§ 力学Ⅱ−第 4 章　万有引力

テーマ 1　ケプラーの法則

ドイツのケプラーは、師であるブラーエの残した太陽系惑星の精密な観測データを分析し、惑星の運動に関する 3 つの法則を発見した。1 つずつ見ていこう。

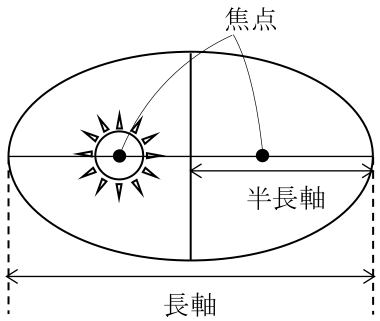
第一法則

すべての惑星は、太陽を 1 つの焦点とする楕円軌道を描く。

地動説主張者も、天動説主張者も、惑星が何かの周りを回るという考えはもっていたが、その軌道は円だと考えていた。しかし、実際には楕円軌道であり、当時この発見は非常に画期的なものであった。また、楕円には、2 つの焦点があるが、そのうち必ず片方が太陽で、もう片方には何もないのだ。

＊ 楕円について

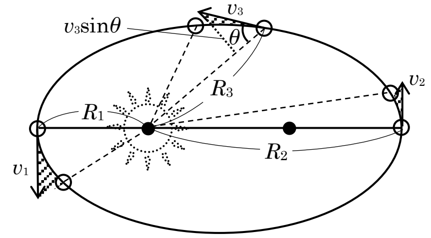
楕円は 2 つの焦点からの距離の合計が同じになる点を結んだ曲線である。また、楕円の内部に 2 焦点を通る直線をひくとき、これを長軸といい、長軸の半分の長さのことを半長軸という。以降、半長軸は重要なパラメータになるので頭に入れておこう。



第二法則

惑星と太陽を結ぶ線分が描く面積は一定である。（面積速度一定の法則）

単位時間での惑星の移動経路と太陽を結んだときの面積が、どの場所でも一緒になるという法則。（右図参照）



太陽に近いと速い　→　小回りするときは速い。
太陽に遠いと遅い　→　大回りするときは遅い。
　　　　　　　　　　　こんなイメージになる。

回転する椅子に座って脚をのばして回っている時に、脚を閉じると回転が速くなるのと同じ!!
大学で学ぶ角運動量保存則とのつながりもある。

この法則では、具体的な面積の計算方法を覚えることが重要になる。
軌道の外側の部分の面積を 0 と近似して計算するのだ。

よって、面積は三角形の面積と近似でき、$\frac{1}{2}Rv\sin\theta$ となる。

第三法則

惑星の公転周期 T の 2 乗は、楕円軌道の半長軸 a の 3 乗に比例する。楕円の大きさが変わっても、比例定数 k は変わらない。公式として暗記しよう。

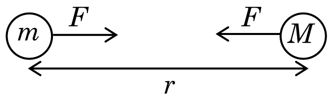
公式　$T^2 = ka^3$　　不思議なことに太陽系の惑星はすべて k が同じである。

半長軸の場所は、前ページの上の図参照。この式は、観測結果をじーっと眺めてケプラーが考えついた、観測が根拠の式となる。普通には思いつけない。彼はすごい。

テーマ 2　万有引力の法則

質量を持つ 2 物体は、お互いを引きよせるような力がはたらいている。

その力を万有引力といい、大きさ F は、



$$F = G\frac{mM}{r^2}$$

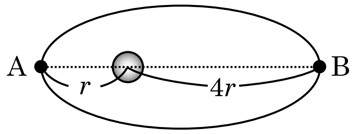
となる。暗記しましょう。

（G は万有引力定数 という。また $G = 6.67\times10^{-11}$ N・m²/kg² ）

問題 1　面積速度一定の法則

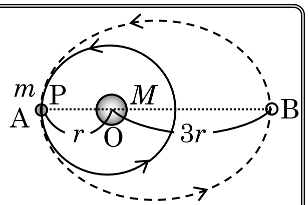
図のように天体 O の周りを楕円軌道を描いて運動している。

このとき、遠日点 B での速さは近日点 A での速さの何倍か。



問題 2　ケプラーの法則関連の典型問題

図のような質量 M の天体 O の周りを半径 r の円軌道を描いて回る質量 m の人工衛星 P がある。万有引力定数を G とする。



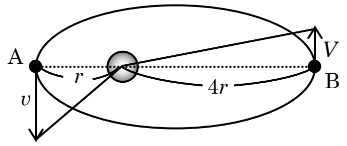
(1) 人工衛星の速さ v_0 を求めよ。

(2) 円軌道の周期 T_0 を求めよ。

(3) 点 A で軌道の接線方向に加速したところ、点線のような楕円軌道を回った。このときの楕円軌道の周期は T_0 の何倍か。

$\boxed{\text{問題 1 解答}}$ $\dfrac{1}{4}$ 倍

$\boxed{\text{問題 1 解説}}$ 面積速度一定の法則の使い方の練習である。三角形への近似をマスターしておこう。近日点 A での速さを v、遠日点 B の速度を V とすると、面積速度一定の法則より、



$\dfrac{1}{2}rv = \dfrac{1}{2}\cdot 4rV$ という関係が出せる。

問題では、B での速さが A の何倍かを聞いている。つまり、『$V=$ ○$\times v$』 の○の部分を聞いているので、その形に変形すると、

$V = \dfrac{1}{4}\times v$ となり、V は v の $\dfrac{1}{4}$ 倍だといえる。

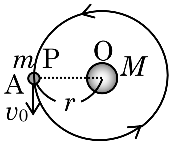
面積速度一定の法則は、近日点、遠日点の 2 点で登場することがほとんどで、直角三角形となり、計算はかなり楽である。しかし、中途半端な位置では、$\dfrac{1}{2}rv\sin\theta$ という計算で面積を出すことになるので、そのことも頭に入れておこう。

$\boxed{\text{問題 2 解答}}$ (1) $\sqrt{G\dfrac{M}{r}}$ (2) $2\pi r\sqrt{\dfrac{r}{GM}}$ (3) $2\sqrt{2}$ 倍

$\boxed{\text{問題 2 解説}}$ **円運動**なのか、**楕円運動**なのかを見極め、それぞれの解き方を身につけよう。

(1) この問題では、**円運動**をしている。円運動の問題では**通常の円運動の解法**を使う。

すなわち『$m\dfrac{v^2}{r} = F$ 』の運動方程式を立てるのだ。



F には物体にはたらいている力で、向心力になっているものが入るが、

この場合は、万有引力であり、$F = G\dfrac{mM}{r^2}$ といえる。

運動方程式 $m\dfrac{v^2}{r} = F$ をたてると、

$m\dfrac{v^2}{r} = G\dfrac{mM}{r^2}$ となり、v_0 について解くと、$v_0 = \sqrt{G\dfrac{M}{r}}$ となる。

ちなみに、このように天体の周りをきれいに円運動する速度を、『第一宇宙速度』という。第一宇宙速度で物体を投げたら、空気抵抗などで減速しない限り、永遠に地面に落下しなくなるのだ。

問題 2 解説続き

(2) 円運動の周期は、周期の公式 $T=\dfrac{1\text{周分の長さ}}{\text{速さ}}=\dfrac{2\pi r}{v}$ で計算できる。

前問(1)の答えを代入すると $T_0=2\pi r\sqrt{\dfrac{r}{GM}}$ となる。

(3) この問題からは、**楕円運動**をしている。つまり、円運動の解法は一切使えなくなる。
代わりにケプラーの法則を使っていくことになる。周期に関してのケプラーの法則を使う。

ケプラーの第三法則　$T^2=ka^3$
このとき k は、**中心天体が変わらなければ、軌道が変わっても変化しない**。

この法則の使い方は以下のような手順で、ワンパターンなので、覚えてしまおう。

STEP① きれいな円運動のときの k を出す

STEP② 楕円運動のときのケプラーの法則の式に代入して、周期を求める。

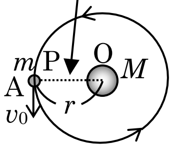
実践

円運動のときの周期を T_0、楕円運動しているときの周期を T、第 3 法則の定数を k とする。

円運動での立式

$T_0^2=kr^3$ …①式

半長軸 a は半径部分

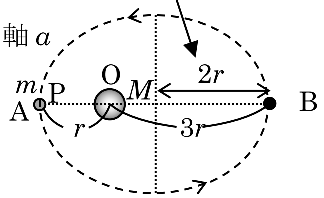


楕円運動での立式

$T^2=k\,(2r)^3$ …②式

ここが半長軸 a

ここが半長軸 a



①式より、

$$k=\frac{T_0^2}{r^3}$$

②式に代入して、

$$T^2=\frac{T_0^2}{r^3}(2r)^3$$

＊ $\dfrac{①式}{②式}$と連立して k を消去しても同じ結果を導ける

これを『$T=$ ○×T_0』の形に直せば、T が T_0 の何倍かがわかるので、その形に変形すると、

$T=\sqrt{\dfrac{(2r)^3}{r^3}}\ T_0\ =\ 2\sqrt{2}\ T_0$　　　　よって解答は $2\sqrt{2}$ 倍。

＊　前問(2)で求めた T_0 を代入すれば、$T=4\pi r\sqrt{\dfrac{2r}{GM}}$ と、具体的な値を出すこともできる。

テーマ 3 万有引力による位置エネルギー

地球の中心から距離 r の点にある物体(質量 m)がもつ万有引力による位置エネルギー U は、

$$U = -G\frac{mM}{r} \quad \text{（基準を無限遠点とする）}$$

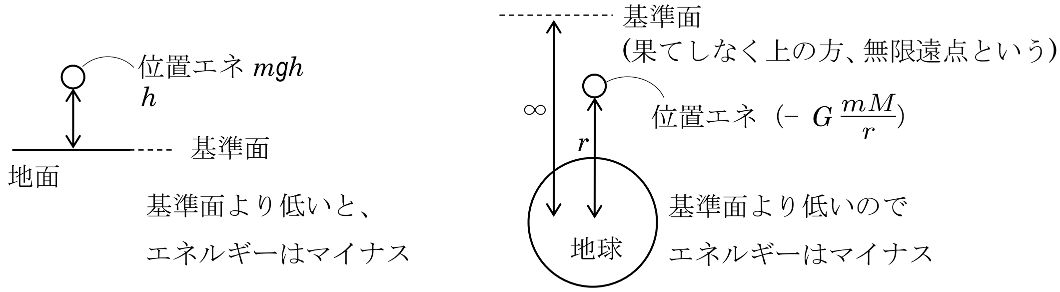
となる。これは丸暗記する公式になります。

＊ マイナスがつくのはなぜ？

万有引力の位置エネルギーにマイナスがつく理由は、無限遠点を基準面としているからである。しかし、そういわれたところでイメージが持てない。下図のように作図して理解しよう。

重力による位置エネは、地面を基準面とすると、地面より低いとマイナスになり、高いと大きくなっていく。（下図左）

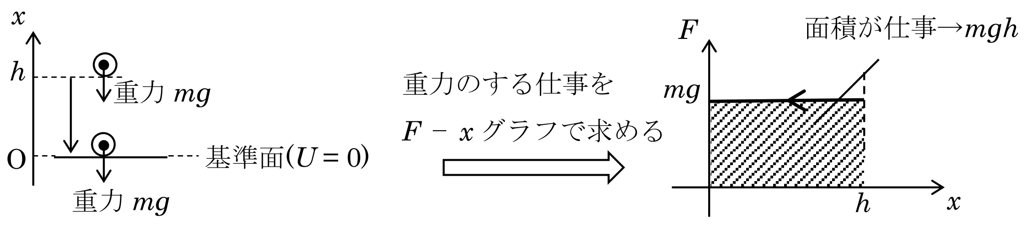
これと同様に万有引力による位置エネを考えてみる。基準面を無限遠点にしているので、地球の中心から r の地点は基準面よりも低くなり、位置エネルギーはマイナスになるのだ!!



＊ 公式の導出（試験には出ない）

万有引力による位置エネルギーの公式は、丸暗記する式だが、積分で求めることもできる。

復習 重力による位置エネルギー $U = mgh$ の導出



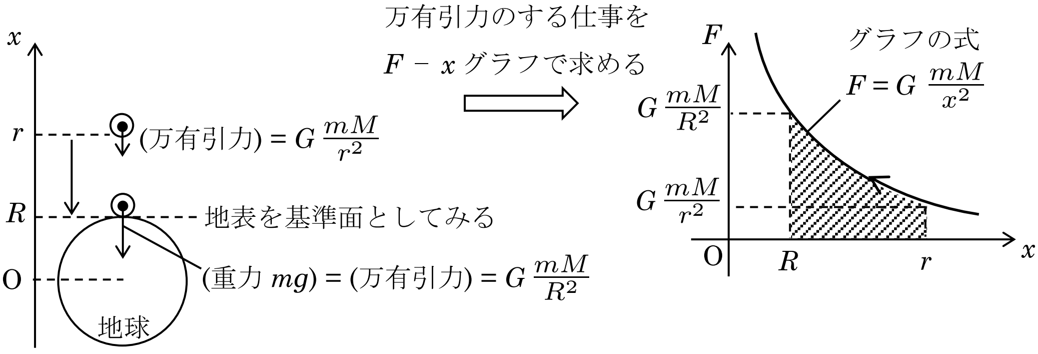
・物体が h 落下するとき、重力は mgh の仕事を物体にしている。

・高さ h という位置関係が mgh の量の仕事をする能力を持っていた、ということになり、これを重力による位置エネルギー $U = mgh$ というのである。

・また、位置エネルギーを消費した分だけ、重力が仕事をしている、という見方もできるようになっておこう。高さ h の点と基準面との位置エネルギーの差の mgh が大事なのだ。

$\boxed{\text{本題}}$ 万有引力による位置エネルギーの式の導出

《 地表を基準面とした場合 》



・実は重力 mg は万有引力のことなのだ。地球から離れるほどその大きさは減っていくので、高さが変わるときに、重力を一定の大きさ mg とするのは、厳密には正しくないといえる。

⇒ 地表での万有引力 $G\dfrac{mM}{R^2}$が mg と等価なのであり、地表から離れたら重力を mg としてはいけない。

⇒ 地面を水平に書いていたら、高さの差による万有引力の変化は無視できるほど小さく、常に重力は mg としてよく、地面を球形に書く場合は mg としてはいけない。

⇒ 重力の大きさが mg で一定でないのなら $U = mgh$ の式は使えない。

・地表（座標 R）を基準面としたとき、座標 r から座標 R まで移動する間に万有引力がする仕事を計算する。

$$
\begin{aligned}
(\text{面積}) &= \int_R^r G\frac{mM}{x^2}dx \\
&= \int_R^r GmMx^{-2}dx \\
&= [-GmMx^{-1}]_R^r \\
&= -GmM\left[\frac{1}{x}\right]_R^r \\
&= -GmM\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right) \\
&= GmM\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{r}\right)
\end{aligned}
$$

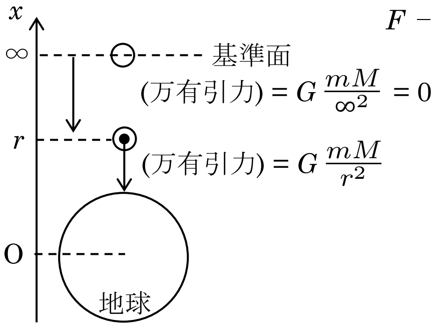
万有引力が、この量の仕事をしたので、基準面を地表としたとき

$U = GmM\left(\dfrac{1}{R} - \dfrac{1}{r}\right)$

のエネルギーを持っていたといえる。

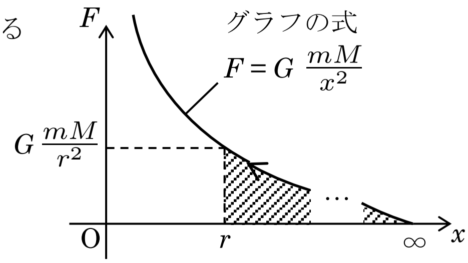
しかし、惑星の半径 R が惑星ごとに違っていたり、惑星の内側に入ったとき正負が逆転したりして、これを公式化してもあまり便利ではない。そこで、無限遠点を基準とする。

《 無限遠点を基準とした場合 》



万有引力のする仕事を

$F-x$ グラフで求める



・原点を基準にすると、求める面積が原点から r までの領域になり、∞になってしまうので、無限遠点を基準とするのが便利なのである。

・座標∞から座標 r まで移動する間に万有引力がする仕事を計算する。

$$
\begin{aligned}
\left(\text{面積}\right) &= \int_r^{\infty} G\frac{mM}{x^2}dx \\
&= \int_r^{\infty} GmMx^{-2}dx \\
&= \left[-GmMx^{-1}\right]_r^{\infty} \\
&= -GmM\left[\frac{1}{x}\right]_r^{\infty} \\
&= -GmM\left(\frac{1}{\infty}-\frac{1}{r}\right) \\
&= G\frac{mM}{r}
\end{aligned}
$$

万有引力が、この量の仕事をしたので、
座標∞から座標 r まで移動したとき、
$G\dfrac{mM}{r}$ の位置エネルギーを消費したといえる。
無限遠点での位置エネルギーを 0 としていて、
$G\dfrac{mM}{r}$ のエネルギーを消費しているのであれば、座標 r での位置エネルギー U は
$U=-G\dfrac{mM}{r}$ となる。

問題 3 地表での重力

地球の質量を M、半径を R とする。地表での重力加速度 g を、G、M、R で表せ。

問題 4 万有引力による位置エネルギー

質量 M、半径 R の地球表面から垂直上向きに質量 m の弾丸を打ち出す。地表での重力加速度の大きさを g とする。

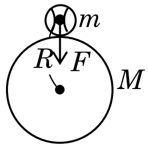
(1) 地表から高さ R まで達するのに最低限必要な初速 v_1 を求めよ。

(2) 弾丸を地球の重力圏から脱出させるに最低限必要な初速 v_2 を求めよ。

問題 3 解答 $g = G\ \dfrac{M}{R^2}$

問題 3 解説

地表にある物体の質量を m と置き、地球にどれくらいの力で引かれているかを計算しよう。



はたらく重力の大きさ F を、地表での重力加速度 g をつかって表すと、

$F = mg$ である。

はたらく重力の大きさ F を、万有引力定数 G を使って表すと、

$F = G\ \dfrac{mM}{R^2}$ である。

よって

$mg = G\ \dfrac{mM}{R^2}$ といえ、$g = G\ \dfrac{M}{R^2}$

問題によって、g を与えてくるタイプと、G を与えてくるタイプがある。G を使ってはいけないタイプの問題では、いちいちこの問題の手順で $g = G\ \dfrac{M}{R^2}$ の関係をだし、答えから G を消去する必要があるのだ。

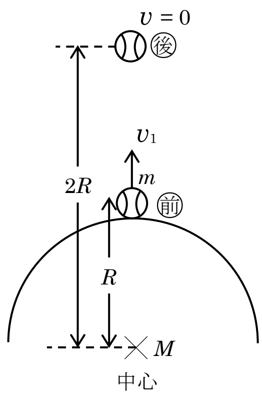
$\boxed{\text{問題 4 解答}}$ (1) $\sqrt{gR}$　　(2) $\sqrt{2gR}$

$\boxed{\text{問題 4 解説}}$ 地表を球形で描くような場合、重力による位置エネルギー$U = mgh$ の式は使えなくなる。

万有引力による位置エネルギー$U = -G\dfrac{mM}{r}$ を使うのだ。

『マイナス』と『1 乗』に注意

(1) 地表から高さ R に達するということは、中心から $2R$ の点に達することであり、その点で速さが 0 になるような v_1 を求めればよい。（右図）



弾丸を発射した瞬間（前）と、$2R$ に達した瞬間（後）でエネルギー保存則を立てると、

$$\text{前} = \text{後}$$

$$\frac{1}{2}mv_1{}^2 + \left(-G\frac{mM}{R}\right) = \frac{1}{2}m\times 0 + \left(-G\frac{mM}{2R}\right)$$

これを v_1 について解けば、

$$v_1 = \sqrt{G\frac{M}{R}}$$ となる。しかし!!これをそのまま答えてはいけない。

今回の問題では、G が与えられていないので、g で答えるタイプの問題なのだ!!

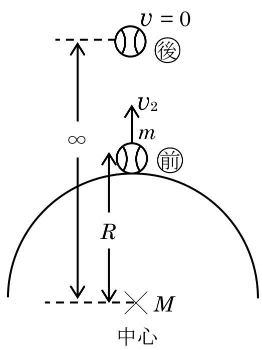
地表での重力と、万有引力の法則の関係から、

$g = G\dfrac{M}{R^2}$　なので、$gR^2 = GM$　これを代入すると、

$$v_1 = \sqrt{G\frac{M}{R}} = \sqrt{\frac{gR^2}{R}} = \sqrt{gR}$$ となる。

> G で答える問題か、g で答える問題か見極め、必要なとき、自分で $g = G\dfrac{M}{R^2}$ の関係をだせるようになっておこう。

(2) 重力圏からの脱出とは、地球との相互作用(重力)がはたらかないところ、すごく遠いところ=無限遠点まで行くことである。右図のように、無限遠点にギリギリ脱出する状況を考えて、力学的エネルギー保存則の式を立てると、



$$\text{前} = \text{後}$$

$$\frac{1}{2}mv_2{}^2 + \left(-G\frac{mM}{R}\right) = \frac{1}{2}m\times 0 + \left(-G\frac{mM}{\infty}\right)$$

これを v_2 について解いて、g で答える形に直すと

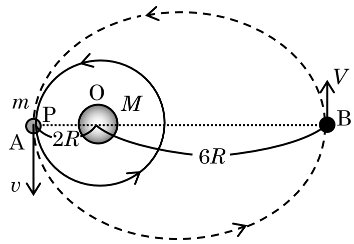
$$v_2 = \sqrt{2G\frac{M}{R}} = \sqrt{2gR}$$ となる。ちなみに、この速度を第 2 宇宙速度という。

テーマ4 万有引力の要素が全部入った典型問題

まとめの典型問題に挑戦しよう。計算量が多いので、練習して慣れておいた方がいい。

問題5 万有引力のまとめ

地上の1点から鉛直上方へ質量 m の小物体を打ち上げる。地球は半径 R、質量 M の一様な球で、物体は地球から万有引力の法則にしたがう力を受けるものとする。図を参照して、以下の問いに答えよ。ただし、地上での重力加速度の大きさを g とする。また、地球の自転および、公転は無視するものとする。



(1) 地上での重力加速度の大きさ g を万有引力定数 G、および、R、M を用いて表せ。

以下の問いでは、G を用いずに答えよ。

(2) 物体の速度が地球の中心から $2R$ の距離にある点Aで0になるためには、初速度の大きさ v_0 をどれだけにすればよいか。

物体の速度が点Aで0になった瞬間、物体に大きさが v でOAに垂直に方向の速度を与える。

(3) 物体が地球の中心 O を中心とする等速円運動をするためには v をいくらにすればよいか。

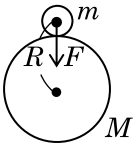
実際には、点Aで物体に与える速さ v が(3)で求めた値からずれてしまい、物体の軌道は、地球を1つの焦点とし、ABを長軸とする楕円となった。

(4) 点Bにおける物体の速さ V を v を用いて表せ。ただし、点Bでの地球の中心からの距離は $6R$ である。
(5) 物体がABを長軸とする楕円軌道を描くためには、v をどれだけにすればよいか。
(6) (3)の結果を用いて、ケプラーの第3法則の比例定数 k を求めよ。
(7) ABを長軸とする楕円運動の周期を求めよ。

問題５ 解答 (1) $g=\dfrac{GM}{R^2}$　(2) $v_0=\sqrt{gR}$　(3) $v=\sqrt{\dfrac{gR}{2}}$　(4) $V=\dfrac{v}{3}$　(5) $v=\dfrac{\sqrt{3gR}}{2}$
(6) $k=\dfrac{4\pi^2}{gR^2}$　(7) $T=16\pi\sqrt{\dfrac{R}{g}}$

問題５ 解説 万有引力の問題は、この問題が解ければ、ほぼすべてのパターンに対応できる。
何度も解き直し、頭になじませておこう。

(1) 地表にある物体の質量を m と置き、地球にどれくらいの力で引かれているかを計算しよう。



はたらく重力の大きさ F を、地表での重力加速度 g をつかって表すと、

$F=mg$　である。

はたらく重力の大きさ F を、万有引力定数 G を使って表すと、

$F=G\dfrac{mM}{R^2}$　である。

よって

$mg=G\dfrac{mM}{R^2}$　といえ、　$g=G\dfrac{M}{R^2}$　となる。

今後、この関係で G を消去していく。

(2) 力学的エネルギーの保存を使う。地面を球形に書くスケールなので、重力による位置エネルギー $U=mgh$ は使えず、代わりに万有引力による位置エネルギー $U=-G\dfrac{mM}{R}$ を用いる。

$$\underbrace{\frac{1}{2}mv_0^2+\left(-G\frac{mM}{R}\right)}_{\text{地上で小物体が持っている力学的エネルギー}}=\underbrace{0+\left(-G\frac{mM}{2R}\right)}_{\text{点A で小物体が持っている力学的エネルギー}}$$

これを v_0 について解いて

$$v_0=\sqrt{G\frac{M}{R}}$$

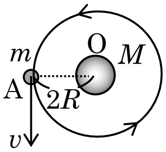
解答で G が使えない問題なので、前問(1)で求めた $g=G\dfrac{M}{R^2}$ の関係から G を消去する。

少し変形して、$gR^2=GM$、これを代入すると、

$$v_0=\sqrt{gR}$$

(3) 円運動なのか、楕円運動なのかをしっかり見極めよう。

この問題は、円運動の問題なので、普通に円運動の問題としてといていく。



物体にはたらく力は、万有引力の法則により、$F = G\dfrac{mM}{(2R)^2}$ であり、

これが円運動の向心力となる。

円運動の運動方程式 $m\dfrac{v^2}{r} = F$ をたてると、

$$m\frac{v^2}{2R} = G\frac{mM}{(2R)^2}$$

v について解いて　$v = \sqrt{G\dfrac{M}{2R}}$　となる。

(1)で求めた $gR^2 = GM$ の式を用いて G を消去すると、$v = \sqrt{\dfrac{gR}{2}}$

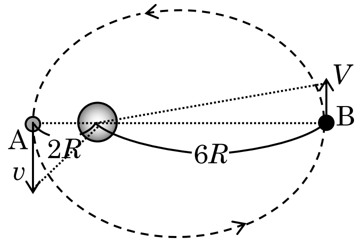
(4) 面積速度一定の法則から関係を導こう。

点Aにおける面積と、点Bにおける面積は等しいとして、

$$\frac{1}{2}\times 2R\times v = \frac{1}{2}\times 6R\times V$$

よって、

$$V = \frac{v}{3}$$



(5) 楕円運動の問題なので、普通の円運動の解法は使えない。

楕円軌道での速度を出すには、以下のようなSTEPを踏むことが多い。

STEP① 面積速度一定の法則で、どこか2か所での速度 v、V の関係を出す。（前問(4)）

STEP② その2か所で力学的エネルギー保存則の式を立て、①とは違う v、V の関係を出す。

STEP③ 未知数2つ（v と V）で関係式が2つできたので、連立方程式で値を出せる。

さて、STEP①は前問(4)でもうでているので、STEP②から始める。

楕円軌道を運動している物体は、万有引力しか力を受けておらず、非保存力の仕事をされていないので、力学的エネルギーは保存する。もし、ロケットのジェット噴射や、宇宙ゴミとの衝突などがあったら、非保存力による仕事があるので、力学的エネルギーは保存しない。

点Aと点Bでのエネルギー保存則の式を立てると、

$$\underbrace{\frac{1}{2}mv^2 + \left(-G\frac{mM}{2R}\right)}_{\text{点Aで小物体が持っている力学的エネルギー}} = \underbrace{\frac{1}{2}mV^2 + \left(-G\frac{mM}{6R}\right)}_{\text{点Bで小物体が持っている力学的エネルギー}}$$

(4)の $V=\frac{v}{3}$ を代入し、V を消去し、v について解くと、

$$\frac{1}{2}mv^2+\left(-G\frac{mM}{2R}\right)=\frac{1}{2}m\left(\frac{v}{3}\right)^2+\left(-G\frac{mM}{6R}\right)$$

$$v=\sqrt{\frac{3GM}{4R}}$$

解答に G は使えないので(1)で求めた $gR^2=GM$ の式を用いて G を消去すると、$v=\frac{\sqrt{3gR}}{2}$

(6) 前問(5)からのつながりはなく、周期を求める問題用に頭を切り替えよう。

楕円運動のときの周期を求める問題は、以下のお決まりパターンとなる。

STEP① きれいな円運動しているときの周期を、円運動の解法で求め、
STEP② きれいな円運動のときのデータから、ケプラーの第三法則の k を求め、
STEP③ 楕円軌道での周期を T と置き、第2法則の立式をする。

きれいな円運動のしているときの、速度は(3)で、$v=\sqrt{\frac{gR}{2}}$ と出ていて、そこから周期 T_0 を求めると、

$$T_0=\frac{2\pi r}{v}=\frac{2\pi(2R)}{\sqrt{\frac{gR}{2}}}$$

これを T_0 についてといて、

$$T_0=4\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}$$

次にケプラーの第三法則 $T^2=ka^3$ の式を立てる。このときの a は軌道の半長軸であり、きれいな円のときは半径がそれにあたる。今回は $a=2R$ となる。立式すると、

$$\left(4\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}\right)^2=k(2R)^3$$

これを、k について解くと

$$k=\frac{4\pi^2}{gR^2}$$ となる。

(7) 前問(6)で紹介した楕円の周期の出し方の STEP③にあたる問題である。楕円軌道でも $T^2=ka^3$ の式を立てて、周期を求める。

このとき半長軸 a は $a=4R$ になる。

立式をして k に前問(6)の値を代入し T について解くと、

$$T^2=k(4R)^3$$

$$T^2=\frac{4\pi^2}{gR^2}\cdot 64R^3$$

$$T=16\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$$