、弾性力 F はいくらか。

(2) ばねの自然長が 0.30 m であった場合、ばね定数はいくらか。

問題 6 解答　(1) 0.80 N　(2) 4.0 N/m

問題 6 解説



(1) 力を見出すと、右図のように書ける。

この円運動は、$F_{ばね→球}$を向心力として円運動している。

円運動の運動方程式 $m\dfrac{v^2}{r} = F$ を立てると

$$0.10_{\mathrm{kg}} \cdot \frac{(2.0_{\mathrm{m/s}})^2}{0.50_{\mathrm{m}}} = F_{ばね→球}$$

$F_{ばね→球}$について解いて $F_{ばね→球} = 0.80$ N

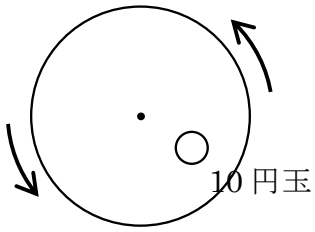
(2) 自然長が 0.30 m、全長が 0.50 m なので、ばねの伸び x は 0.50－0.30 = 0.20 m

フックの法則 $F = kx$ より、

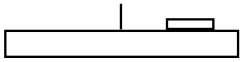
$$0.80_{\mathrm{N}} = k \times 0.20_{\mathrm{m}}$$

k について解いて　$k = 4.0$ N/m

問題 7 粗い面上での円運動



上から見た図



横から見た図

左図は、粗い面の回転台上に 10 円玉を置き、一定の角速度で台を回転させているのを、上からみた図と、横からみた図である。以下の問いに答えよ。

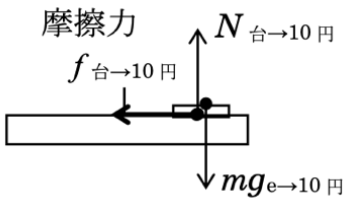
(1) 台の回転の角速度を ω、硬貨の質量を m、中心からの距離が r のとき、10 円玉にはたらく摩擦力 F の大きさはいくらか。また、角速度を 2 倍にすると、摩擦力 F の大きさは何倍になるか。

(2) 硬貨と台の間の静止摩擦係数を μ、重力加速度を g とする。角速度をだんだん大きくしていったとき、10 円玉が動き出す直前の角速度はいくらか。また、そのときの 10 円玉の速さはいくらか。r、g、μ を用いて答えよ。

問題 7 解答　(1) $mr\omega^2$ 、4 倍になる　(2) 角速度：$\sqrt{\frac{\mu g}{r}}$速度：$\sqrt{\mu rg}$

問題 7 解説

(1) はたらく力を書き出すと、右図のようになる。



この円運動は、$f_{台→10円}$を向心力として円運動している。

円運動の運動方程式 $mr\omega^2 = F$ を立てると

$$mr\omega^2 = f_{台→10円}$$

$f_{台→10円}$について解いて $f_{台→10円} = mr\omega^2$

ω が 2 倍になると、$mr\omega^2$ の大きさは 4 倍になる。よって、f は 4 倍になる。

補足 静止摩擦力の大きさは μN ではない

(1)では、摩擦力の公式 $f = \mu N$ を使わずに、円運動の運動方程式を用いている。これは、静止摩擦力の大きさは μN とは限らないからである。動摩擦力はどんな時でも、$f' = \mu' N$ なのだが、静止摩擦力は、面上をすべらないように柔軟に大きさを変えてはたらく性質があり、すべり出すギリギリのとき限定で $f = \mu N$ が成り立つのである。

今回の場合は、円運動するために必要な力の大きさ $mr\omega^2$ の分だけ、摩擦力がちょうど発生していることで、台上をすべらず、円運動しているのだ。

(2) 角速度を上げていくと、円運動をするのに必要な力 $mr\omega^2$ も大きくなっていく。そして、静止摩擦力は μN までは大きくなれるが、それ以上の力が必要なときはすべってしまう。よってすべってしまう時の角速度を ω_0 としたら、以下のように立式できる。

$$mr\omega_0^2 = \mu N$$

ここで、鉛直方向のつりあいより、$N = mg$ なので、

$$mr\omega_0^2 = \mu mg$$

$$\therefore\ \omega_0 = \sqrt{\frac{\mu g}{r}}$$

v については公式　$v = r\omega$ より

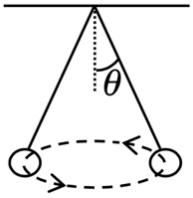
$$v = r \times \sqrt{\frac{\mu g}{r}}$$

$$\therefore\ v = \sqrt{\mu rg}$$

テーマ 7　円運動の中心を見つける

モデル

円錐振り子

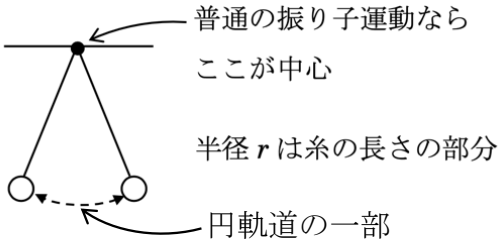


左図のように、振り子を奥に回しても、球は等速円運動をする。

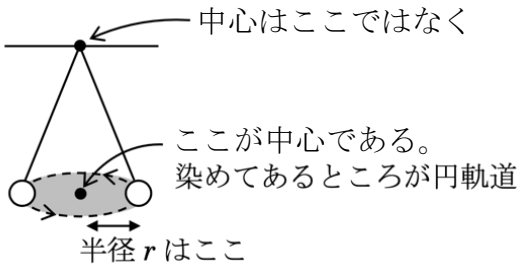
紐と球の動きが円錐の形なので、円錐振り子という。

ポイント①

円の中心を間違えるミスが多い

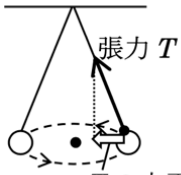


しかし、円錐振り子の運動では、



ポイント②

向心力について

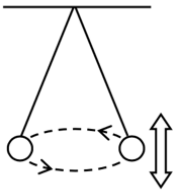


T の水平成分が、向心力となる。

＊ 向心力を出すために水平方向に分解しているが、『円の中心方向』に分解しているといったほうが正確である

ポイント③

鉛直方向の力について

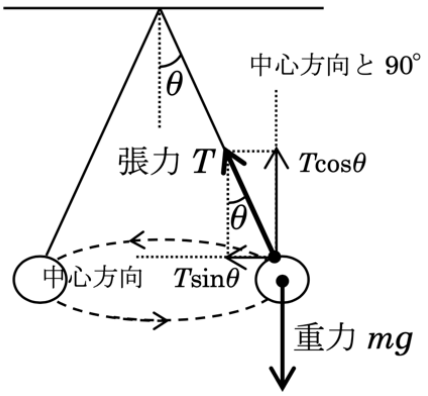


この方向は速度 0 で一定

⇒加速度が 0

⇒力がつりあっている。

これらを踏まえ、円錐振り子の向心力 F を分析すると、



STEP① はたらく力をすべて見出す。

⇒今回は重力 mg と張力 T

STEP② 円の中心方向と、それと 90°方向に力を分解する。(分ける向きが超重要)

STEP③ 向心力の大きさを求める。

向心力は円の中心に向かう力なので、$T\sin\theta$ となる。

上部ポイント③ 参照

また、中心方向と 90°の力はつりあっているので

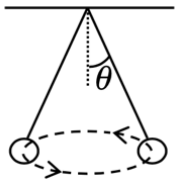
$$T\cos\theta = mg \quad \Rightarrow \quad T = \frac{mg}{\cos\theta}$$ とかける。

(向心力 F) は $T\sin\theta$ であり、これに代入して、

$$(\text{向心力 } F) = \frac{mg}{\cos\theta}\sin\theta = mg\tan\theta$$ といえる。

これにより、円運動の運動方程式を立てることができる。

問題 8　円錐振り子



左図は、質量 m の物体に長さ l の糸をむすび、水平面内で等速円運動をさせた。鉛直方向と糸のなす角 θ 、重力加速度の大きさを g とする。

(1) 張力の大きさを m、g、θ を用いて表せ。

(2) この円運動の向心力はいくらか。

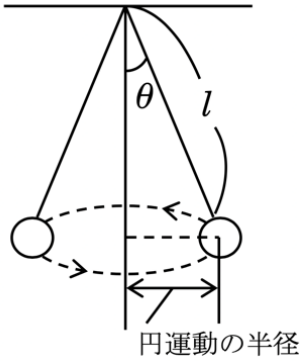
(3) 糸の長さが l のとき、球の角速度はいくらか。l、m、g、θ から必要なものを用いて表せ。

問題 8 解答　(1) $T = \dfrac{mg}{\cos\theta}$　(2) $mg\tan\theta$ ($mg\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ も可)　(3) $\sqrt{\dfrac{g}{l\cos\theta}}$

問題 8 解説

(1) 前ページ参照。(2) 前ページ参照。

(3)



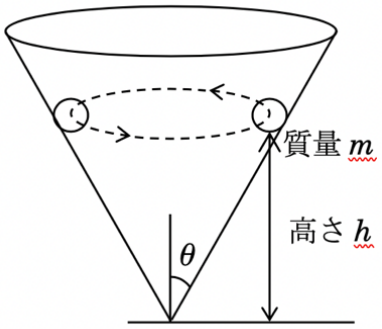
円運動の運動方程式を立てるが、半径が左図の場所であることがポイントである。半径 r は、$l\sin\theta$ といえる。

円運動の運動方程式 $mr\omega^2 = F$ より

$$m(l\sin\theta)\omega^2 = mg\tan\theta$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g\tan\theta}{l\sin\theta}} = \sqrt{\frac{g}{l\cos\theta}}$$

問題 9　円錐型容器内の運動



内面がなめらかで円錐形をした器の中で，質量 m の小さい物体がすべりながら，高さ h の水平面内の等速円運動をしている。円錐の母線が水平面となす角を θ 、重力加速度の大きさを g とする。

(1) 球にはたらく力をすべて書き出せ。

(2) 円軌道の中心を見極め、円の中心方向と、円の中心から 90 度方向に力を分解せよ。

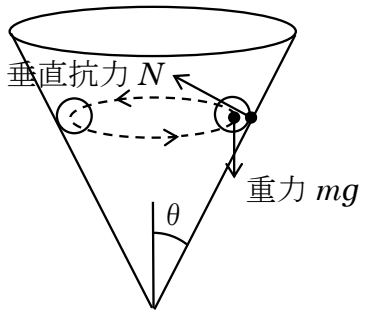
(3) 向心力の大きさを m、g、θ を用いて表せ。

(4) 球のある高さが頂点から h のとき、球の速さはいくらか。h、m、g、θ を用いて表せ。

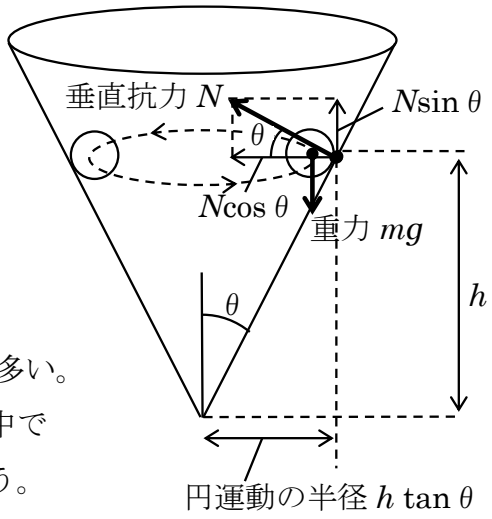
問題９解答　(1) 下図参照　(2) 下図参照　(3) $\frac{mg}{\tan\theta}$ ($mg\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$も可)　(4) $\sqrt{hg}$

問題９解説

(1)



(2)



＊『向心力』という力を書いてしまうミスが多い。
『向心力』という力はなく、はたらく力の中で
円の中心方向にはたらく成分を向心力という。

(3) 今回、円の中心方向にはたらいている力は、$N\cos\theta$ の部分である。
ここで、N が解答に使えないので、中心方向と 90° の向き（鉛直方向）の力のつりあいの式を利用して N を消去する。

$$N\sin\theta = mg \quad \Rightarrow \quad N = \frac{mg}{\sin\theta}$$

これを向心力である $N\cos\theta$ に代入

$$(\text{向心力}) = N\cos\theta = \frac{mg}{\sin\theta}\cdot\cos\theta$$

$$\therefore\ (\text{向心力}) = \frac{mg}{\tan\theta}$$

(4) 円運動の半径が $h\tan\theta$ であることに注意して、円運動の運動方程式 $m\frac{v^2}{r}=F$ を立てると、

$$m\frac{v^2}{h\tan\theta} = \frac{mg}{\tan\theta}$$

v について解いて

$$v^2 = hg$$

$$v = \sqrt{hg}$$

テーマ 8　鉛直面での円運動 ～糸がたるむ条件～

いままでは、水平面での円運動で、基本的に速さが一定だった。問題で聞かれることも『速度はいくらか』『周期はいくらか』というもので、これは

① 力を円の中心方向に分解

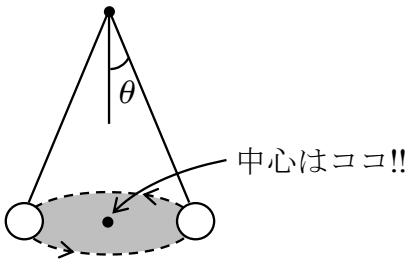
② 円運動の運動方程式　$mr\omega^2 = F$ 、$m\dfrac{v^2}{r} = F$　を立式

というお決まりのパターンであった。

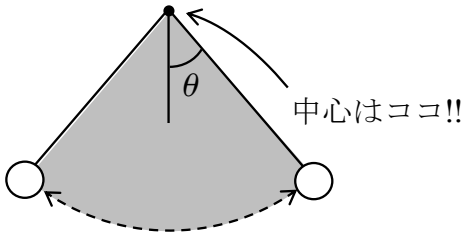
しかし、鉛直面での円運動では、速さが変化してしまうし、問題で聞かれる内容も変わってくる。水平面での円運動と、鉛直面での円運動の違いを意識して、モデルを見てみよう。

水平面でと鉛直面での円運動の例（円軌道の中心の見極めを気をつけよう）

水平面での円運動　　鉛直面での円運動



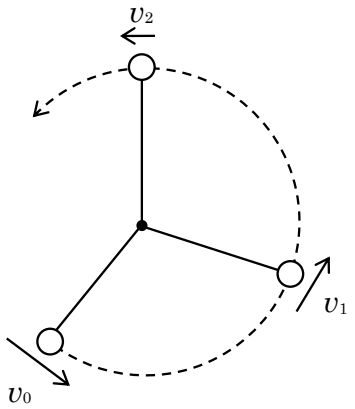
円錐振り子



単振り子（1 個の物体の振り子という意味）

円軌道（染めてある部分）が、水平面なのか、鉛直面なのかで、問題タイプが大きく異なるのだ。

モデル　単振り子をある高さから初速度 v_0 で押し出したところ 1 周した。



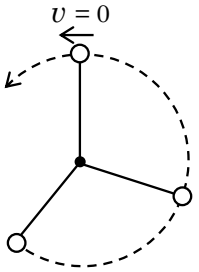
さて、こういったモデルで、v_1 や、v_2 を出す問題は今までも解いてきていた。

『力学的エネルギー保存則』の問題である。

それぞれの地点での高さがわかってしまえば、円運動の公式を使わずに、それぞれの速さを出せるのだ。

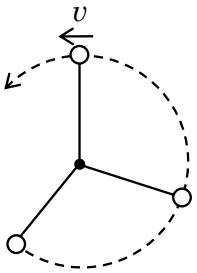
鉛直面での円運動では、『糸の張力』や、『球が円運動の頂点に到達するためには、v_0 の大きさはいくら以上でなければならないか』ということが聞かれるのだ。

ここで、超頻出の 2 択　『糸がたるまずぎりぎり 1 回転する条件はどちらか』



頂上でちょうど $v = 0$ となる

or



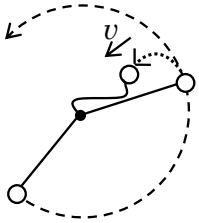
頂上で張力 T が 0 になる

これの正解は、『頂上で張力 T が 0 になる』なのだ。

そもそも、きれいな円をキープしたまま頂上に達し、そこで速度が 0 になることはないのだ。

イメージしてみよう

初速度が足りないと？

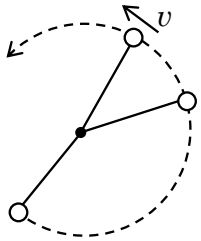


途中で糸はたるんで落ちてしまう。

ちなみにこの際も斜め下向きに速度はある。

⇒速度 0 なるタイミングがそもそもない。

綺麗な円を描いているときは？



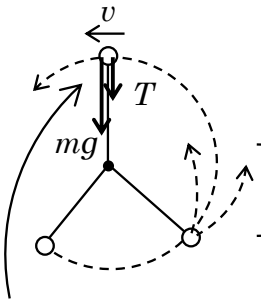
速度が十分あって勢いがある。

糸が切れたらどこかに飛んで行ってしまうところを、糸がピン!!と張って引き戻すことで、円軌道となるのだ。

頂点にいったとき糸がたるまない条件は、

頂点到達時、速さが十分に大きく、円運動に張力 T が必要なこと。となる。

『円運動に張力 T が必要なこと』という表現がポイント。



重要なイメージ

強く引きすぎると、円の内側へ。
引く力が足りないと、円の外側へ。

$F = m\frac{v^2}{r}$ で引くと
きれいな円軌道で進む。

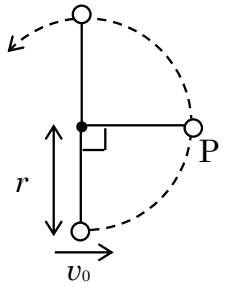
物体が頂点に到達したときの向心力の大きさは $mg + T$ となる。円の中心方向への力が複数あったら、その合計が向心力となるのだ。そして、このときの速さを v としたら、きれいな円運動に必要な力の大きさ F は、$F = m\frac{v^2}{r}$ となる。

そして、重力 mg の大きさが $m\frac{v^2}{r}$ に満たない場合、球は円軌道の外にいこうとするので、糸がピンとはり、張力 T がはたらく。

張力 T がはたらいた結果、$mg + T = m\frac{v^2}{r}$ を満たして、球はきれいな円軌道を描くのだ。

逆に v が小さすぎて、重力 mg の大きさが $m\frac{v^2}{r}$ よりも大きかった場合、引っ張りすぎで円軌道の内側に入ってしまい、糸がたるんでしまうのだ。

問題 10　鉛直面での円運動



長さ r の糸に質量 m の球をつけ、最下点で初速度 v_0 を与えて回転させたところ、円軌道を描き、最高点に達した。重力加速度の大きさを g とする。解答には r、m、v_0、g を用いよ。

(1) 最下点を通過するときの張力の大きさはいくらか。

(2) 点 P を通過するときの球の速さはいくらか。

(3) 点 P を通過するときの張力の大きさはいくらか。

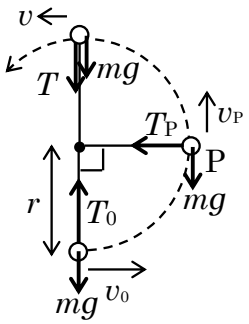
(4) 最高点での球の速さはいくらか。

(5) 糸がたるまずに球が一回転するための v_0 の条件を求めよ。

問題 10 解答　(1) $m\dfrac{v_0^2}{r}+mg$　(2) $\sqrt{{v_0}^2-2gr}$　(3) $m\dfrac{v_0^2}{r}-2mg$

(4) $\sqrt{{v_0}^2-4gr}$　(5) $v_0 \geqq \sqrt{5gr}$

問題 10 解説



重要ポイント　この問題では、左図のように力が加わる。

このとき向心力は、加わる力のうち、円の中心方向にはたらく力であり、複数ある場合は、その合計となる。よって、

最下点での向心力は、T_0-mg

点 P での向心力は、T_P

最高点での向心力は、$T+mg$ となる。

(1) 最下点での円運動の運動方程式 $m\dfrac{v^2}{r}=F$ より、

$$m\frac{v_0^2}{r}=T_0-mg$$

T_0 について解いて、

$$T_0=m\frac{v_0^2}{r}+mg$$

問題 10 解説続き

(2) 点 P での速さを v とおき、㊀を最下点、㊁を点 P として、力学的エネルギー保存の式を立てると、

㊀エネ ＝ ㊁エネ

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_P^2 + mg\times r$$

v_P について解いて

$$v_P = \sqrt{{v_0}^2 - 2gr}$$

(3) 点 P での円運動の運動方程式 $m\frac{v^2}{r} = F$ より、

$$m\frac{v_P^2}{r} = T_P$$

$v_P = \sqrt{{v_0}^2 - 2gr}$ を代入し、T_P について解いて、

$$T_P = m\frac{v_0^2}{r} - 2mg$$

(4) 最高点での速さを v とおき、㊀を最下点、㊁を最高点として、力学的エネルギー保存の式を立てると、

㊀エネ ＝ ㊁エネ

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mg\times 2r$$

v について解いて

$$v = \sqrt{{v_0}^2 - 4gr}$$

(5) 頂点にギリギリ達する条件の v_0 を求め、それより大きければ OK と考えると条件式を書きやすい。最高点では、（重力 mg）＋（張力 T）が向心力となっている。

円運動の運動方程式 $m\frac{v^2}{r} = F$ より

$$m\frac{{v_0}^2-4gr}{r} = mg + T$$

ここで、ギリギリ最高点に達するときは $T = 0$ であると考えて

$$m\frac{{v_0}^2-4gr}{r} = mg$$

v_0 について解いて、

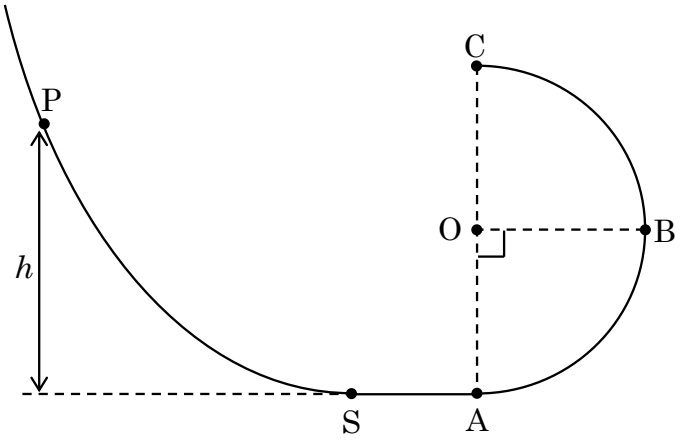
$$v_0 = \sqrt{5gr}$$

v_0 がこの値のとき、ギリギリ最高点に到達するので、最高点を通過するための条件は、

$$v_0 \geqq \sqrt{5gr}$$

問題 11　鉛直面での円運動

半径 r の内面のなめらかな半円筒が、縦断面 AC を鉛直にして固定され、下端 A でなめらかな水平面 AS に続いている。水平面 AS から先には、なめらかな曲面 SP が続き、高さ h の点 P から、質量 m の小球を初速度 0 ですべらせる。重力加速度の大きさを g とする。



(1) 球が点 A を通過する直前の垂直抗力の大きさ N_0 はいくらか。

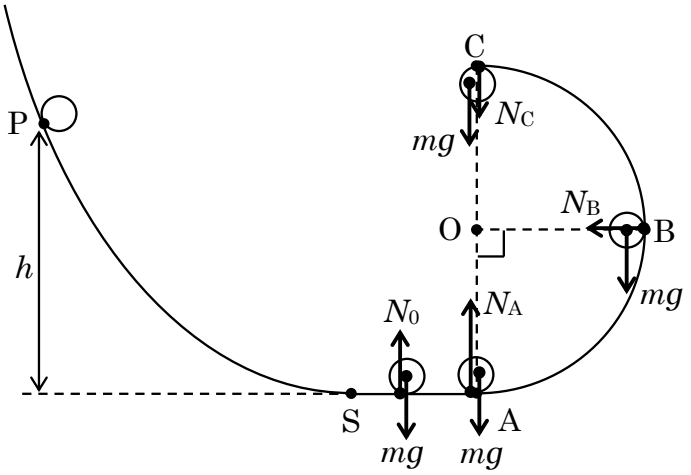
(2) 球が点 A を通過した直後の垂直抗力の大きさ N_A はいくらか。

(3) 球が点 B を通過した直後の垂直抗力の大きさ N_B はいくらか。

(4) 球が点 C から飛び出すためには、h はいくら以上あればいいか。

問題 11 解答　(1) mg　(2) $mg(\frac{2h}{r}+1)$　(3) $\frac{2mg(h-r)}{r}$　(4) $h \geqq \frac{5}{2}r$

問題 11 解説　力を書き出すと下図のようになる。力を書き出すのは習慣としよう。



(1) 点Aを通過する直前と直後で何が違うかを理解しよう。

点 A 通過前は、等速直線運動をしているので、鉛直方向の力はつりあっている。

点 A を通過後は、N_A-mg が向心力となって、円運動をしている。N_A が mg より大きくなるのだ。それを踏まえて考えると、(1)の解答は、$N_0 = mg$

(2) 前問(1)の解説の通り、点 A 通過直後は直線運動から円運動に変わるので、つりあいではなく円運動の運動方程式 $m\frac{v^2}{r} = F$ を立てる。向心力 F は N_A-mg なので

$m\frac{v_A^2}{r} = N_A-mg$　　（点 A での速さを v_A とおく）

ここで v_A は、点 P と点 A での力学的エネルギーの保存より求められる。

$mgh = \frac{1}{2}mv_A^2$

$\therefore v_A^2 = 2gh$　　←運動方程式の v_A^2 に代入するので、v_A に直さなくてもよいのだ。

問題 11 解説(2)の続き

これを運動方程式 $m\frac{v_A^2}{r}=N_A-mg$ に代入すると、

$$m\frac{2gh}{r}=N_A-mg$$

N_A について解いて

$$N_A=mg(\frac{2h}{r}+1)$$

(3) 点 B での速さ v_B を点 P と点 B での力学的エネルギーの保存から求めると、

$$mgh=\frac{1}{2}mv_B^2+mgr \qquad \therefore\ v_B^2=2g(h-r)$$

円運動の運動方程式を立てる。B 点での向心力 F は N_B のみなので、

$$m\frac{v_B^2}{r}=N_B$$

$v_B^2=2g(h-r)$を代入して、

$$m\frac{2g(h-r)}{r}=N_B \qquad \therefore\ N_B=\frac{2mg(h-r)}{r}$$

(4) 張力が 0 になったときに糸がたるむのと同様に、斜面をつたうような円運動では、垂直抗力 N が 0 になるときに斜面から離れる。垂直抗力は、物体と面が押し合うことで発生する力なので、$N=0$ になるときは、押し合いが起きておらず、面から離れているのである。ギリギリ到達するのは点 C で $N=0$ となるときであり、その時を考えて条件式を立ててみる。

まずは、速さ v_C を点 P と点 C での力学的エネルギーの保存から求めると、

$$mgh=\frac{1}{2}mv_C^2+mg\times 2r \qquad \therefore\ v_C^2=2gh-4gr$$

円運動の運動方程式 $m\frac{v^2}{r}=F$ を立てる。点 C での向心力 F は N_C+mg なので、

$$m\frac{v_C^2}{r}=N_C+mg$$

これに $v_C^2=2gh-4gr$ を代入すると

$$m\frac{2gh-4gr}{r}=N_C+mg$$

$N_C=0$ のときの h を求める。

$$m\frac{2gh-4gr}{r}=mg \qquad \therefore\ h=\frac{5}{2}r$$

この h のとき点 C にギリギリ到達するので、点 C を通過するためには、この値よりも h が大きければよい。よって $h\geqq\frac{5}{2}r$ が条件となる。

鉛直面での円運動の解法まとめ

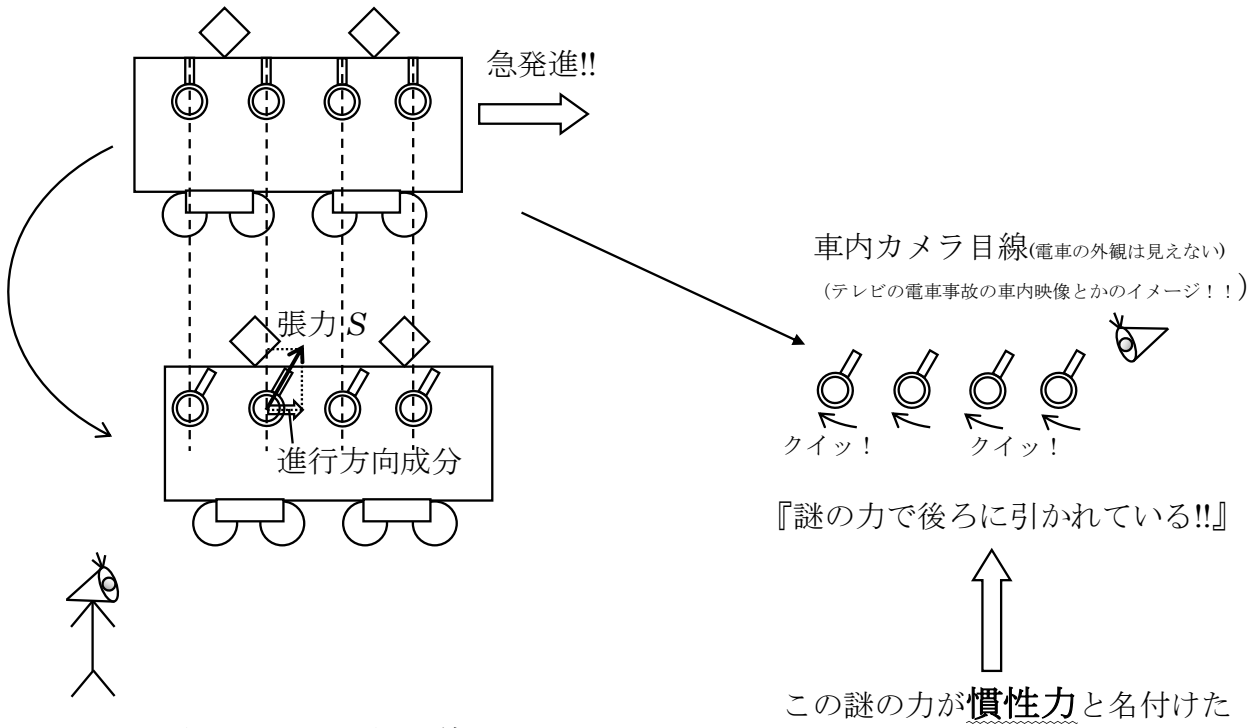
STEP① 力学的エネルギー保存則を用いて、指定の場所の v を出す。

STEP② 円運動の運動方程式 $m\frac{v^2}{r}=F$、（$mr\omega^2=F$）を立てる。

STEP③ 糸がゆるむ ⇒ $T=0$　　面から離れる⇒ $N=0$

テーマ 9　慣性力

たとえば、電車が急発進したときのつり革の状況を、『電車の外にいる人』と、『電車内に取り付けたビデオカメラ』の 2 つの視点から見てみよう。



外にいる人（地面に立つ人）目線

『つり革が、発進についていけず、置いてかれている!!』

⇒『斜めになったことで、張力 S が斜め前にはたらき、

　　それの進行方向成分の力により加速度が生じる!!』

⇒『つり革は電車と共に進んでいく』

外から見ると、いままで学んできた力だけで、きちんと運動を説明できるが、中から見ると、今まで学んできた力だけでは説明できない力が出てくる。この力を慣性力というのだ。

また、それぞれの見方に名前がついている。

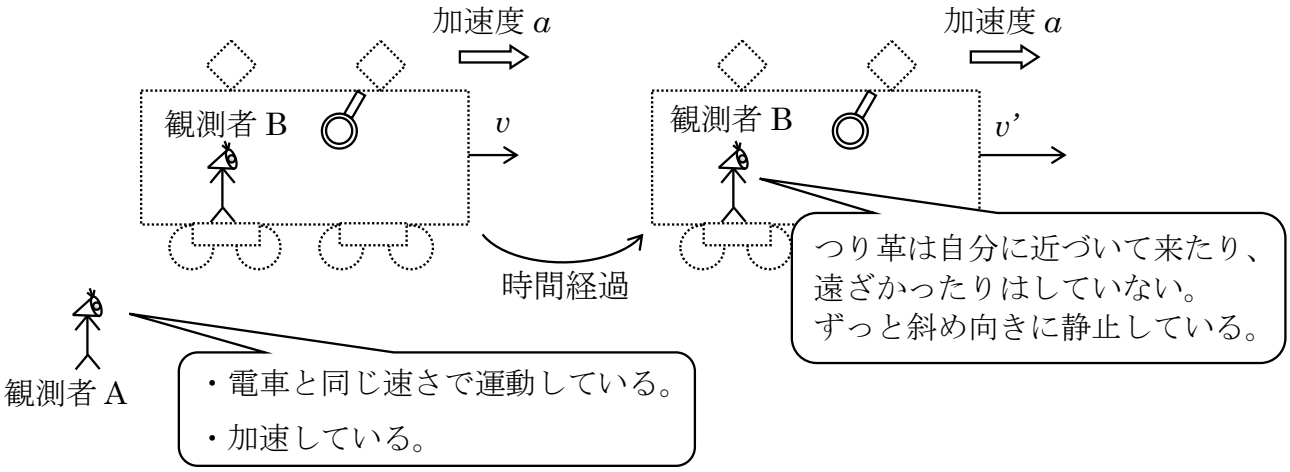
加速度運動している立場から物体の運動を考える見方（車内カメラ視点）⇒『非慣性系』

静止している立場から運動を考える見方（地面・神視点）⇒『慣性系』

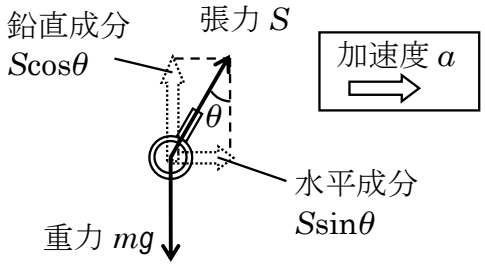
大学物理で本格的に出てくる言葉である。頭の片隅に入れておこう。

《モデル》慣性力の大きさ

観測者 A と B が、加速度 a で加速中の電車内で、質量 m のつり革を観察している。



A 視点での力の解析（慣性系）



鉛直方向の力はつりあっている。

$mg = S\cos\theta$

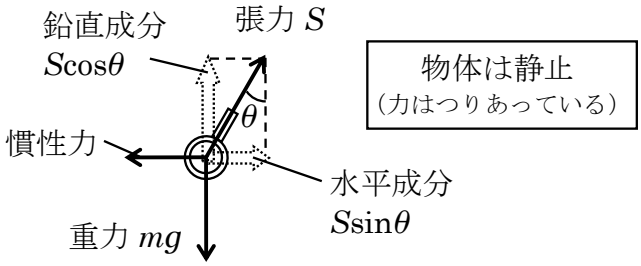
水平方向には $S\sin\theta$ の力がはたらき、

$ma = S\sin\theta$

という関係を書き出せる。

（運動方程式 $ma = F$）

B 視点での力の解析（非慣性系）



B 視点では、静止しているので、どちらの方向でもつりあっている。

鉛直方向のつり合いの式はA視点と同じく、

$mg = S\cos\theta$

水平方向は、$S\sin\theta$ がはたらくが、これだけだとつりあいの式は立てられないので、逆向きに謎の力がはたらいているとみなすのだ。

それが慣性力である。

立式をすると、

(慣性力) = $S\sin\theta$ といえる。

中の人目線では、謎の力『慣性力』がはたらいていないと、観察される物理現象に説明がつかないのだ。

A 視点の情報から、$S\sin\theta = ma$ といえ、B 視点の情報から、(慣性力) = $S\sin\theta$ といえる。

このことから慣性力の大きさは『(慣性力) = ma』 といえる。これが慣性力の公式となる。

慣性力のポイント

①　慣性力（$= ma$）は、**観測者が加速度運動しているときのみ発生**する。

・先ほどのモデルだと、観測者 A の視点だと発生せず、観測者 B のときは発生している。

・電車が一定の速度だとつり革は傾かない。加速度が 0 の運動で慣性力（$= ma$）の大きさは 0 なのだ。

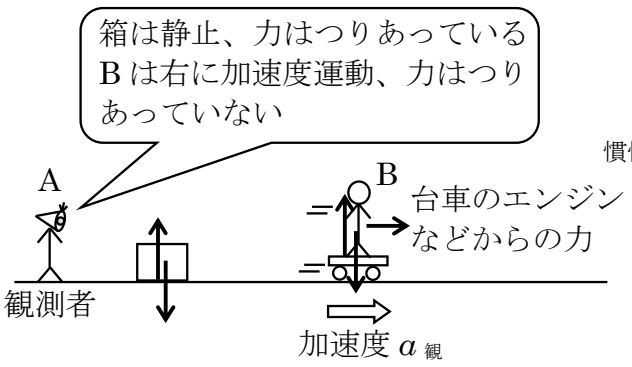
（エレベーターの動き出しに、ググッと力がかかるのも慣性力。エレベーターが一定の速度になったときは、そのググッがなくなり、減速のとき、フワッとまた慣性力がはたらく。）

②　慣性力の向きは、**観測者の加速度と反対向きで、大きさは ma** である。

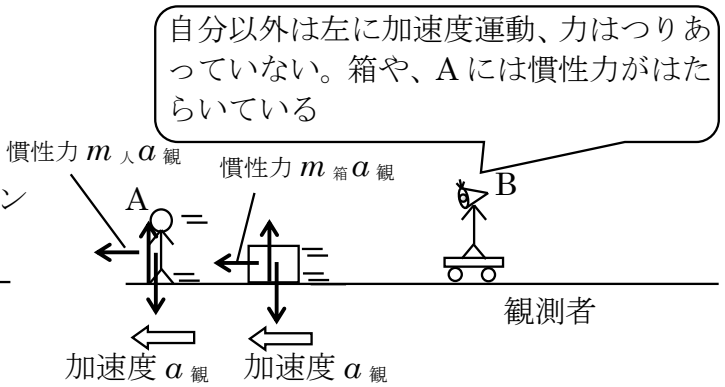
注：m は物体の質量、a は観測者の加速度!!

たとえばこんな例

◎A 視点

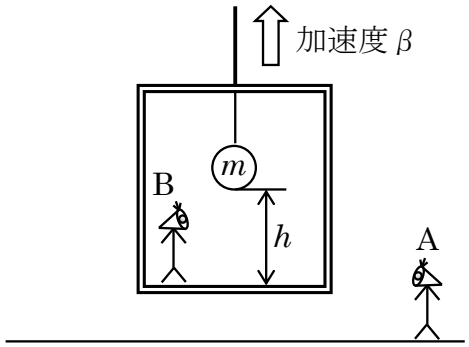


◎B 視点



問題 12　慣性力

図のように質量 m の小球が、エレベーターの天井から軽い糸でつるされており、その床からの高さは h である。エレベーターは加速度 β で上昇している。重力加速度の大きさを g として、以下の問いに答えよ。



(1) 外部の静止している観測者 A の立場で式を立て、このときの糸の張力を求めよ。

(2) エレベーターに乗った観測者 B の立場で式を立て、このときの糸の張力を求めよ。

（この答えが(1)と同じにならないとおかしい。糸の張り具合は、外から見た人が見ても、中から見た人でも変わらないはずなのだ。）

(3) エレベーターの加速度は同じままで静かに糸を切る。糸を切ってから、小球がエレベーターの床に落下するまでの時間はいくらか。観測者 B の視点から求めよ。

（A の視点でも求められる。余力がある人はやってみよう。）

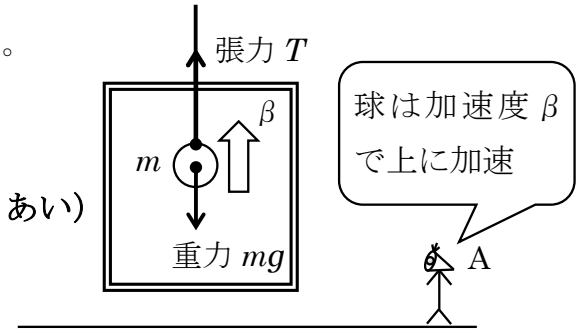
問題 12 解説　誘導穴埋め形式の解説で見ていこう。

(1) 力学の基本は

① はたらく力をすべて書き出す。

② $ma = F$ の式を立てる（$a = 0$ ならつりあい）

まずははたらく力をすべて書き出そう。



力の書き出し方　２ステップ

注目物体を丸で囲み、触れているものを探して、接触力を書く。
その後、重力などの遠隔力を書く。

次に、$ma = F$ の式を立てる。

A から見ると、球は加速度 β で上向きに加速度運動しているので、

①　　とかける。

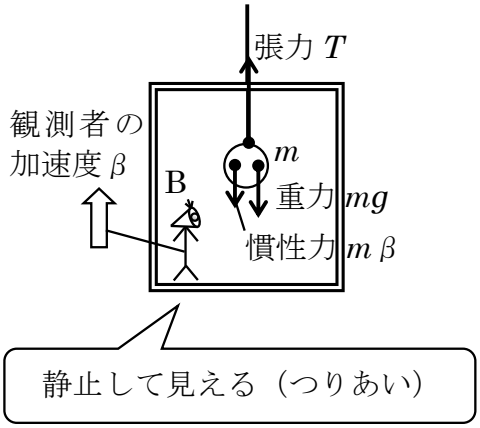
よって、張力 T の大きさは　②　　である。

(2) B から見た時も、力学の基本は

① はたらく力をすべて書き出す。

② $ma = F$ の式を立てる（$a = 0$ ならつりあい）

で変わらない。しかし、観測者が加速度運動しているので、『①の力を見出す』で、『接触力』『遠隔力』のあとに**『慣性力』**を加えなければならないのだ。



力の書き出し方　特別版

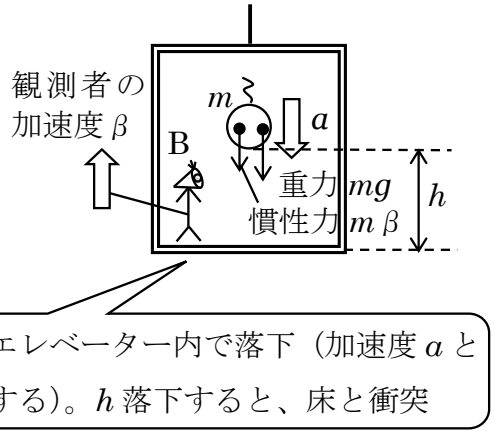
注目物体を丸で囲み、触れているものを探して、接触力を書く。
その後、重力などの遠隔力を書く。
New!! 観測者が加速度運動していたら、慣性力($ma_{観}$)を書く。（慣性力は $a_{観}$ と逆向き）

次に $ma = F$ の式を立てる。今回は、静止して見えるので $a = 0$ で、つりあいの式となり、

③　　とかける。

よって、張力 T の大きさは　④　　である。

(3) B(観測者)は加速度 β で加速度運動しているので、前問(2)同様に、力の見出しの際に『慣性力』を書き足す必要がある。そこに気をつけると、下図のように状況を書き出せる。



そして、運動方程式をたてると、

⑤ [　　] となる。

この式から、B から見た球の加速度 a は

⑥ [　　] となる。

そして、糸を切ってから球が床に衝突するまでの運動は、B 視点では、

『球が初速 0 で落下し始め、加速度 a で加速度運動し、h 落下したときに床と衝突』と説明できる。

さて、落下までの時間を t と置き、等加速度運動の公式 $x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ を用いて立式すると、

$$h = 0 + \frac{1}{2}at^2$$

$$h = 0 + \frac{1}{2}(\beta + g)t^2$$

これを t について解いて

$$t = \sqrt{\frac{2h}{\beta + g}} \quad \cdots(3)\text{解答}$$

穴埋めの解答　＊(3)を A 視点で解く方法を次ページで紹介

① $m\beta = T - mg$　② $m(\beta + g)$　③ $T = m\beta + mg$　④ $m(\beta + g)$

⑤ $ma = m\beta + mg$　⑥ $a = \beta + g$

Point　慣性系と非慣性系

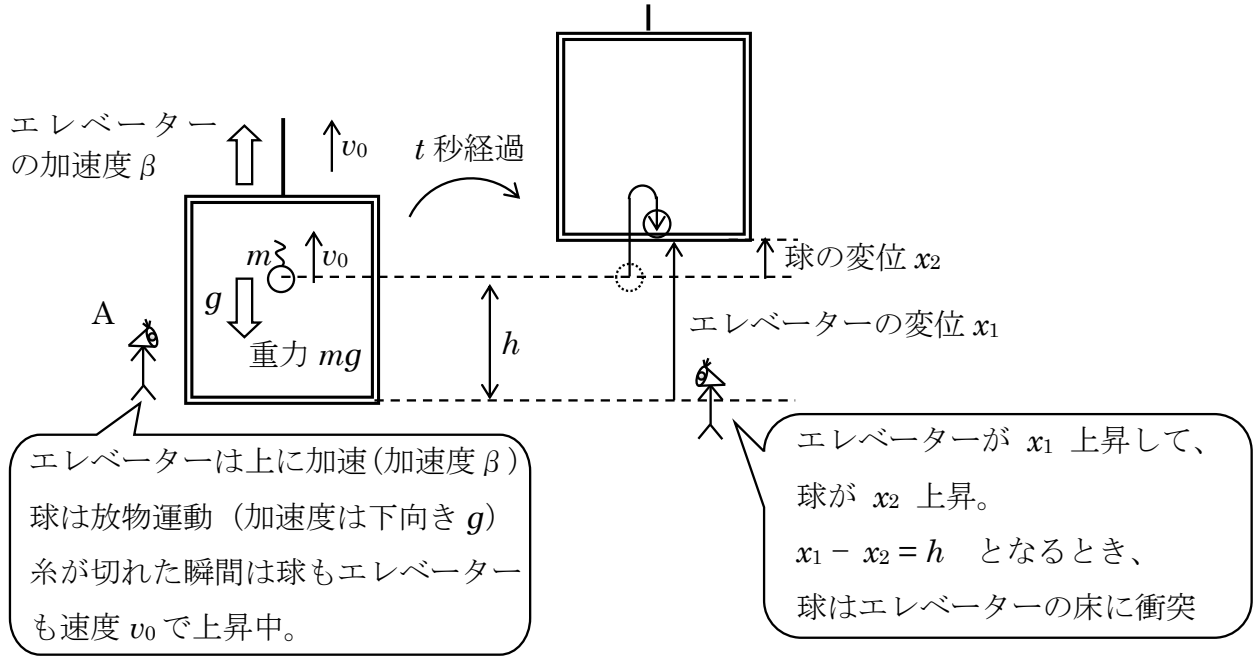
慣性系	非慣性系
本来の力のみ	慣性力がはたらく
観測者は静止 or 等速直線運動（地面・神視点）＊動いていても等速運動ならこちら	観測者は等速度運動（加速している人視点）

慣性力は
向き　:『観測者の加速度と逆向き』
大きさ:『ma』
（m は見てる物体の質量
a は観測者の加速度）

問題を解く前に、必ずどの観測者の立場で考えるかを確認せよ！！

問題 12 別解　＊(3)を A 視点で解くとどうなるか。

まずは、A 視点で、球が床に落ちる状況を作図してみる。



上向きを正として、x_1、x_2 について考えてみる。

x_1 に ついて (エレベーターの移動)

初速度 $v_0 = v_0$、加速度 $a = \beta$ 、落下までの時刻 $t = t$ として、変位 x_1 を計算すると、

$$x_1 = v_0 t + \frac{1}{2}\beta t^2$$

x_2 について (球の移動)

初速度 $v_0 = v_0$、加速度 $a = -g$、落下までの時刻 $t = t$ として、変位 x_2 を計算すると、

$$x_2 = v_0 t + \frac{1}{2}(-g)t^2$$

ここで、h との関係は、

$$x_1 - x_2 = h$$

よって

$$v_0 t + \frac{1}{2}\beta t^2 - \{v_0 t + \frac{1}{2}(-g)t^2\} = h$$

t について解いて

$$t = \sqrt{\frac{2h}{\beta + g}}$$

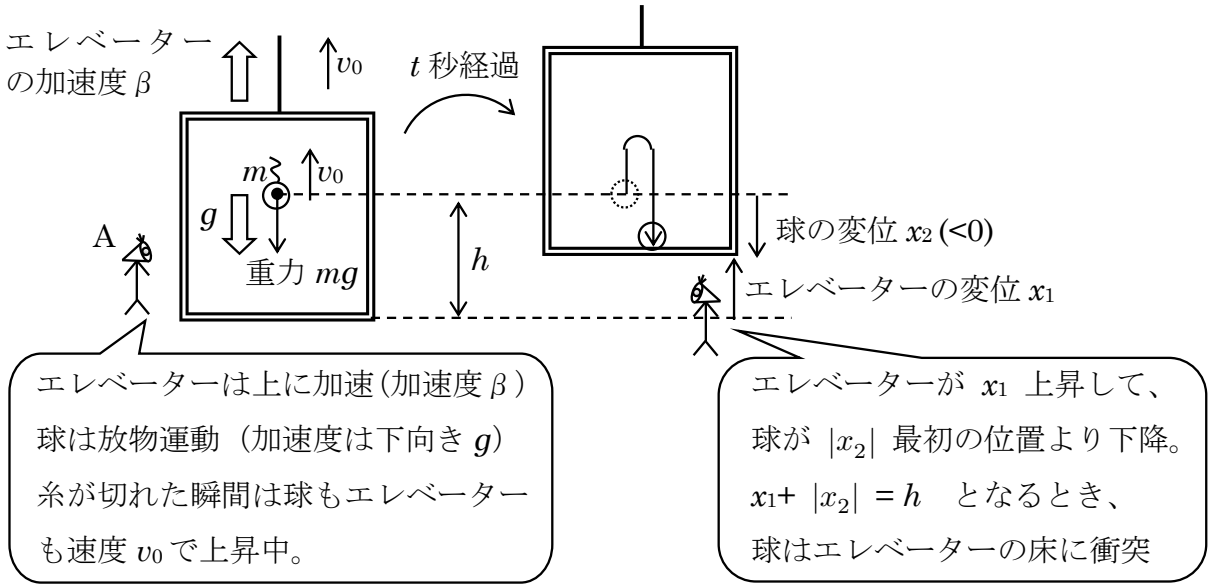
このように、A 視点でも(3)の結果を得られる。

しかし、B 視点の方が、動く物体が 1 つになるので、処理が圧倒的に楽になる。慣性力を使った方が楽かどうかを見極めて、観測者をどこに立たせるか考えよう。

慣性力に慣れるまでは、両方の出し方で求める練習をするのがおすすめである。

発展 x_2 が負になる場合はどうなるか

例えば v_0 が小さいときなどは、$x_2<0$ となり、下図のような運動となる場合がある。



この想定では h に関する式が $x_1+|x_2|=h$ に変化するのだ。

x_1 について (エレベーターの移動)

x_1 は変わらず、

$$x_1 = v_0 t + \frac{1}{2}\beta t^2$$

$|x_2|$ について (球の移動)

この想定の場合、変位 x_2 はマイナスの値なので、大きさ（絶対値）を出すためには、計算結果にマイナスをかけないといけない。

$$x_2 = v_0 t + \frac{1}{2}(-g)t^2$$

よって

$$|x_2| = -x_2 = (-v_0 t) + \frac{1}{2}gt^2$$

ここで、h との関係は、

$$x_1 + |x_2| = h$$

よって

$$v_0 t + \frac{1}{2}\beta t^2 + \{(-v_0 t) + \frac{1}{2}gt^2\} = h$$

t について解いて

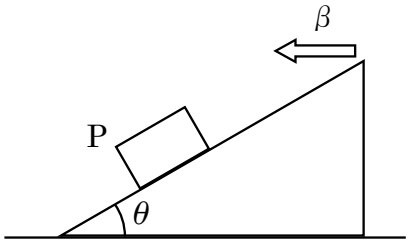
$$t = \sqrt{\frac{2h}{\beta + g}}$$

このように、計算結果は変わらず求めることができる。

絶対値の処理をすると、このようなややこしさが出てくるので、**変位の正負がどちらもあり得る場合は、正の値をとるときの作図を行う**ようにするのがおすすめである。

問題 13　動く斜面上での運動

なめらかな傾角 θ の三角台に質量 m の小物体 P を置き、三角台を左に一定の加速度で動かす。重力加速度の大きさを g とし、以下の問いに答えよ。



(1) P が斜面上をすべらなかったとき、三角台の加速度 β はいくらか。

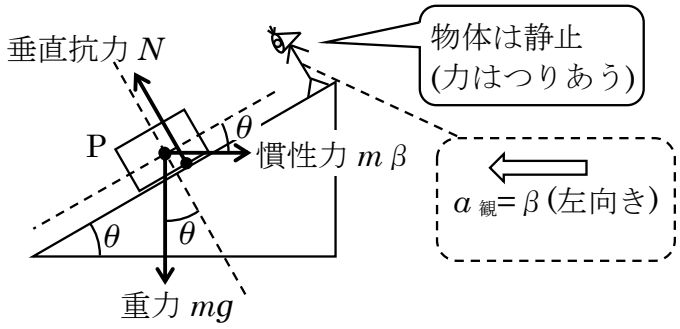
(2) 前問(1)のとき、P が三角台から受ける垂直抗力 N の大きさはいくらか。

(3) 三角台の加速度を $\beta'(>\beta)$ にすると、P が斜面を上り始めた。三角台の加速度を変えてから P が斜面を l 上るのに要する時間 t はいくらか。

問題 13 解答　(1) $g\tan\theta$　(2) $\dfrac{mg}{\cos\theta}$　(3) $\sqrt{\dfrac{2l}{(\beta'\cos\theta - g\sin\theta)}}$

問題 13 解説

(1) 三角台上に観測者をおいてみる。その際は、慣性力がはたらくことに注意する。



左図のように作図でき、三角台上の人からは静止しているといえるので、つりあいの式が立てられる。

斜面垂直方向のつりあい

$N = mg\cos\theta + m\beta\sin\theta$　… (i)式

斜面平行方向のつりあい

$mg\sin\theta = m\beta\cos\theta$　… (ii)式

(ii)式より、$\beta = g\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = g\tan\theta$

((i)式は(2)で使う)

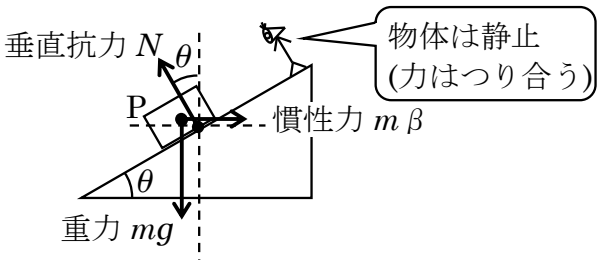
(2) (i)式に、$\beta = g\tan\theta$ を代入して、

$$N = mg\cos\theta + m(g\tan\theta)\times\sin\theta$$

$$N = mg\cos\theta + mg\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}$$

$$N = mg\left(\frac{\cos^2\theta}{\cos\theta} + \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\right) \qquad \therefore\ N = \frac{mg}{\cos\theta}$$

別解(2)　つりあいの式は、どの向きに力を分解しても成立しているはずである。分解の方向を工夫すると、不明数 β が登場しないような立式ができて、計算が少なくて済む。



鉛直方向と水平方向に分解

鉛直のつりあい　$N\cos\theta = mg$　…(i)式

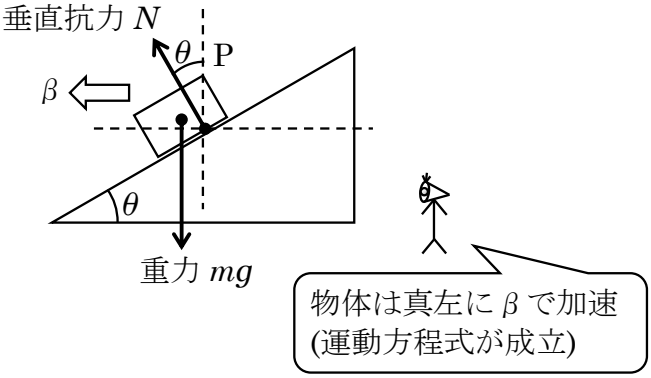
水平のつりあい　$N\sin\theta = m\beta$

(i)式より、$N = \dfrac{mg}{\cos\theta}$

問題 13 解説続き

別解 (1)(2) 地上に観測者がいる場合を考える。

地上の観測者をおいた場合、慣性力ははたらかず、物体は台と共に加速することがポイント。



そして、加速度運動をするときは、加速する方向に軸をとる。そうすることで、問題で出てくる文字 β で、運動方程式を立てることができるのだ。

普段は斜面に沿った向きに軸をとっているので、この軸の取り方は意識をしないと中々できない。気をつけよう。

立式をして、問題を解いてみる。

加速方向(水平) → 運動方程式

$m\beta = N\sin\theta$ …(i)式

加速と 90° 方向(鉛直) → つりあいの式

$mg = N\cos\theta$ …(ii)式

(ii)式より、$N = \dfrac{mg}{\cos\theta}$ …(2)の解答

(i)式の N にこれを代入して、

$m\beta = \dfrac{mg}{\cos\theta} \cdot \sin\theta$

β について解いて

$\beta = g\tan\theta$ …(1)の解答

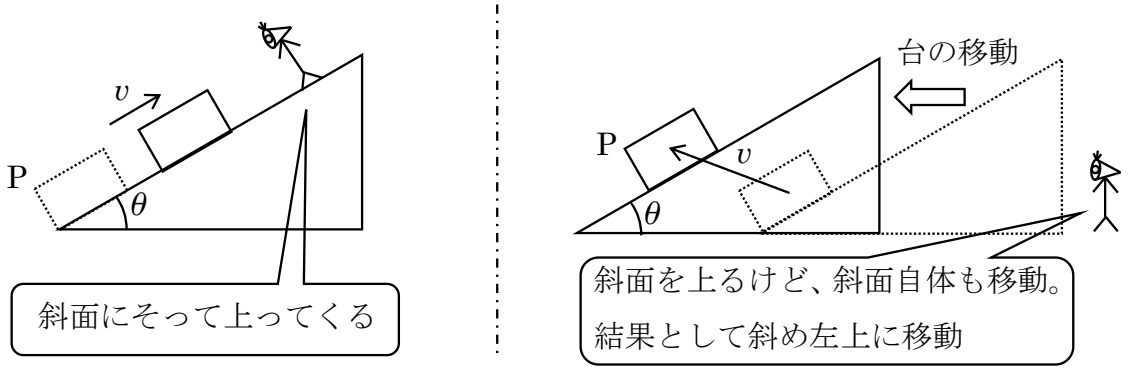
Point

静止 or 等速運動 → 軸はどの向きでも OK

加速度運動 → 軸は加速する方向にとる

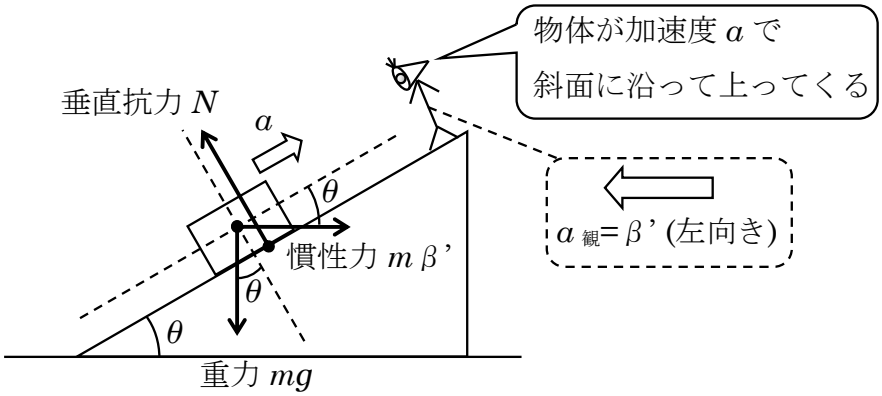
問題 13 解説続き

(3) 三角台上にいる観測者から見ると、小物体 P が斜面を登ってくる運動に見える(下図左)。
地上にいる人から見ると、小物体 P が斜め左上に移動する運動に見える(下図右)。



上図右のように地上から見ると、運動方向と角度 θ の関係が立式しづらく、問題を解くのが非常に難しくなってしまう。なので、今回は、三角台上の観測者を立たせて解く(上図左)。

三角台上の観測者は加速度運動しているので、物体には慣性力がはたらく。
それに気をつけて、力の書き出しを行うと下図のようになる。



加速方向と、加速方向と 90° に力を分解して、立式を行う。

加速方向(斜面平行) → 運動方程式

$$ma = m\beta'\cos\theta - mg\sin\theta \cdots ①式$$

加速と 90° 方向(斜面垂直) → つりあい

$$N = mg\cos\theta + m\beta'\sin\theta$$

(今回はこの式は使わない)

①式を a について解いて

$$a = \beta'\cos\theta - g\sin\theta$$

この加速度で l だけ移動するまでの時間を求める。

公式 $x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ より

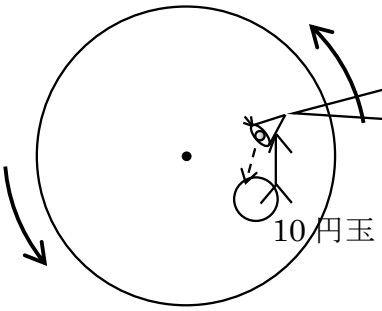
$$l = 0 + \frac{1}{2}(\beta'\cos\theta - g\sin\theta)\,t^2$$

t について解いて

$$t = \sqrt{\frac{2l}{(\beta'\cos\theta - g\sin\theta)}}$$

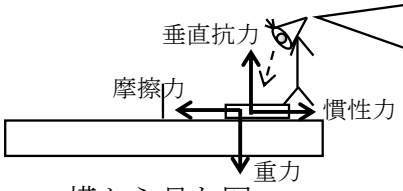
テーマ 10　遠心力

さて、円運動を慣性力をつかって考えてみよう。例えば、回る台上に置いた 10 円玉の上に、観測者をのせて考えてみる。



上から見た図

私は円運動をしているので、
円の中心に向かって$\frac{v^2}{r}$（$=r\omega^2$）で加速している($a_{観}$)。
また、硬貨は静止している。
（常に足元にあり、動いていない。）



横から見た図

私から見ると慣性力 ma ($=m\frac{v^2}{r}$ or $mr\omega^2$)が円の中心から外側に向かってはたらく。
そして、それと摩擦力がつりあい静止している。

このように説明ができ、この慣性力には特別な名前がついていて、『**遠心力**』と呼ぶのだ。

摩擦力をfとすると、それが遠心力 $m\frac{v^2}{r}$ ($mr\omega^2$)とつりあうので、

(摩擦力) $f = m\frac{v^2}{r}$ ($mr\omega^2$)というつりあいの式が立てられ、fを v や ω で表すことができる。

結果として、円運動の解法には、以下の２通りがあるとまとめられる。

① 地上視点・神視点で、運動方程式 $mr\omega^2 = F$ 、$m\frac{v^2}{r} = F$を立てる。

② 一緒に運動する人視点で、遠心力($m\frac{v^2}{r}$ or $mr\omega^2$)を力の作図に加えて、つりあいの式を立てる。

公式　遠心力

円運動で、一緒に円運動する観測者から見たときのみ、はたらく力。

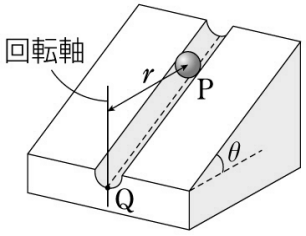
大きさは (遠心力) $= m\frac{v^2}{r} = mr\omega^2$　である。（暗記して適用する公式）

＊『向心力』は、はたらく力のうち円の中心に向かう力を呼ぶときの言葉。力の名前ではない。
『遠心力』は、実際にはたらく力の名前。　名前が似ているのに、意味が全然違うので注意。

(例文)　・摩擦力を向心力として円運動している。
　　・物体には摩擦力と遠心力がはたらき、つりあっている。

問題 14　回転する斜面上での円運動

図に示したような摩擦のない溝をもつ、水平面となす角が θ の斜面台を、点 Q を通る鉛直な軸の回りに一定の角速度 ω で回転させる。この回転軸から距離 r の点 P に置かれている質量 m の物体が、滑り落ちないための最小の角速度を求めよ。ただし、重力加速度の大きさを g とする。



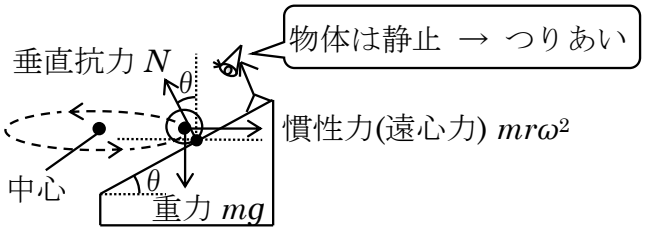
問題 14 解答　$\sqrt{\dfrac{g}{r}\tan\theta}$

問題 14 解説　滑り落ちないための最小の角速度、のときは、落ちることもなく、上ることもなく、水平面の円運動を行うということから考える。

物体と共に回転する観測者の視点と、地上の観測者の視点の両方で解いてみよう。

《物体と共に回転する観測者の場合》

慣性力（遠心力 $mr\omega^2$）がはたらくことに注意して、力を書き出し、つりあいの式を立てる。



円運動では、円の中心向きに軸をとろう。

円の中心方向(水平)のつりあい

$N\sin\theta = mr\omega^2$ … ①式

円の中心と 90°　方向(鉛直)のつりあい

$N\cos\theta = mg$ … ②式

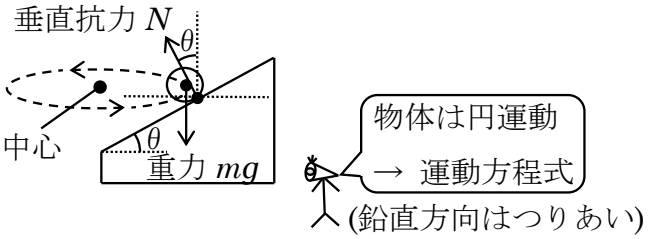
②式を変形して、$N = \dfrac{mg}{\cos\theta}$

①式に代入して、$\dfrac{mg}{\cos\theta}\cdot\sin\theta = mr\omega^2$

$\therefore \omega = \sqrt{\dfrac{g}{r}\tan\theta}$

《地上にいる観測者の場合》

慣性力(遠心力)ははたらかない。円運動の運動方程式 $mr\omega^2 = F$ 、$m\dfrac{v^2}{r} = F$ を立てる。



円運動では、円の中心向きに軸をとろう。

円の中心方向(水平)の運動方程式

$mr\omega^2 = N\sin\theta$ … ①式

円の中心と 90°　方向(鉛直)のつりあい

$N\cos\theta = mg$ … ②式

②式を変形して、$N = \dfrac{mg}{\cos\theta}$

①式に代入して、$mr\omega^2 = \dfrac{mg}{\cos\theta}\cdot\sin\theta$

$\therefore \omega = \sqrt{\dfrac{g}{r}\tan\theta}$