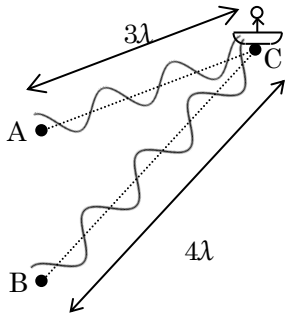
§ 波動　光の干渉

テーマ 1　干渉の復習

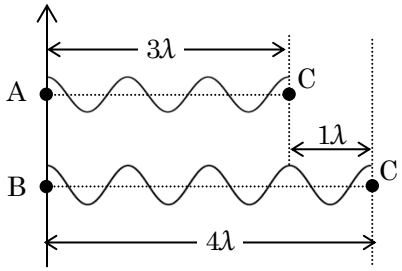
光の分野で一番出題が多いのは、光の干渉の分野である。なかなか奥が深いので頑張っていこう。まずは、干渉の基礎を復習する。

モデル　地点 A、地点 B で同位相(A 地点が山のとき B 地点も山)の波を発生させる。
地点 C に船が止まっている。波の波長を λ とする。

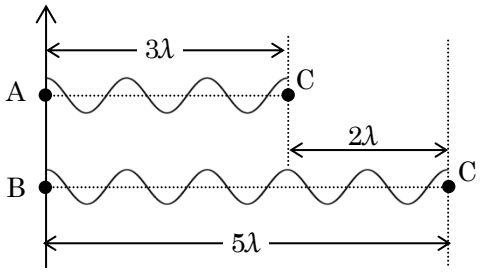


図は、A も B も山であった瞬間の写真を撮ったものである。ここで、C 点では 2 つの山が重なっている。よって、1 つの波のときよりも、船は大きく揺れることになる。(波は強め合っている)
これが波の干渉である。

この二つの波を横に並べて書いてみよう。

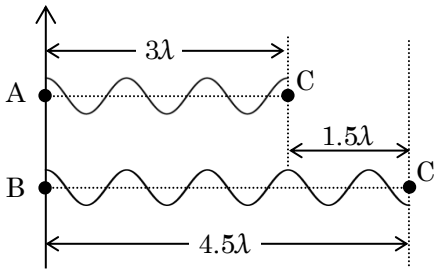


C 点では山と山が重なっているのがわかる。
同時に AC 間の距離と、BC 間の距離の差が 1λ であることにも気づく。波は 1λ でもとの状態に戻るのだから、2 つの波の長さが違っていても、長さの差が 1λ なら、強め合う関係になる。



もし、BC 間の距離が 5λ だった場合はどうだろうか。
これも山と山が重なる、つまり強め合うのだ。
『経路差』が『波長の整数倍』
だと、状態の同じ波が重なり、強め合うといえる。

では、BC 間の距離が 4.5λ だった場合はどうなるだろうか。



山と谷が重なっている。よって、C 点で波は打ち消し合い、そこにいる船は全く振動しなくなるのだ。1.5λ、2.5λ、というように
『経路差』が『○.5λ』
だと、状態が逆の波が重なり、打ち消し合うといえる。

ここまでのことを式にまとめてみよう。

2 つの地点で同じ形の波を同位相で発生させたとき、

経路差が波長 λ の整数倍 (0λ←経路差なし、1λ、2λ、3λ…)　だと波は強め合う。
経路差が波長 λ の○.5 倍 (0.5λ、1.5λ、2.5λ、3.5λ…)　だと波は打ち消し合う。

⇩ すごくごたごたした表現だが、このように言い換えるとすっきり示すことができる。

強め合う：経路差 ＝ 半波長($\frac{\lambda}{2}$)の偶数倍

打ち消し合う：経路差 ＝ 半波長($\frac{\lambda}{2}$)の奇数倍

⇩ m を 0、1、2、3…と整数が入る文字とすると、
『偶数』は $2m$、『奇数』は $2m+1$ といえる。これを用いると

強め合う：経路差 $= \frac{\lambda}{2} \times 2m$

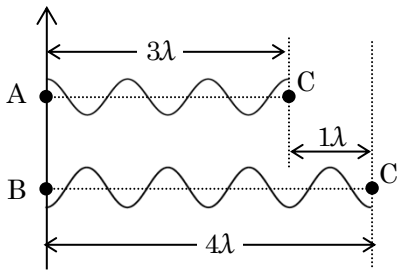
となる。

打ち消し合う：経路差 $= \frac{\lambda}{2} \times (2m+1)$

これらの式を展開・整理したものが教科書などに乗っている、いわゆる公式です。

＊逆位相の波だと条件が逆になる!!

モデル　A 地点 B 地点で、逆位相の波を発生させる。経路差は λ とする。



左の図は、先ほどのモデルと同じ条件で、発生させる波を逆位相にしたものだ。
先ほどのモデルでは山と山が重なり、強め合う点だったのに、今回山と谷が重なる打ち消し合う点になってしまった。

逆位相の波だと、強め合う・打ち消し合う条件が逆になる。
半波長の偶数倍で弱めあい、半波長の奇数倍で強め合う

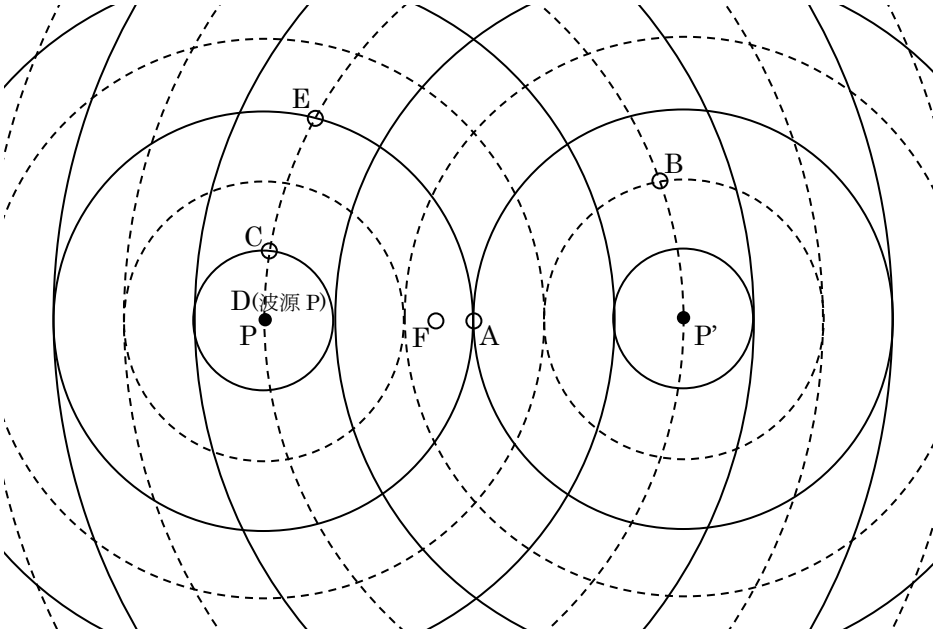
問題 1 干渉する点を結んだ線

水平面上の 2 点 P、P'で波長 λ の波を同位相で発生させた。図は波源がちょうど谷になった瞬間の波の図で、実線は山、点線は谷を示している。

(1) A 点の例に従って、下記の表を埋めよ。

(2) 強め合う点を結んだ線を作図せよ。

（結んだ線が阪神タイガーズのマークみたいになることはクローズアップされづらいけれど、結構重要なので覚えておこう）



強め合う点	波源 P からの距離(①)	波源 P'からの距離(②)	波源からの距離の差(①－②)
（例）A	1.5 λ	1.5 λ	0
弱めあう点	波源 P からの距離(①)	波源 P'からの距離(②)	波源からの距離の差(①－②)

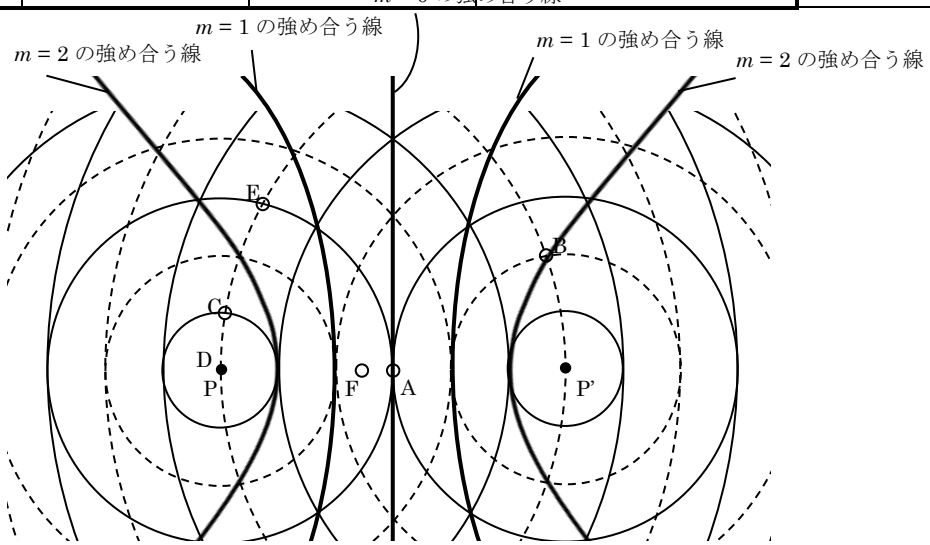
問題 1 解説　(1)　山と山（谷と谷）が重なっている点は強め合う。山と谷が重なっている点は弱めあう。

また、波源は谷の状態であるということにも注意して考えよう。

おまけとして、公式を立てたときの整数 m を表の横に示した。それを使い作図に注釈をつけてみる。

強め合う点	波源 P からの距離(①)	波源 P'からの距離(②)	波源からの距離の差(|① − ②|)	公式での整数 m
A	1.5 λ	1.5 λ	0	0
B	3.0 λ	1.0 λ	2.0 λ(半波長 0.5 λ の 4 倍)	2
D	0	3.0 λ	3.0 λ(半波長 0.5 λ の 6 倍)	3
弱めあう点	波源 P からの距離(①)	波源 P'からの距離(②)	波源からの距離の差(|① − ②|)	公式での整数 m
C	0.5 λ	3.0 λ	2.5 λ(半波長 0.5 λ の 5 倍)	2
E	1.5 λ	3.0 λ	1.5 λ(半波長 0.5 λ の 3 倍)	1
F＊1	1.25 λ	1.75 λ	0.5 λ(半波長 0.5 λ の 1 倍)	0

(2)



＊1

点 F が強め合うか打ち消し合うかの判断は、①経路差から考える。②作図した 2 本の強め合う線の間にあるので弱めあう。③頭の中で少し時間を進めると、F 点では、P から出た谷と、P'からでた山が重なることわかるので打ち消し合う。の 3 パターンで考察できる。

＊2

強め合う線は P 点と P'点からの距離の差が一定である曲線であり、これらは「双曲線」と呼ばれる。

テーマ 2 音の干渉

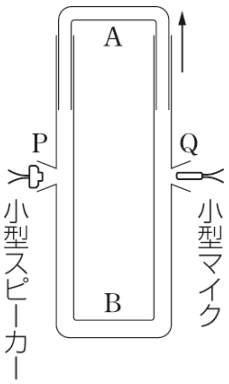
光の前に音の干渉で、計算問題の練習を行う。

問題 2 クインケ管

右の図の装置はクインケ管といい、P から送りこんだ音が PAQ と PBQ の 2 経路に分かれて伝わり、Q で干渉する。この装置で PAQ と PBQ の長さが等しい状態から、PAQ の部分をしだいに引き出したところ、0.10 m 引き出したときに初めて干渉によって音が聞こえなくなった。音の速さは 3.4×10^2 m/s とする。

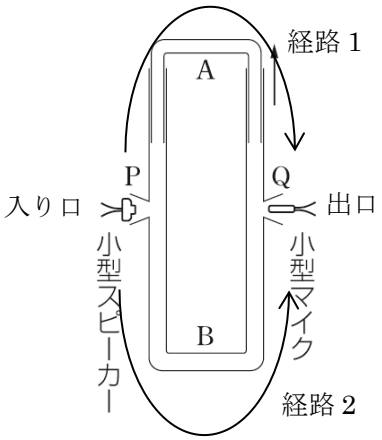
(1) 小型スピーカーから出る音の波長 λ〔m〕と振動数 f〔Hz〕を求めよ。

(2) 1 オクターブ高い音(振動数が 2 倍の音)を P から送りこんで同様の実験をする。PAQ を何 m 引き出すと、初めて音が聞こえなくなるか。



問題 2 解答 (1) λ : 0.40 m　f : 850 Hz　(2) 5.0×10^{-2} m（0.050 m）

問題 2 解説



解説の前に、クインケ管の原理を理解しよう。クインケかんは、入り口から入った音が、2 つの経路を通って出口に到達し、その経路差により干渉を起こすという装置である。

左図のように 2 つの経路で音が進み、経路差により干渉がおこる。式にすると以下のようになる。

強め合う：（経路差）＝（半波長）×（偶数）

弱め合う：（経路差）＝（半波長）×（奇数）

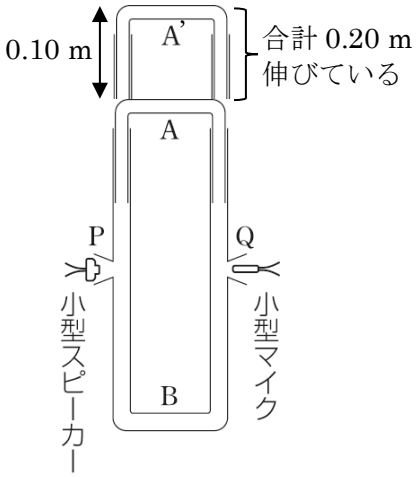
これを基本に問題を解いていく。

問題 2 解説 続き

(1) クインケ管を伸ばすことで、経路差が 0 だった状態から、経路 1(PAQ)が伸びていくので、少しずつ経路差が出てくる。伸びていく経路差と、音の強弱の関係を整理すると以下の表のようになる。**経路差が$\frac{\lambda}{2}$大きくなるごとに、強弱が逆転していることがポイント**

経路差	0（最初）	半波長の 1 倍	半波長の 2 倍	半波長の 3 倍
λを使った形	0	$\frac{\lambda}{2}\times 1$	$\frac{\lambda}{2}\times 2$	$\frac{\lambda}{2}\times 3$
干渉の強弱	強	弱	強	弱

この問題では、
ここの変化を起こしている。



また一方で、PAQ を 0.10 m 伸ばしたとき、経路差がいくらになったかが考えられる。
左図のように、0.10 m 引き出すと、経路 1 が 0.20 m 伸びていて、経路差が 0.20 m になったとわかる。

初め

経路 1 PAQ
||
経路 2 PBQ

経路差は 0

→

管を 0.10 m 伸ばす

経路 1　PAQ+0.20 m
経路 2　PBQ

経路差は 0.20 m

まとめると、経路差が$\frac{\lambda}{2}$のびたら強弱が逆転し、今回は 0.20 m のびて逆転が起きている。

よって $\frac{\lambda}{2}=0.20$　と立式できる。よって、λ ＝<u>0.40 m</u>

λが出せたら、fが出せる。$v=f\lambda$ より、

$3.4\times10^2=f\times 0.40$

fについて解いてf＝<u>850 Hz</u>

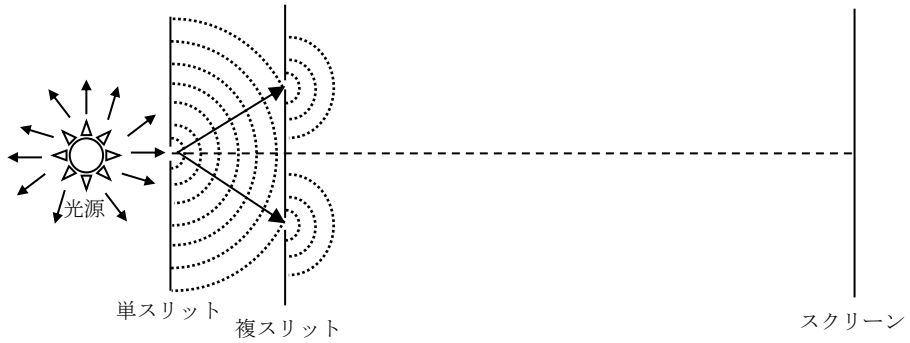
(2) 振動数を 2 倍にしているということは、波長が半分になっているということである。
（波の式 $v=f\lambda$ より）

波長が半分の 0.20 m になっているので、経路差を半波長の 0.10 m だけ大きくすれば、強弱が逆転するといえ、経路差を 0.10 m 増やすには、クインケ管を 0.050 m 伸ばせばよい。よって 0.050 m が答えとなる。

テーマ３ 光の干渉① ～ヤングの実験～

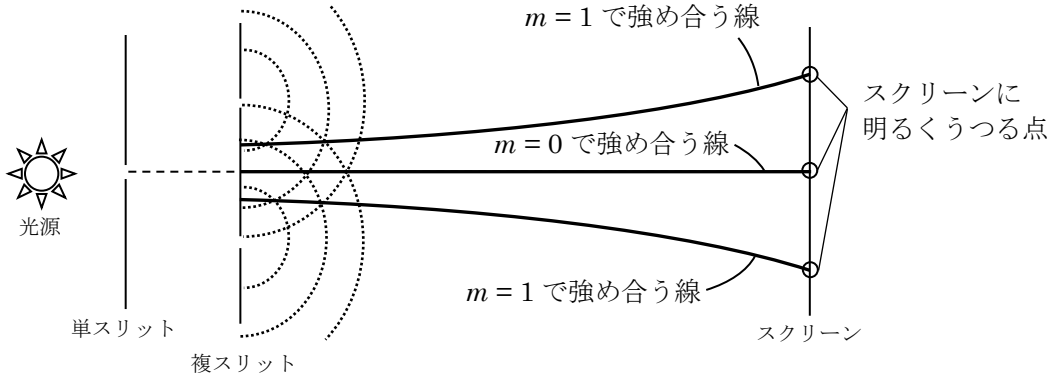
光の正体が粒子なのか波なのか、という議論に対して、ヤングは光が干渉する性質を持っていること実験で示し、波であるという主張を裏づけした。ヤングの実験の構造を理解しよう。

≪実験装置と原理≫



① 光源は、通常四方八方に光を出してしまうので、最初に単スリット（細い隙間が1つある板）を通して、光が混ざらないように絞る。このときスリットでは回折が起きている。上手では、光線を矢印、波面を点線で示している。

② 2枚目は複スリット（細い隙間が2つある板）になっていて、2か所で回折を起こさせる。これで、１枚目のスリットで同位相となった波が、複スリットの2か所で発生したことになる。



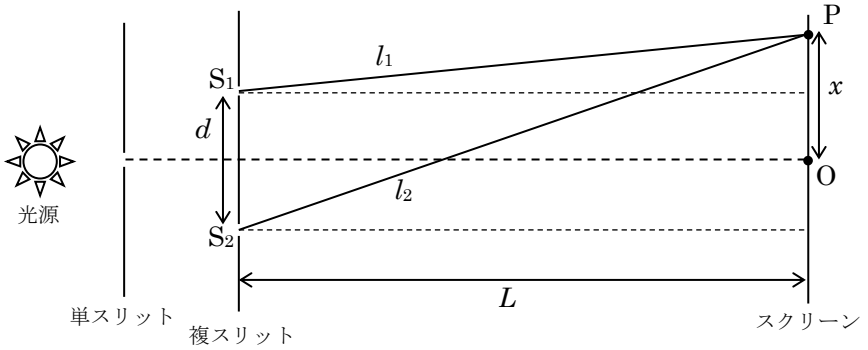
③ 複スリットの 2 つの隙間が 2 つの波源と同じような効果になり、スクリーン上で、光波が強め合う点と、光波が弱めあう点が現れる。強め合う点では明るくなり、弱めあう点では暗くなる。干渉の基礎で書いた双曲線ができる干渉をイメージしよう。

≪経路差で条件式を考える≫

前ページでは双曲線の模様で大まかにイメージしたが、干渉で大切なのは経路差を考えることである。経路差が半波長の偶数倍なら明点となり、半波長の奇数倍なら暗点になる。

方法① 三平方の定理を使う。

複スリットの間隔を d、複スリットからスクリーンまでの距離を L とおき、スクリーンの点 O から点 P までの距離を x と置くとき、点 P にあつまる 2 本の光の経路差を考えよう。



STEP1 上のスリット S_1 から点 P までの距離を l_1、下のスリット S_2 から点 P までの距離を l_2 とすると、経路差は ア

STEP2 三平方の定理を使って、l_1、l_2 を d、x、L で示すと、

$$l_1 = \sqrt{L^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2}$$

同様に

$l_2 =$ イ:

STEP3 STEP2 でだした l_1、l_2 を ア のように引き算して経路差を求めたいが、√同士の引き算は非常に困難であるので、以下の近似式を用いて√をとる。

近似式 α が 1 よりも非常に小さいとき、$(1+\alpha)^n \fallingdotseq 1 + n\alpha$

たとえば、$(1+\alpha)^2$ や $(1+\alpha)^3$ を展開すると、

$(1+\alpha)^2 = 1+2\alpha+\alpha^2$

⇒ α が 0.01 だったら、$1 + \underset{(2\alpha)}{0.02} + \overset{\text{超微小}}{\underset{(\alpha^2)}{\cancel{0.0001}}}$ これはほぼ $\underset{(1+2\alpha)}{1.02}$ → $1 + n\alpha$

$(1+\alpha)^3 = 1+3\alpha+3\alpha^2+\alpha^3$

⇒ α が 0.01 だったら、$1 + \underset{(3\alpha)}{0.03} + \overset{\text{超微小}}{\underset{(3\alpha^2)}{\cancel{0.0003}}} + \overset{\text{超微小}}{\underset{(\alpha^3)}{\cancel{0.000001}}}$ これはほぼ $\underset{(1+3\alpha)}{1.03}$ → $1 + n\alpha$

α(微小)×α(微小)は超微小なので無視してよいとするのだ。これを 2 次近似という。

$l_1=\sqrt{L^2+\left(x-\frac{d}{2}\right)^2}$ をこの近似式の形にするために、まずは$(1+\alpha)^n$ の『1』をつくる。

そのために、L^2 でくくり、ルートの外に出してしまう。

$$l_1=\sqrt{L^2+\left(x-\frac{d}{2}\right)^2}=\sqrt{L^2\left\{1+\frac{\left(x-\frac{d}{2}\right)^2}{L^2}\right\}}=L\sqrt{1+\frac{\left(x-\frac{d}{2}\right)^2}{L^2}}$$

そして、この装置の具体的な値は、$L=1.0$ m、$x=2$ cm、$d=2$ mm のようなサイズ感で

L に比べて d や x は非常に小さいので、$\frac{\left(x-\frac{d}{2}\right)^2}{L^2}$ は 1 より非常に小さいと言える。つまり、

近似式でいう α となる。

（非常に小さいという意味の記号である≫を用いると、近似の条件は $L^2 \gg \left(x-\frac{d}{2}\right)^2$ と書ける。図に書くときは d や x をオーバーに書いているが、実際は d はミリ単位、x はセンチ単位、L はメートル単位の長さで三平方の三角形は非常に横長になっている。）

次に、√を指数の表示にして、近似式の形に近づける。

$$l_1=L\sqrt{1+\frac{\left(x-\frac{d}{2}\right)^2}{L^2}}=L\left\{1+\frac{\left(x-\frac{d}{2}\right)^2}{L^2}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

これで、$\alpha=\frac{\left(x-\frac{d}{2}\right)^2}{L^2}$ 、 $n=\frac{1}{2}$ とすれば、

$l_1=L\left\{1+\frac{\left(x-\frac{d}{2}\right)^2}{L^2}\right\}^{\frac{1}{2}}=L(1+\alpha)^n$ となり、近似式と対応する形になった。近似を使うと、

$l_1=L\left\{1+\frac{\left(x-\frac{d}{2}\right)^2}{L^2}\right\}^{\frac{1}{2}}\fallingdotseq L\left\{1+\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(x-\frac{d}{2}\right)^2}{L^2}\right\}=L+\frac{\left(x-\frac{d}{2}\right)^2}{2L}$ これで√がとれた

√がとれれば、l_2-l_1 の引き算ができるようになるのだ。

同様に l_2 を近似し、√をとる練習をしてみよう。

$l_2 \fallingdotseq$ ウ：

ここまでの穴埋めの解答

ア： (経路差) = $l_2 - l_1$ イ： $l_2=\sqrt{L^2+\left(x+\frac{d}{2}\right)^2}$ ウ： $l_2=L+\frac{\left(x+\frac{d}{2}\right)^2}{2L}$

$\boxed{\text{STEP4}}$　√がとれたので、引き算をしてみる。

$$l_2 - l_1 = \left\{ L + \frac{\left(x+\frac{d}{2}\right)^2}{2L} \right\} - \left\{ L + \frac{\left(x-\frac{d}{2}\right)^2}{2L} \right\}$$

$$= \frac{\left(x+\frac{d}{2}\right)^2}{2L} - \frac{\left(x-\frac{d}{2}\right)^2}{2L}$$

$$= \frac{\left(x+\frac{d}{2}\right)^2 - \left(x-\frac{d}{2}\right)^2}{2L}$$

$$= \frac{\left(x^2+dx+\frac{d^2}{4}\right) - \left(x^2-dx+\frac{d^2}{4}\right)}{2L}$$

$$= \frac{2dx}{2L} = \frac{dx}{L}$$

ヤングの実験で、スクリーンの点 O から x 離れた点 P での経路差は、$\dfrac{dx}{L}$ といえるのだ。

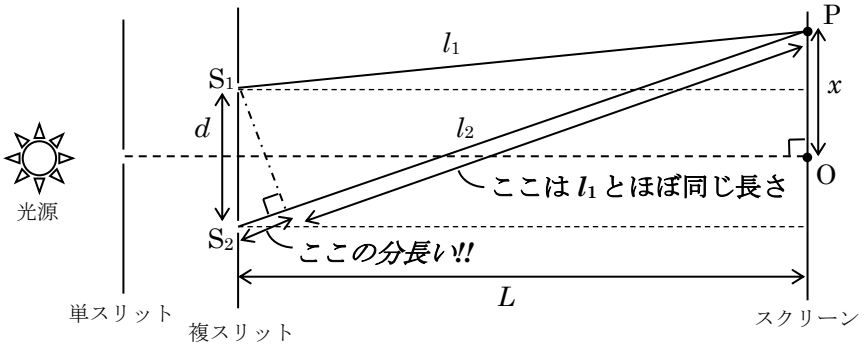
$\boxed{\text{STEP5}}$　明点の条件式を考える。

$\boxed{\text{経路差 = 半波長× 偶数}}$　が明点の条件なので整数 m(= 0、1、2 …)を用いて

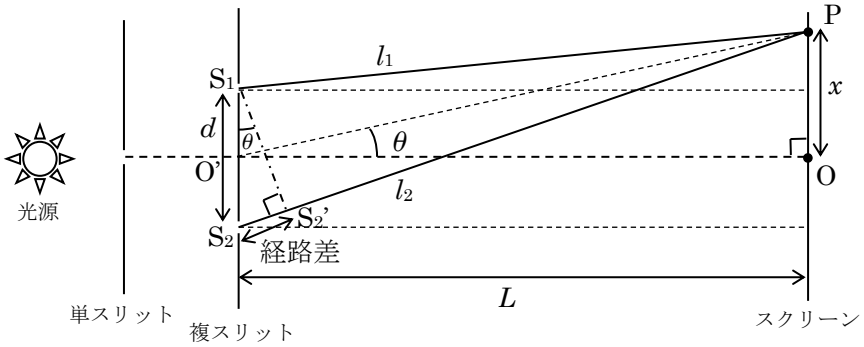
$\dfrac{dx}{L} = \dfrac{\lambda}{2} \times 2m$　となる。

方法②　三角関数の近似を使う。(基本はこっちで考える。方法①は誘導問題で聞かれる形)

経路差を図形的に考えてみると、l_2 の方が下図の部分だけ長いといえる。



さて、ここで、複スリットの中心から点 P に引いた線の角度を θ と置く。そこから経路差を考えてみよう。



STEP1 経路差は $d\sin\theta$

直角三角形 $S_1S_2S_2$' から、経路差は $d\sin\theta$ といえる。

STEP2　θ を使わずに経路差を示す。

直角三角形 O'PO から、$\tan\theta = \dfrac{x}{L}$ といえる。そして、x が L に対して十分小さい（$L \gg x$）と θ が非常に小さいと言えるので、$\tan\theta \fallingdotseq \sin\theta$　と近似でき $\tan\theta \fallingdotseq \sin\theta = \dfrac{x}{L}$ といえる。

$\tan\theta = \dfrac{x}{L}$　　$\sin\theta = \dfrac{x}{\text{ほぼ}L}$

上記のように言えるので、

$\sin\theta \fallingdotseq \tan\theta$　なのだ

すると経路差 $d\sin\theta$ は、$d\sin\theta \fallingdotseq d\tan\theta = d\dfrac{x}{L}$ となる。これで経路差が d、L、x で示せた。

≪明線間隔≫

ここまで干渉を考えることに最重要な『経路差』を扱ってきたが、ここからは、『経路差』を用いて、スクリーンにできる明点の間隔を考える。

まずは、前ページまでで求めた経路差を使って、干渉の条件式を立ててみよう。

強め合う条件：経路差＝半波長×偶数　なので

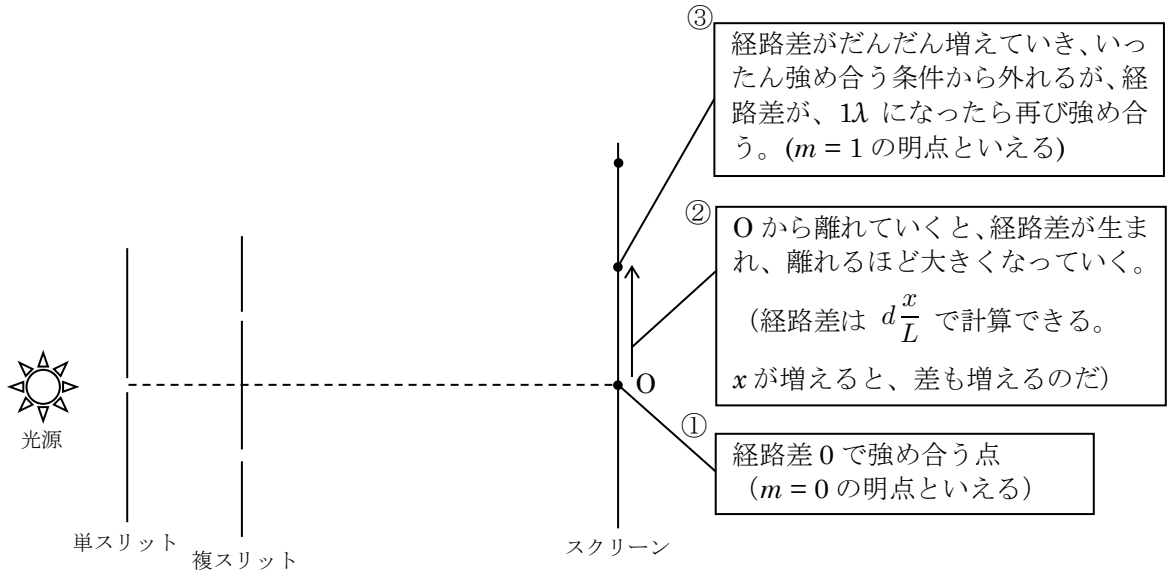
$$d\frac{x}{L}=\frac{\lambda}{2}\times 2m$$

右辺は『経路の差が、0、λ、2λ、などなら強め合う』ということを示している。

『経路の差が 0 で強め合っている』という状況を、この式を用いて、『m=0 の点』という。

経路差がλで強め合っている点は m=1 の点という

これを踏まえて、ヤングの実験を分析してみる（①～③は読む順番）



ここで、m = 1 の明点は、点 O からどれくらいはなれた場所にできるか考えてみる。

点 O から m = 1 の点までの距離を x_1 と置いたとき、

$d\frac{x_1}{L}=\lambda$ と干渉の条件式をたてられる。

左辺は、『経路差』を x_1 で示し、右辺は『m = 1 の点は、経路差が 1λ である』という意味で立式している。すると、$x_1=\frac{L\lambda}{d}$ といえる。m = 1 の明点ができる位置を計算で求めることができた。

では、$m=2$ の点はどの位置にできるか。明点の点 O からの距離を x_2 とし、$m=2$ の明点は『経路差が 2λ の点』ということから、 $d\dfrac{x_2}{L}=2\lambda$ と立式でき、x_2 について解いて $x_2=\dfrac{2L\lambda}{d}$

補足

ここまで計算してみると、『経路差＝半波長の偶数倍』という関係式ではなく、『最初から x について解いてある式』があった方が便利な気がしてくる。条件式を x について解くと、

$$d\frac{x}{L}=\frac{\lambda}{2}\times 2m$$

$$x=\frac{mL\lambda}{d}$$

といえる。

このように変形すると、$m=1$ の点は $x_1=\dfrac{L\lambda}{d}$ 、$m=2$ の点は $x_2=\dfrac{2L\lambda}{d}$の位置にできると、すぐに計算できる。便利である。

さて、本題である『ヤングの実験における明点の間隔』について考えてみる。

$m=0$ の明点から $m=1$ の明点までの距離は x_1 そのものなので、明点の間隔は x_1 である。

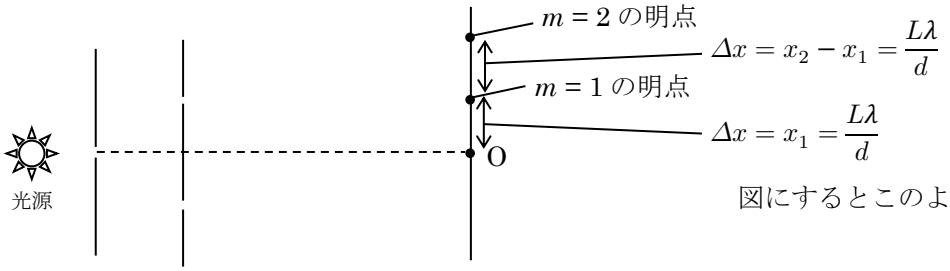
$m=1$ の明点は、$x_1=\dfrac{L\lambda}{d}$ の位置にできるので、点 O の明点から隣の明点までの間隔 Δx は $\Delta x=\dfrac{L\lambda}{d}$ といえる。そして、m_1 の明点から m_2 の明点までの間隔は x_2-x_1 で計算できる。

$x_2-x_1=\dfrac{2L\lambda}{d}-\dfrac{L\lambda}{d}=\dfrac{L\lambda}{d}$ となり、この間隔も $\dfrac{L\lambda}{d}$ とわかる。明点は均等にできるのだ。

一般式として出すと、m 番目の明点と、$(m+1)$番目の明点の間隔を求める形になり、

$\Delta x=x_{(m+1)}-x_m=\dfrac{(m+1)L\lambda}{d}-\dfrac{mL\lambda}{d}=\dfrac{L\lambda}{d}$ と、同様の値が求められる。

おすすめの考え方は、x_1 をそのまま Δx として考える方法である。計算が少ない。



図にするとこのような感じ。

ヤングの実験まとめ

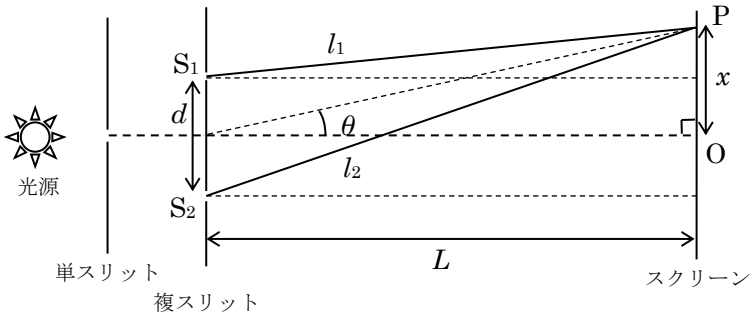
経路差を x で示す式 $\dfrac{dx}{L}$ を出せるようになろう。

(経路差)=(半波長の偶数倍)という強め合う条件式、$\dfrac{dx}{L}=\dfrac{\lambda}{2}\times 2m$ を立式できるようになろう。

条件式を変形し、明点間隔の式 $\Delta x=\dfrac{L\lambda}{d}$ をだせるようになろう。

問題 3 ヤングの実験

ヤングの実験での、明点の間隔Δxは、0次($m = 0$)の点と1次($m = 1$)の点の差から、d、L、λを用いて、（　①　）と表せられる。



ここで赤色と紫色では、波長λが（　②　）色の方が長いので、中心Oより遠くに明点ができるのは、（　③　）色の方である。

また、複スリットの間隔dを狭くすると、明点の間隔は（　④　）くなり、複スリットからスクリーンまでの距離Lを短くすると、明点の間隔は（　⑤　）くなる。

また、この装置を屈折率n（n>1）の水中に入れると、波長がλから（　⑥　）にかわるので、明点の間隔は（　⑦　）くなる。ただし、もともとは空気中(n=1)で実験していたとする。

次に、単スリットを鉛直上向きに動かした。
すると、単スリットSから複スリットS_1、S_2までの距離に差ができる。スクリーンに写る明点で、経路差が0の点が0次（$m = 0$）の点なのを考えると、単スリットを上向きに動かしたとき、$m = 0$の点は（　⑧　）向きに動く。よって、単スリットを上向きに動かしたときスクリーンに写る干渉縞は（⑧）向きに動くとわかる。

問題3 解答　①　$(\Delta x=)\dfrac{L\lambda}{d}$　② 赤　③ 赤　④ ひろ　⑤ せま　⑥　$\dfrac{\lambda}{n}$　⑦ せま　⑧ 下

問題3 解説

① ここまでのモデルで扱ったように、『経路差を求め』『明点の条件式をたてて』『明点間隔を求める』というステップで計算をしよう。何度もやり直していくことで理解が深まります。計算すると、

経路差は $d\sin\theta$　⇒　$d\dfrac{x}{L}$

干渉の条件式は　$d\dfrac{x}{L}=\dfrac{\lambda}{2}\times 2m$

1 次の明点までの距離 x_1 は $x_1=\dfrac{L\lambda}{d}$

x_1 が明点間隔 Δx と等しいので、$\Delta x=\dfrac{L\lambda}{d}$

② 赤　『光の色と波長の関係』は暗記項目。赤の波長が長く、紫は短い。

③ 赤　明点間隔の式 $\Delta x=\dfrac{L\lambda}{d}$ の λ が大きいと、Δx は大きくなるので、λ の大きい赤色の方がより遠くに明点を作る。

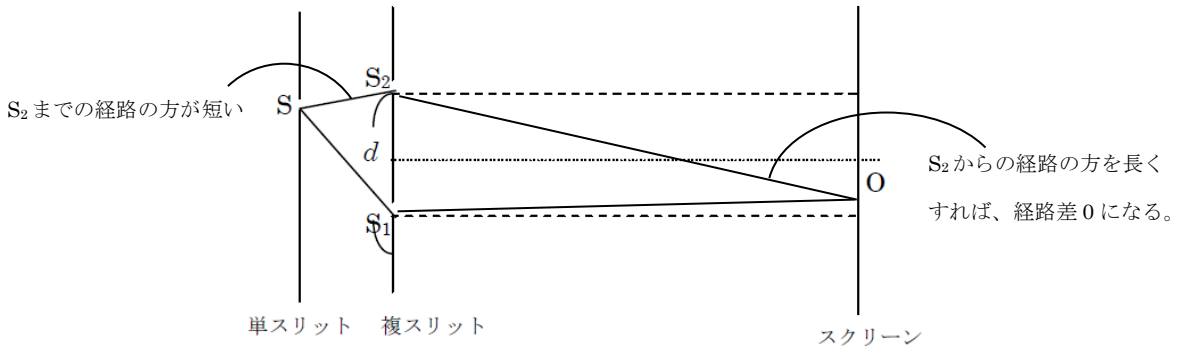
④ ひろ　明点間隔の式 $\Delta x=\dfrac{L\lambda}{d}$ の d が小さくなると、Δx は大きくなるので、間隔はひろくなる。

⑤ せま　明点間隔の式 $\Delta x=\dfrac{L\lambda}{d}$ の L が小さくなると、Δx は小さくなるので、間隔はせまくなる。

⑥ $\dfrac{\lambda}{n}$　屈折の法則より、$1\times\lambda=n\times\lambda'$　λ'について解いて $\lambda'=\dfrac{\lambda}{n}$　$(<\lambda)$

⑦ せま　前問⑥より、λ が小さくなっているといえる。明点間隔の式 $\Delta x=\dfrac{L\lambda}{d}$ の λ が小さくなると、Δx は小さくなるので間隔は狭くなる。

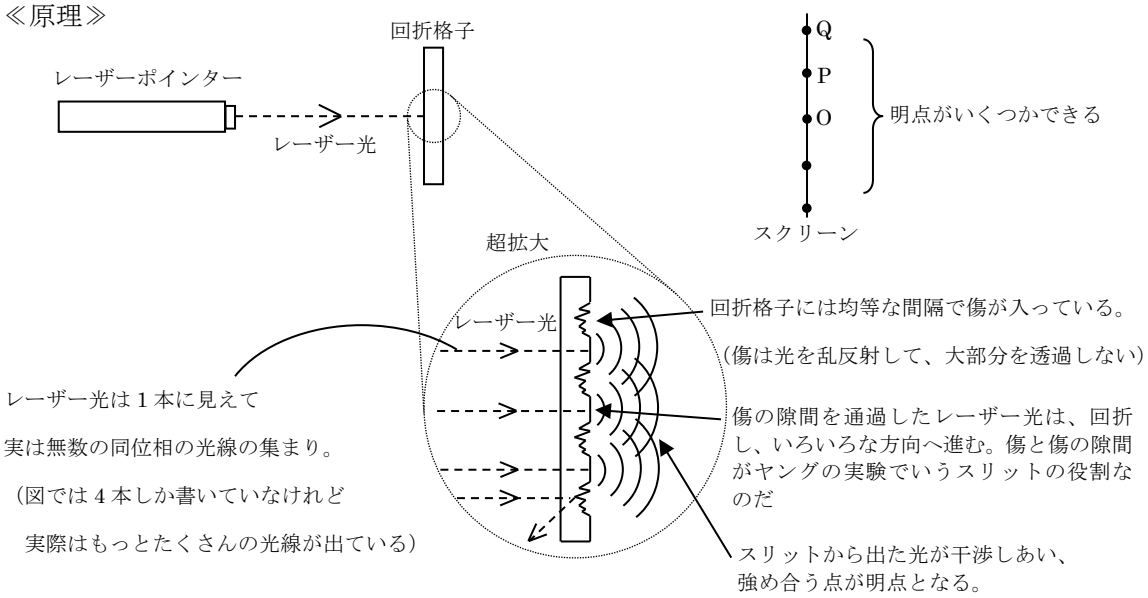
⑧ 下　下図のように作図ができ、単スリットから複スリットまでの間で、上を通る経路のほうが短くなっている。経路差 0 の点を作るには、複スリットからスクリーンまでで、短いぶんをカバーするために、上の経路のほうが長くなっていないといけないと考えられる。もともとの $m=0$ の点（中央）から下にずれた点が $m=0$ の点になるので、模様は下向きに動くと言える。



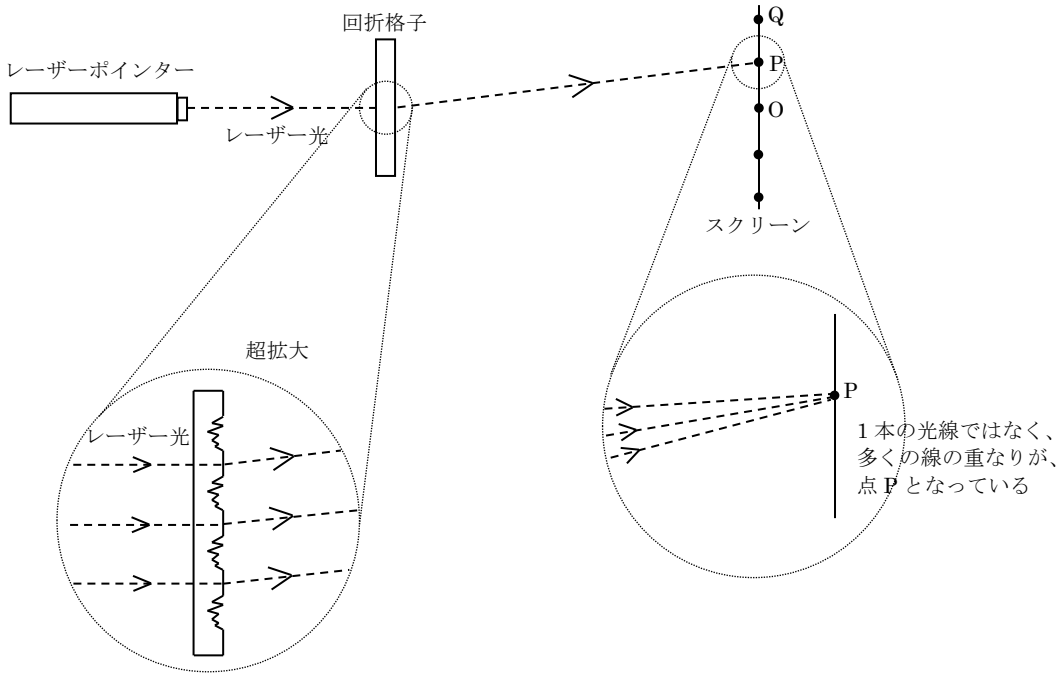
テーマ４ 回折格子

回折格子を通すと、手軽に波の干渉を観察できる。原理を見ていこう。

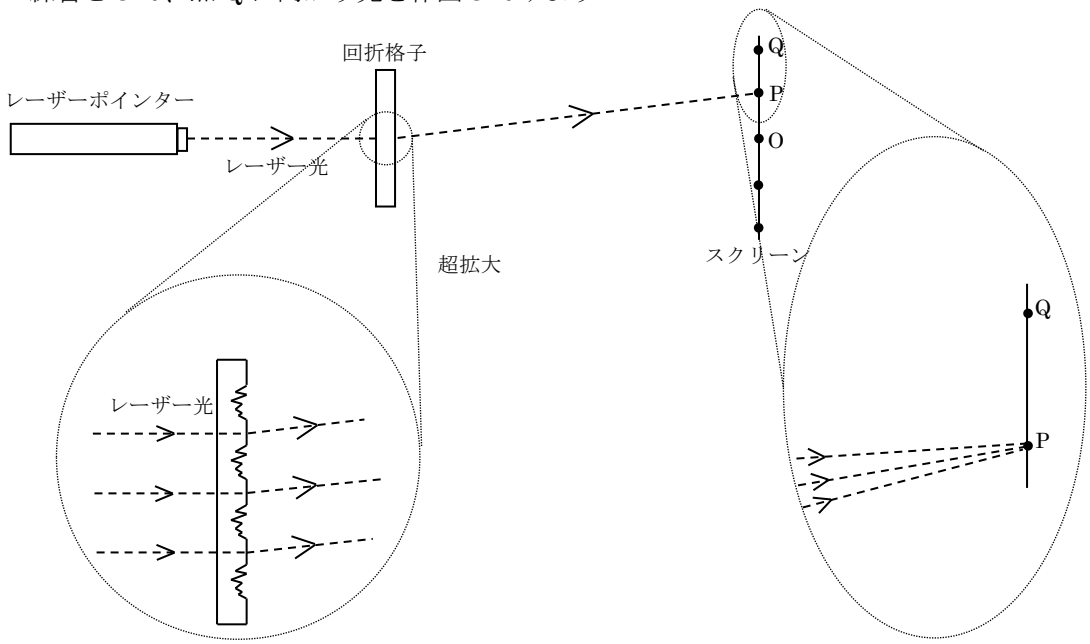
≪原理≫



各隙間からは、いろいろな方向に光が出ているが、点Ｐに向かう光だけに注目すると下図のように作図できる。

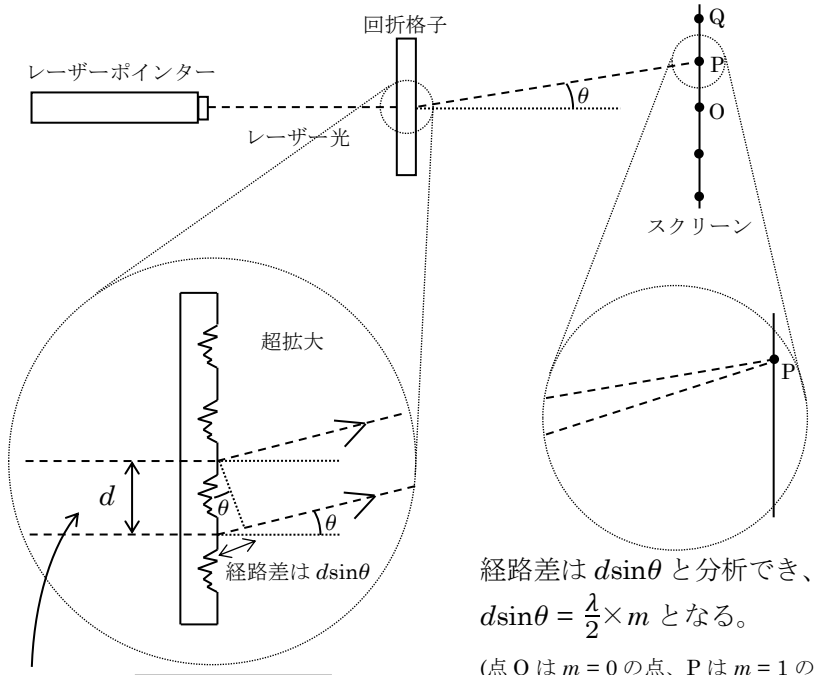


≪練習として、点 Q に向かう光を作図してみよう≫



≪干渉の条件式をたててみる≫

回折格子の作る明点の条件式をつくるときも、重要なのは、『経路差』である。1 つの傷をまたいだ 2 本の光線の経路差を考えてみよう。



傷と傷の間隔を**格子定数 d** という

経路差は $d\sin\theta$ と分析でき、明点の条件式は、

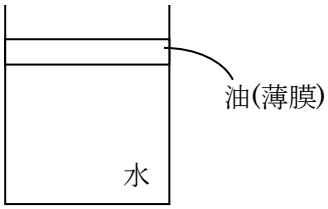
$d\sin\theta = \frac{\lambda}{2} \times m$ となる。

(点 O は $m = 0$ の点、P は $m = 1$ の点、Q は $m=2$ の点と言える)

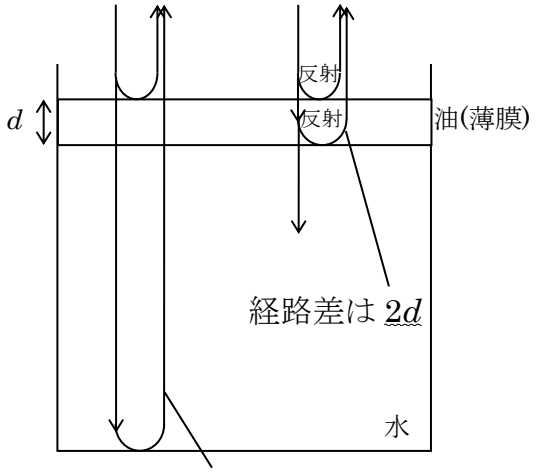
ヤングの実験との違いは、格子定数 d の存在と、近似をせずに角度 θ で答えていい(ときがある)こと。原理は同じ!!

テーマ５ 薄膜の干渉

水の上に少量の油を垂らすと、虹色に見えるような経験があるだろう。あれは、波の干渉が原因で起こっている。原理を見ていこう。ポイントとなる項目がとても多いので１つずつしっかりと



《Point１》 薄膜での光の経路

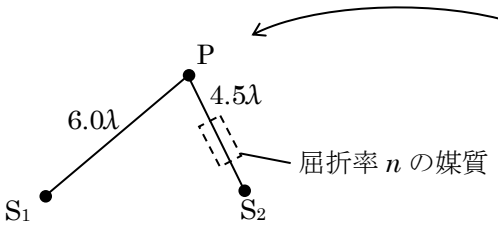


この経路では、経路差が大きすぎて、干渉が起きない。

例えば真上から光が入射した際、薄膜の上面で光の一部が反射し、残りは透過する。そして、薄膜の下面でも同じように一部が反射し、一部が透過する。すると、反射して戻ってくる光の経路が２種類あることになり、干渉が起きるのだ。
ちなみに、干渉は経路差が大きすぎると起きないので、水の下面で反射した光とは起こさない。

《Point2》光学的距離（光路長）

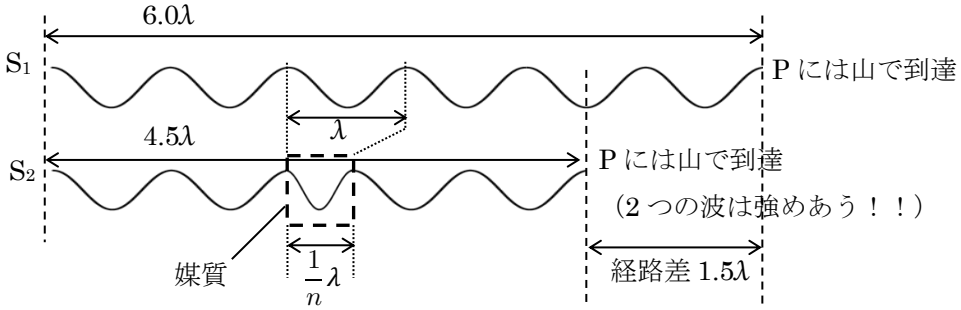
空気中（真空中）を通る光と、屈折率 n を途中通る光は、単純に『経路差』では干渉を考えることができない。
以下は、S_1 と S_2 から波長 λ の波が出るときの具体例モデルである。経路差が 1.5λ で、これは半波長の３倍（奇数倍）なので、弱め合うはずである。しかし、経路の途中で屈折率 n の媒質などがあると、強め合う干渉が起きることもあるのだ。



本来の法則に従うと弱め合うが、屈折率 n の媒質を挟むと、強め合うことも起こる。（何も起きないこともある）

なぜ屈折率 n の媒質があることで、法則に従わなくなるのか作図から考えてみる。

屈折の法則 $n_1\lambda_1 = n_2\lambda_2$ より、$\lambda_2 = \frac{n_1}{n_2}\lambda_1$ といえ、空気から媒質に入ると、波長が $\frac{1}{n}$ 倍になってしまう。これより、$S_1 \to P$ と $S_2 \to P$ の波の位相がずれてしまうのだ。



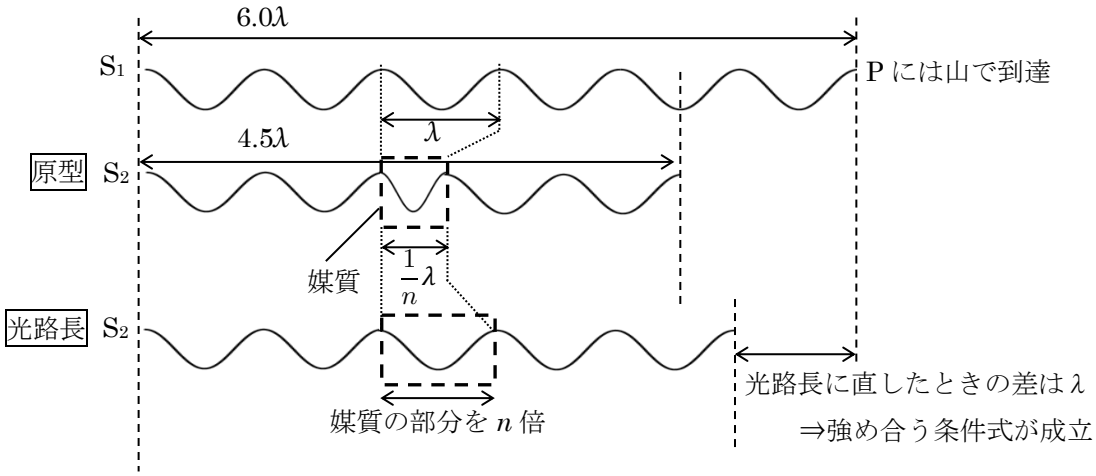
このように屈折率 n の媒質中で波長 λ が短くなってしまい、位相がずれてしまうことで、経路差を利用して干渉を見極める法則と合わない結果となってしまうのだ!!

（図のモデルでは、S_2P の長さは波 4.5 個分の長さなのに、そこに波が 5 個分入ってしまっている!!）

ここで出てくる考え方が、波長が $\frac{1}{n}$ 倍に変わってしまったのなら、そこを n 倍して、元の状態にしてから経路を比べればよいのでは？という考え方である。

このように、**元の状態（真空中（空気中））に換算した長さ**を『光路長』という。

光路長にしたときのイメージ



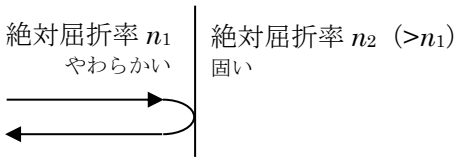
結論!!

屈折率 n の媒質中を通ると波長が縮んでしまうので、**その部分を n 倍**したものを距離としたうえで、干渉の条件式を考えなければならない。（具体的な例は後の薄膜の干渉式で）

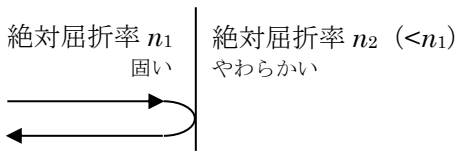
また、このように n 倍して計算した経路の長さのことを『**光路長**（光学的距離ともいう）』といい、光路長の差を『**光路差**』という。

《Point3》波の反射時の位相の変化

波は異なる媒質との境目に侵入するとき、屈折と反射の両方を起こす。そして、反射の際には、位相の変化を起こすことがある。固定端反射の際には、山が谷になって返ってきた（位相がπずれた）のと同じである。これが光波であっても起こることなのだ。



やわらかい→固い
という風に波が入射すると、
固い媒質は動きづらいので、
固定端反射となる。

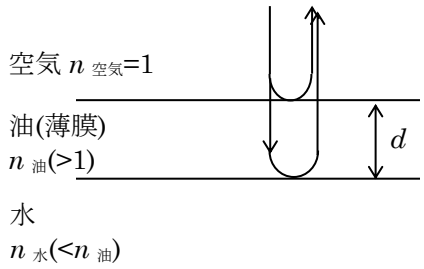


固い→やわらかい
という風に波が入射すると、
やわらかい媒質は動きやすいので、
自由端反射となる。

そして、位相がπずれた波（逆位相の波）の干渉は、強め合いと弱めあいの条件が逆になる。
ということに注意しなければならない

《Point4》条件式を立てる

ここまでの Point1～3 に気をつけて、干渉の条件式を立ててみる。



ここで、経路差は $2d$ になる(STEP1)。
しかし、屈折率 $n_{油}$ の媒質中を通過しているので、光路長に変換しなければならない。
屈折率 $n_{油}$ を経路差にかけて、光路差は $2n_{油}d$ となる(STEP2)。

干渉の条件式を立てたいが、空気と油の境界で反射している波が固定端反射し、πずれていることに注意する(STEP3)。（今回は油が一番固い。）
光路差が $2n_{油}d$、そして片方の経路で位相がπずれていることを考慮して条件式を立てると、

強め合う条件　$2n_{油}d = \dfrac{\lambda}{2} \times (2m+1)$　　$(m = 0,1,2,3\cdots)$

弱めあう条件　$2n_{油}d = \dfrac{\lambda}{2} \times 2m$　　$(m = 0,1,2,3\cdots)$

となる。

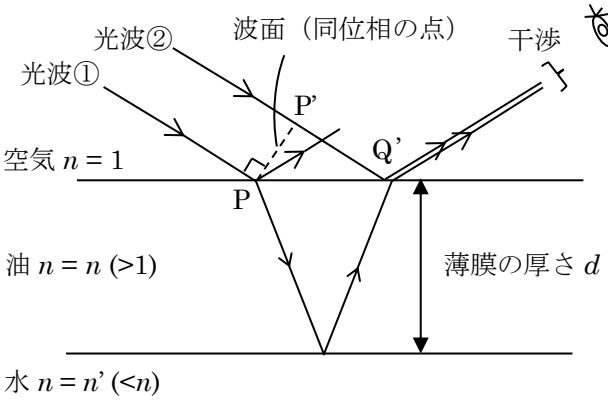
経路差を出す　⇒　光路差に直す　⇒　反射のチェック　⇒　立式
という王道パターンをマスターしよう。

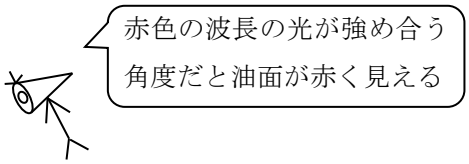
また、材質によっては、2 か所の反射両方で位相のずれが起こることもある。
そうなると、結局、同位相の波になり通常通り、偶数倍で強め合う、という条件式になる。

テーマ 6 薄膜への斜め入射

薄膜の干渉の発展事項である。水たまりが虹色に見える理由はこれ。

≪経路差≫





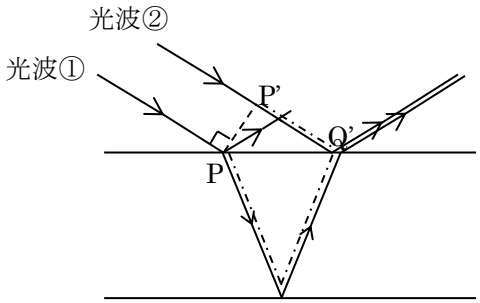
薄膜の斜め入射のポイントは、経路を数え始めるスタート地点が不明瞭なことである。

そこで、同位相の点を繋いだ線である「波面」という要素を利用する。

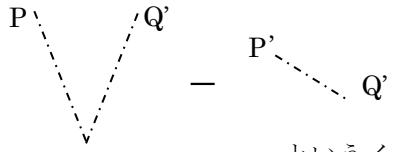
例えば、山同士を結んだ線などが波面である。そして、波面は波の進行方向と 90°という特徴がある。

（ホイヘンスの原理で学習しました）

光波①が空気→油の境界面 P に到達した時刻での波面を書くと上図の点線のようにかけて、P と P'は同位相だといえる。よって、経路差を考えるときは P からの距離と、P'からの距離の差を考えればよい。



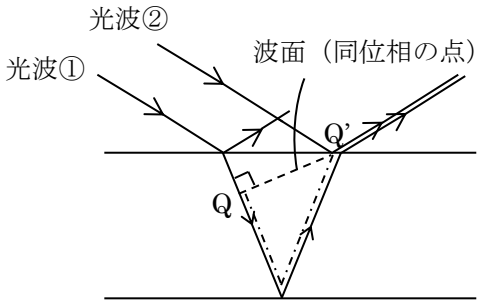
Q'で光波は合流しているので、経路差は PQ'から P'Q'を引いた長さとなる。図で引き算を示すと、



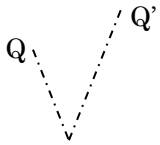
というイメージ

しかし、この引き算をするのは、大変なので、波面を引く場所を変えてみる。

光波②が空気→油の境界面 Q'に到達した時刻での波面を書くと、下図のようになる。



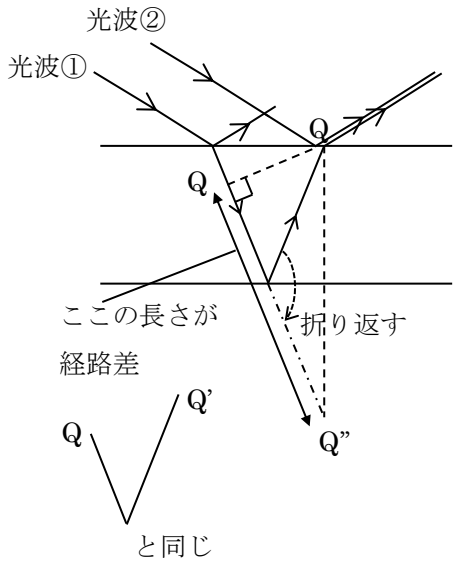
波面を書いて示した光波①の Q は、光波②の Q'と同位相である。すると、経路差は引き算をせずに出すことができ、

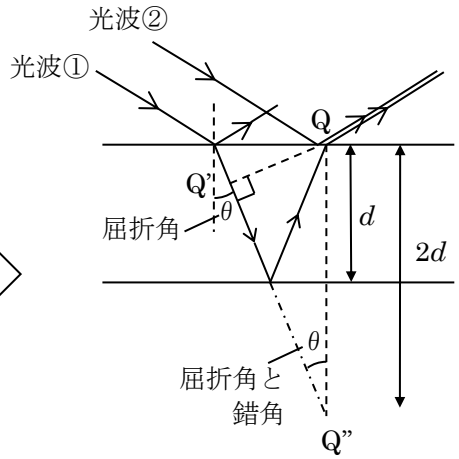


の部分となる。

≪経路差を求める作図≫

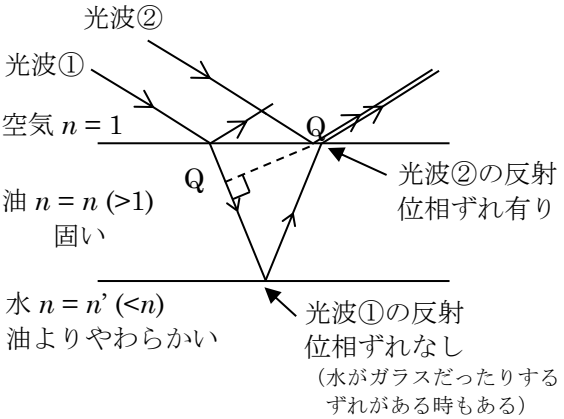
薄膜の斜め干渉の経路を出すときは、特殊な作図で出していく。手順を覚えてしまおう。





屈折角を θ すると、経路差である Q'Q"は三角形 QQ'Q"の三角比の関係から、$2d\cos\theta$ となる。

≪光路差に直し、反射の位相ずれを検証≫



経路差が $2d\cos\theta$ であるが、この長さは、屈折率 n の油の中の長さなので、光路差に直し、$2n_{油}d\cos\theta$ とする。

そして、反射の際の位相ずれを検証すると、左図のように、1 回だけ位相がずれている。よって、通常と逆で、半波長の奇数倍で強め合う。式にすると、

・強め合う条件 $2n_{油}d\cos\theta = \dfrac{\lambda}{2}\times(2m+1)$

$(m = 0,1,2,3\cdots)$

・弱め合う条件 $2n_{油}d\cos\theta = \dfrac{\lambda}{2}\times 2m$

$(m = 0,1,2,3\cdots)$

となる。

Point

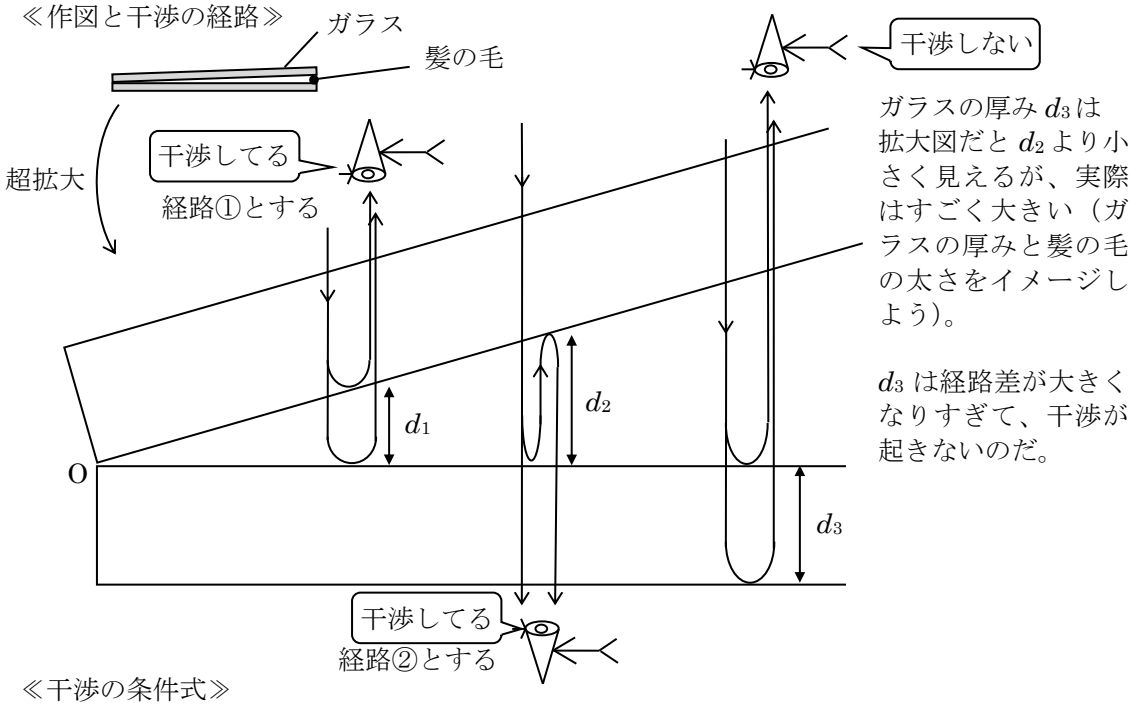
薄膜への斜め入射は、流れがかなり特殊で、
出題はワンパターンになりがち。
自分で作図から導出までまるっと流れを覚えてしまおう

薄膜の厚さや、光線の角度で、強め合う色(波長)が変わるのだ

テーマ７　くさび形空気層

スライドガラスのような板ガラスを２枚用意して、間に髪の毛などの細い異物を挟むと干渉縞が観察できる。

≪作図と干渉の経路≫



ガラスの厚み d_3 は拡大図だと d_2 より小さく見えるが、実際はすごく大きい（ガラスの厚みと髪の毛の太さをイメージしよう）。

d_3 は経路差が大きくなりすぎて、干渉が起きないのだ。

≪干渉の条件式≫

経路①と経路②でそれぞれ干渉の条件式を立ててみよう。

経路①

経路差は　ア

位相のずれが起こる反射は　イ　箇所

よって条件式は、

強め合う：ウ

弱め合う：エ

(m = 0,1,2,3…とする)

経路②

経路差は　オ

位相のずれが起こる反射は　カ　箇所

よって条件式は、

強め合う：キ

弱め合う：ク

(m = 0,1,2,3…とする)

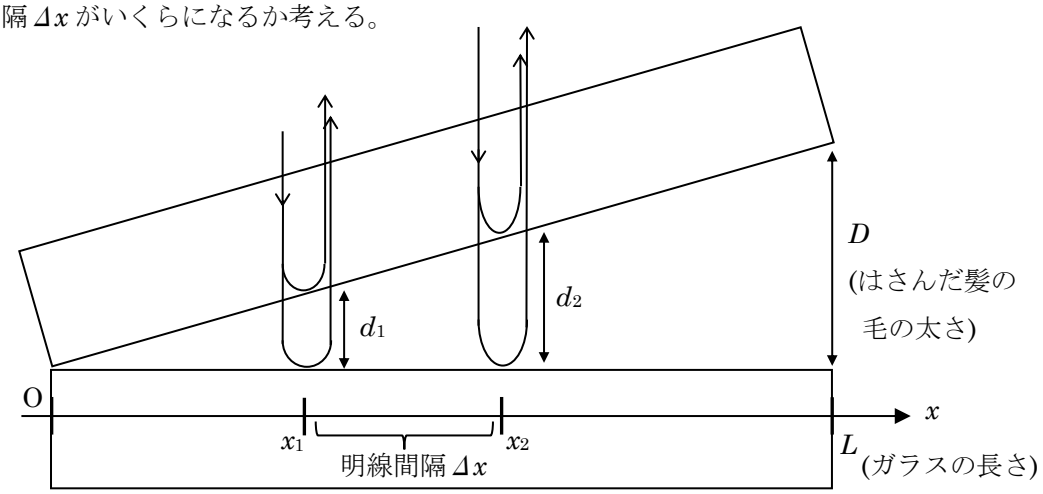
前ページの穴埋めの解答

ア: $2d_1$　イ：１箇所（下のガラスの上面）　ウ：$2d_1 = \frac{\lambda}{2} \times (2m+1)$　エ：$2d_1 = \frac{\lambda}{2} \times 2m$

オ: $2d_2$　カ：２箇所（両方の反射で起こる）キ：$2d_2 = \frac{\lambda}{2} \times 2m$　ク：$2d_2 = \frac{\lambda}{2} \times (2m+1)$

≪くさび形空気層の明線間隔≫

ガラスの左端を原点 O とし、右向きに x 軸をとり、1 番目の明線の位置を x_1、その隣の明線の位置を x_2、ガラスの長さを L、ガラスにはさんだ髪の毛の厚さを D とする。この時、明線間隔 Δx がいくらになるか考える。



STEP① 光の波長を λ、干渉する場所の隙間を d として、明線(強めあう)の条件式を立てる。

前ページのモデルと同様に考えて、 $2d = \dfrac{\lambda}{2} \times (2m+1)$ (ただし $m = 0,1,2,3\cdots$)

STEP② 三角比を用いて、干渉の条件式から d を消去して、位置 x の式にする。

隙間の長さが d の位置を x とおき、d と x 関係を三角形の相似に注目して立てる。

$d : x = D : L \quad \rightarrow \quad d = \dfrac{x}{L}D$ となる。

これを STEP①の条件式に代入する。

$2d = \dfrac{\lambda}{2} \times (2m+1)$ (ただし $m = 0,1,2,3\cdots$) → $2\dfrac{x}{L}D = \dfrac{\lambda}{2} \times (2m+1)$

この式を用いて、x_1、x_2 を示してみる。

($m = 1$ の点) $2\dfrac{x_1}{L}D = \dfrac{3\lambda}{2} \quad \Rightarrow \quad x_1 = \dfrac{3L\lambda}{4D}$

($m = 2$ の点) $2\dfrac{x_2}{L}D = \dfrac{5\lambda}{2} \quad \Rightarrow \quad x_2 = \dfrac{5L\lambda}{4D}$

STEP③ 明線間隔 Δx を求める。

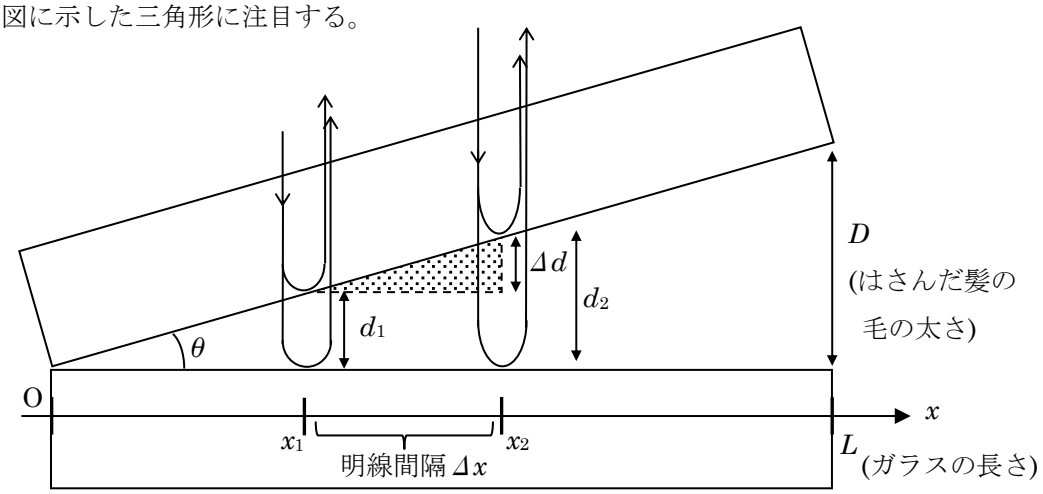
明線間隔 Δx は $\Delta x = x_2 - x_1$ なので、

$\Delta x = \dfrac{5L\lambda}{4D} - \dfrac{3L\lambda}{4D} = \dfrac{2L\lambda}{4D} = \dfrac{L\lambda}{2D}$ よって $\Delta x = \dfrac{L\lambda}{2D}$ となる。

くさび形空気層は、これを自力で出せるようになるまで練習することが必要だ。

＊別の考え方

下図に示した三角形に注目する。



STEP① Δd を λ で示す。（この考え方は重要度が高い）

干渉の特徴として、『強め合っている状態から、経路差が λ 増えると、再び強めあう（弱めあう→弱めあうも同様)』という物がある。

ということは、位置 x_1 と、位置 x_2 を比べると、経路差は λ 増えているといえて、それは図形的に、$2\Delta d$ といえる。よって、

$$2\Delta d = \lambda \quad \cdots \text{(i)式}$$

という立式ができる。

STEP② 三角形の相似を用いて、Δd と Δx の関係式を立て、Δx を示す。

三角形の相似より、

$$\Delta d : \Delta x = D : L \quad \rightarrow \quad \Delta x = \frac{\Delta d}{D} L \cdots \text{(ii)式}$$

STEP③ (i)式、(ii)式を連立して、Δd を消去する。

(i)式を変形して、

$$\Delta d = \frac{\lambda}{2}$$

これを、(ii) 式に代入して、

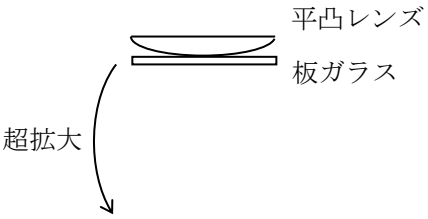
$$\Delta x = \frac{L\lambda}{2D}$$

このように、前ページと同じ結論を導ける。

テーマ８ ニュートンリング

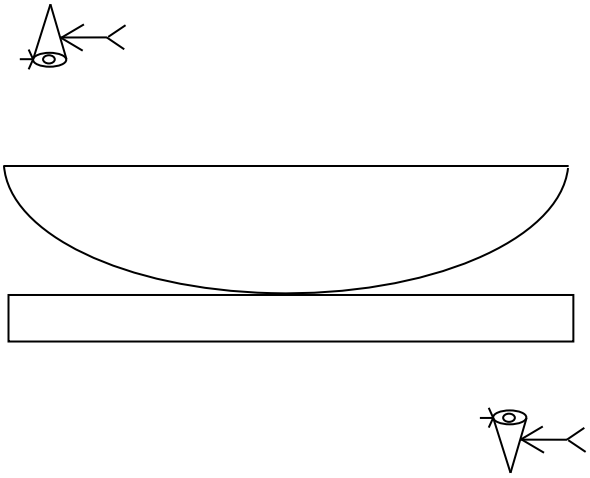
平凸レンズと、平ガラスを重ねることで干渉縞が観察できる。その縞模様が円状に見えることから、ニュートンリングと呼ばれる。

《原理を考えてみよう》



問１：P414 のくさび型空気層を参考に、干渉を起こす経路を考えてみよう

経路① 上から光を当てて、上から見る



経路② 上から光を当てて、下から見る

問２：それぞれの経路で、経路差を考えてみよう（隙間の長さを d とする。）

経路①

経路差 =

経路②

経路差 =

問３：それぞれの経路で反射の際の位相のずれを考慮し、強めあう条件式を立ててみよう

経路①

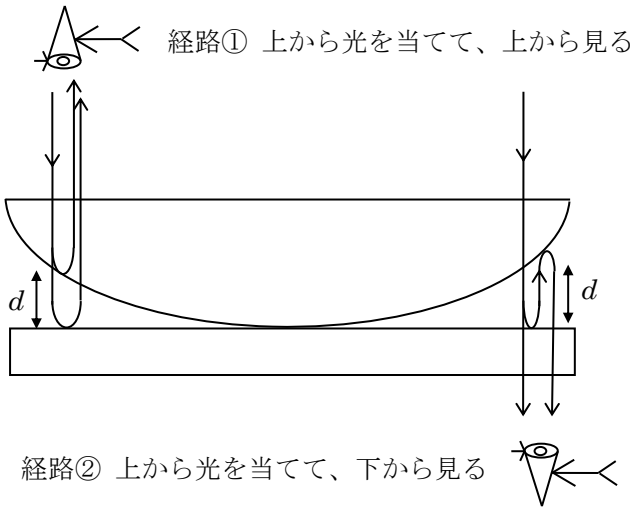
$(m = 0,1,2,3\cdots)$

経路②

$(m = 0,1,2,3\cdots)$

前ページの解答

問１：くさび型空気層を参考に、干渉を起こす経路を考えてみよう



問２：それぞれの経路で、経路差を考えてみよう（隙間の長さを d とする。）

経路① (経路差) = $2d$

経路② (経路差) = $2d$

問３：それぞれの経路で反射の際の位相のずれを考慮し、強めあう条件式を立ててみよう

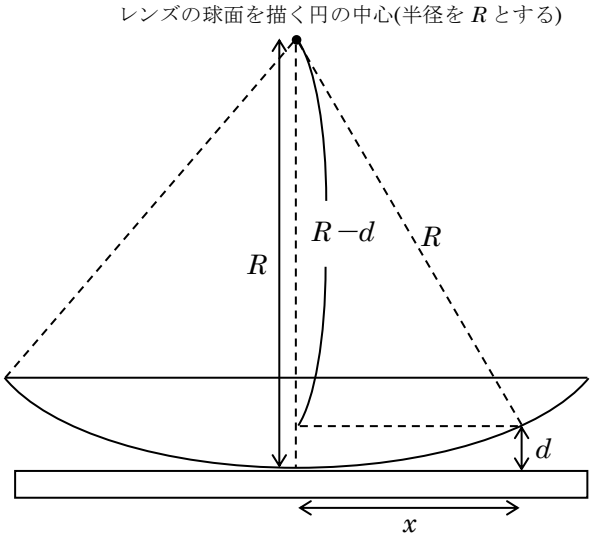
経路① $2d = \frac{\lambda}{2} \times (2m+1)$ $(m = 0,1,2,3\cdots)$

下の反射でのみずれる(1 回)

経路② $2d = \frac{\lambda}{2} \times 2m$ $(m = 0,1,2,3\cdots)$

両方の反射でずれる(2 回)

《レンズの中心から明線までの距離》



レンズの球面が半径 R の円のカーブで作られているとすると、光路差 $2d$ は、三平方の定理より、

$x^2+(R-d)^2 = R^2$ という式が立てられ、

$x^2+R^2-2Rd+d^2 = R^2$

$x^2-2Rd+d^2 = 0$

$2Rd = x^2+d^2$

$\boxed{2d = \frac{x^2}{R} \times \frac{d^2}{R}}$ となる。

これではまだ両辺に d が含まれているので、d を x、R で示せていない。

(＊d は値が小さすぎて、測定がしづらいので、中心からの距離 x で示すことが目的なのだ。)

ここで、近似を用いる。

R に比べて d が非常に小さければ、$\frac{d}{R} \ll 1$ といえて $\left(\frac{d}{R}\right)^2 \fallingdotseq 0$ と近似できる。

先ほどの三平方の定理から出した式を変形する。

$2Rd = x^2 + d^2$

$\left(\frac{d}{R}\right)^2$ を作るため、両辺を R^2 で割る。

$$\frac{2d}{R} = \left(\frac{x}{R}\right)^2 + \left(\frac{d}{R}\right)^2$$

$\left(\frac{d}{R}\right)^2 \fallingdotseq 0$ と近似

$$\frac{2d}{R} = \frac{x^2}{R^2}$$

$$2d = \frac{x^2}{R}$$

$\left(\frac{d}{R}\right)$ は(極小)であり、

(極小)の 2 乗は(超極小) $\fallingdotseq 0$

このように、ニュートンリングの経路差 $2d$ を x と R で表すことができる。

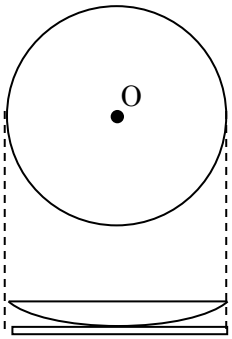
《これを用いて、条件式をレンズの中心からの距離 x で示す》

上から光をあて、上から観察したとき(経路①)の明線の条件

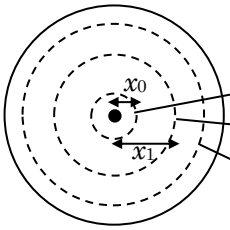
$$2d = \frac{\lambda}{2} \times (2m+1) \quad \Longrightarrow \quad \frac{x^2}{R} = \frac{\lambda}{2} \times (2m+1)$$

《縞模様のできる位置（明環半径と言ったりする)》

置いたレンズを上から見ると、下図のように書ける。



経路差は、点 O から離れれば離れるほど大きくなるといえ、干渉の条件式に含まれる m は、経路差が最小のときの強め合う点で『$m = 0$』、次に強め合うときの経路差の点で『$m = 1$』と増えていくのでニュートンリングでできる縞模様では、



$m = 0$ の明線（明環）

$m = 1$ の明線（明環）

$m = 2$ の明線（明環）

と示せる。

そして、この円の半径を求める式が、先ほど出した条件式を変形したものになる。

$$\frac{x^2}{R} = \frac{\lambda}{2} \times (2m+1) \xrightarrow[x\text{について解いて}]{} x = \sqrt{\frac{R\lambda}{2} \times (2m+1)} \xrightarrow[\text{教科書によく載っている形にする}]{} x = \sqrt{R\lambda(m + \frac{1}{2})}$$

練習として、暗環（打ち消し合う線）の半径の式を出してみよう。 $x = \sqrt{mR\lambda}$ とれば OK。