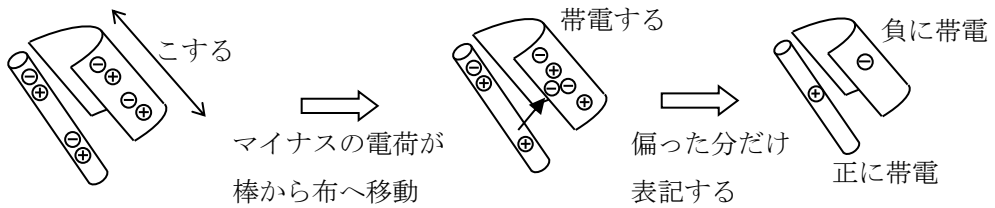
§ 電磁気–第１章　電位と電場

テーマ１ 電気量 q

物質を構成する原子には、＋の電気を持つ陽子と、–の電気を持つ電子が含まれている。
陽子は大きくて重たいので動きづらいが、電子は小さくて軽いので移動しやすい。
実際に、2 つの物体をこすると、こすった物体同士で、電子の移動が起こる。



物体は最初、陽子(+)と、電子(–)を同じ数だけ持っている。
この状態を中性という。

電子が移動したことで、電気の数に偏りが出る。

(–)が多い状態を負に帯電
(+)が多い状態を正に帯電
という。

＊帯電列

素材ごとに、＋、–のどちらの電気を帯びやすいかを調べた並びを帯電列という。

帯電列

－になりやすい ← 塩化ビニル　テフロン　アクリル　ゴム　鉄・アルミ　エボナイト　紙　人体　木材　絹　羊毛　ガラス　毛皮 → ＋になりやすい

例えば、紙とガラス棒をこすったら、紙の方が(–)になりやすいので、
ガラス→紙　という向きに電子の移動が起こる。

物理では、ここまで電気と表現していたものを『電荷』と呼ぶ。
例えば、ガラス棒は＋の電荷をもつ、紙は–の電荷をもつ、という風に表現する。

電荷が物体上で静止していると、それを特別に『静電気』といい、電荷が動いていると『電流』という。『電荷』『静電気』『電流』の言葉を区別して理解しておこう。

新パラメータ　**電気量**

電荷の大きさを『電気量』という。　文字：q または Q　　単位：〔C〕　読み：クーロン

テーマ 2 静電気力

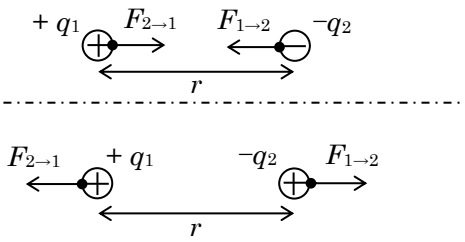
＋と−の電荷は引き合い、＋は＋の電荷は斥けあう。引き合う力を引力といい、斥けあう力を斥力（せきりょく）という。この力は、磁力の N 極、S 極で発生する力と似ている。

この力は静電気力と呼ばれ、その大きさは以下のクーロンの法則の式で示される。

クーロンの法則 〜静電気力 F〜

$$|F_{1\to2}| = |F_{2\to1}| = \left|k\frac{q_1q_2}{r^2}\right|$$

違う種類同士だと引力、同じ種類同士だと斥力となる。公式は大きさを出すための計算式として扱い、正負は無視しよう。

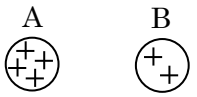


このとき k は、空間の材質ごとに異なり、クーロンの法則の比例定数 k という

ここから怒涛の連続コンセプテスト。なるべく解答を見ずに考え、議論してから解答を見るようにしよう。

ConcepTest 1 静電気力

+4Q の電気量を持つ電荷 A と、+2Q の電気量を持つ電荷 B を近づけた。2 つの電荷が及ぼし合う力の向きと大小関係に関して論ぜよ。



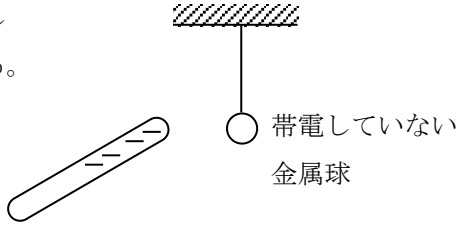
ConcepTest 2 静電気力

図のように、+Q の電気量を持つ電荷 A、C と、−Q の電気量を持つ電荷 B を並べた。このとき電荷 A にはたらく力はどうなるか。

ア. 力ははたらかない　イ. 力は右向きにはたらく　ウ. 力は左向きにはたらく

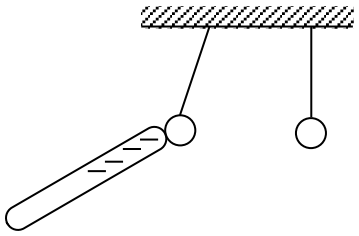
ConcepTest 3 中性の物体

帯電していない金属球をつるし、これに負に帯電した棒を近づけた。この際、接触はさせないものとする。金属球はどのように動くか。また、電気的にどのように変化するか。論ぜよ。



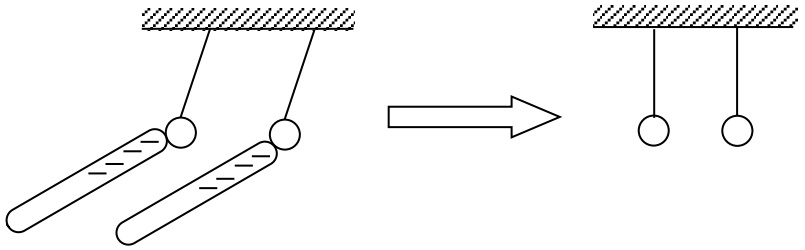
ConcepTest 4 接触の意味

帯電していない金属球を 2 つつり下げ、片方の小球に負に帯電した棒を接触させる。接触させた直後何が起こるか、2 つの球に関して、動きと電気的な性質の両方を論ぜよ。なお、どのように動いても、球同士は接触しないものとする。



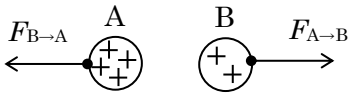
ConcepTest 5 接触の意味

負に帯電している棒を帯電していない金属球に接触させる。これを 2 つの小球に同じく行う。帯電させた 2 つの小球を近づけると何が起こるか。動きと電気的な性質に関して論ぜよ。



ConcepTest 1 解答 同じ大きさの力でしりぞけ合う

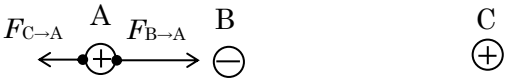
同じ符号の電気なので、球はしりぞけ合う。また、及ぼし合う静電気力は、作用反作用の関係にあり、大きさは等しくなる。式で示すと以下のようになる。



$$|F_{A\to B}| = |F_{B\to A}| = \left|k\frac{q_A q_B}{r^2}\right|$$

ConcepTest 2 解答 イ．力は右向きにはたらく

A は B からも C からも静電気力を受ける。この際、AB 間の距離の方が AC 間の距離より近いので、



$$|F_{B\to A}| > |F_{C\to A}|$$

という関係になるので、合力は右向きとなる。

＊B は、A、C の両方から引かれるが、A の方が近いため $F_{A\to B}$ の方が大きく、合力は左向き

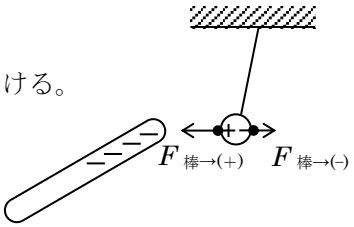
＊C は、A から斥力、B から引力を受けるが、B の方が近いので引力の方が大きく、合力は左向き

ConcepTest 3 解答 金属球は棒に近づく。金属球は電気的に中性である。

図のように帯電した棒が近づくと、金属球の左側に(+)の電荷、右側に(−)の電荷が現れる。

すると、球の左側が棒から引力を受けて、球の右側が斥力を受ける。

その際、球の左側の方が距離が近いので、引力の方が大きく、球は引き寄せられる。

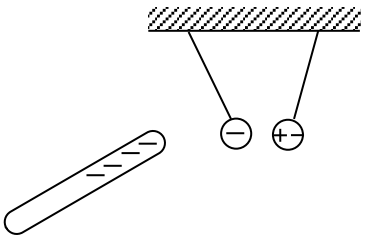


小球内で電荷が移動しただけで、電荷が棒から球に移動したわけではないので、金属球は電気的に中性のままである。このような状態を『分極』という。

＊『中性の電気』というものがあり、中性の電気は、＋、−の電気の両方と反発する、と考えるひとがいる。中性とは＋の電気と−の電気が等量あることを示しているだけで、『中性の電気』というものがあるわけではないので注意しよう。

ConcepTest 4 解答 接触させた球は棒から反発し、球同士は近づく。 左の球は負に帯電し、右側の球は中性である。

接触した瞬間、棒のもつ(−)の電荷が球に移動をする。すると、棒と球が(−)の電荷を持ち斥力が生じ、しりぞけ合う。



(−) に帯電した球の静電気力によって、帯電していない球の左側(+)が球の左側に、(−)が球の右側に現れる。(+)の電荷の方が近い距離なので、受ける引力が大きく、２球は引き合う。

以上のことより、接触した球は負に帯電、接触させていない球は中性となる。

Point

静電誘導

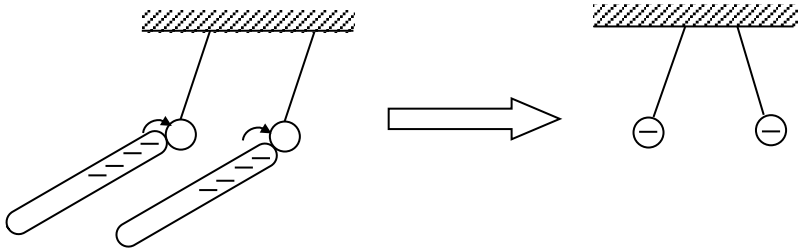
帯電していない金属球などの導体に、帯電した棒を近づけると、ConcepTest52 のように球内部で電荷の偏りが出て、物体の表面に電荷が引き寄せられる『分極』が起こる。この動作を静電誘導という。

これが、ゴムやプラスチックなどの絶縁体の場合、表面に引き寄せられる電荷は極端に小さくなる。極端に小さいだけで、引き寄せられないわけではない。

絶縁体の表面に電荷が引き寄せられる現象は、特別に**誘電分極**、と呼ばれる。次テーマの『絶縁体』で詳しく原理を扱う。

ConcepTest 5 解答　小球はしりぞけあう　　球はどちらも負に帯電している

帯電している棒を小球に接触させると、棒から小球に電荷が移動する。よって 2 つの小球は負に帯電する。帯電した球は、負の電荷同士でしりぞけあう。



テーマ 3　導体と絶縁体

電流を流しやすいものを導体、電流を流しにくいものを絶縁体（不導体）という。これはその素材の持つ自由電子の数により区別される。自由電子とは原子による束縛をあまり受けていない電子のことである。

例　導体 … 金属など　　絶縁体 … ゴムやプラスチックなど

誤解しやすいポイント

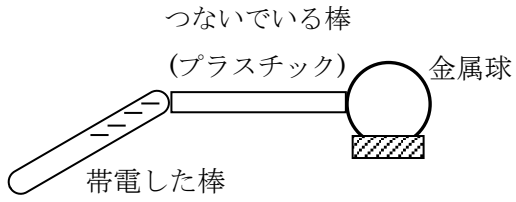
絶縁体でも電荷を持つことはある

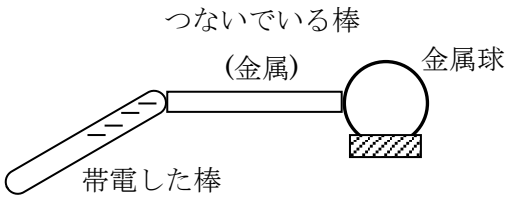
絶縁体 = 絶対電荷を持たない、という勘違いが多い。しかし、冬場の静電気や、こすった下敷きに紙がくっつくなどは、絶縁体で起きている電気現象である。

こするという動作で、原子による束縛を無視して、無理やり電子の移動を起こすことができるので、絶縁体でも電荷を帯びることがあるのだ。導体の持つ自由電子は、こするなどの動作をしなくても電荷の移動ができるというだけなのである。

ConcepTest 6　導体と絶縁体の違い

図のように、帯電していない金属球を机に固定し、負に帯電した棒を、もう 1 本の棒を用いて接触させる。つないでいる棒がプラスチック(絶縁体)のときと、金属(導体)のときで、金属球の電気的な性質はそれぞれどのように変化するか論ぜよ。

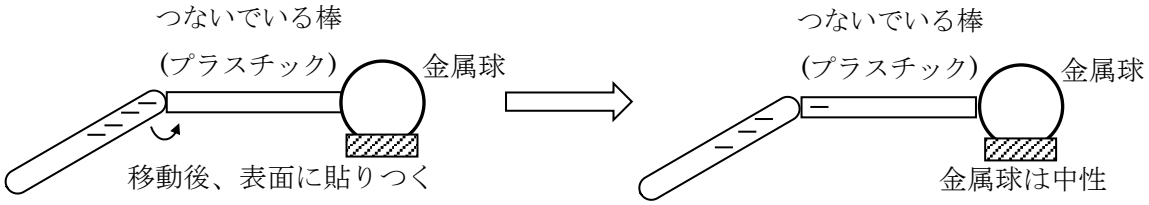




ConcepTest 6 解答　プラスチックのときは中性　　金属のときは負に帯電

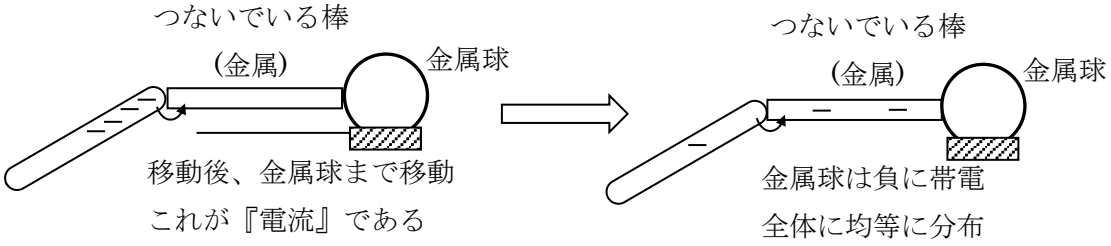
・プラスチック棒

帯電した棒を接触させても電荷は基本的にプラスチック棒に移動しない。プラスチック棒に擦り付けるなどをすれば『帯電した棒→プラスチック』という電荷の移動を無理やり起こせるが、移動後、プラスチックの表面に張り付いて、それ以上の移動は起きない。よって金属球まで電荷の移動は起こらず、中性のままとなる。



・金属棒

帯電した棒を接触させると、電荷は金属棒に移動し、そのまま金属球まで移動し、全体にマイナスが分布する。



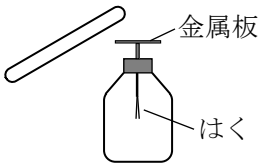
問題 1　箔検電器

帯電していない箔検電器と負に帯電した塩化ビニル棒を使い、次の①～③の操作を順に実行した。以下の設問に答えよ。

① 箔検電器の金属板に塩化ビニル棒を近づけたところ、箔は開いた。

② ①の操作後の状態から、金属板に指で触れたところ、箔は閉じた。

③ ②の操作後の状態から、指を離した後、塩化ビニル棒を遠ざけたところ、箔は開いた。



問 1　操作①で箔が開いたのはなぜか、説明せよ。

問 2　操作③で箔が開いた状態において、箔検電器全体が帯でいる電荷の符号を答えよ。

問 3　操作③の後、負に帯電した塩化ビニル棒を再び箔検電器にゆっくり近づけていった場合、箔の開き方はどのように変化するか説明せよ。

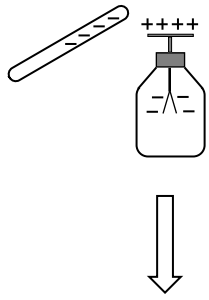
問 4　操作③の後、正に帯電したガラス棒を箔検電器にゆっくり近づけていった場合、箔の開き方はどのように変化するか説明せよ。

問題１解答　問１　はくに負の電荷が集まり、斥力が発生するから　問２　(+)
問３　箔は次第に閉じていく　問４　箔の開きが大きくなる

問題１解説

問 1 塩化ビニル棒の（−）に引き寄せられ、箔検電器内の（＋）の電荷が金属板に集まる。一方で箔には（−）の電荷が集まる。結果として、箔の負の電荷同士が反発し、箔は開く。

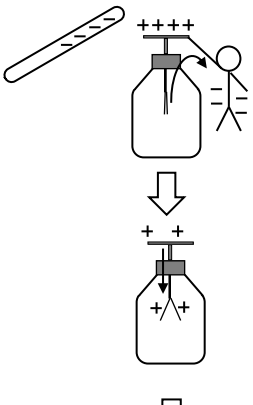
＊ 厳密に移動する粒子の説明をすると、金属板にあった自由電子が、箔に移動している。金属板は電子を失ったことで（＋）の電荷を帯び、電子が増えた箔では（−）の電荷を帯びるのである。



問 2 指で触ると、偏った電荷が人体(地面)に移動する。金属板にある(＋)の電荷は、棒に引き寄せられて移動できないので箔検電器に残る。

その後、指を離してから、棒を遠ざけると、金属板にたまった(＋)の電荷が全体に分布する。よって箔には(＋)の電荷がたまっている。

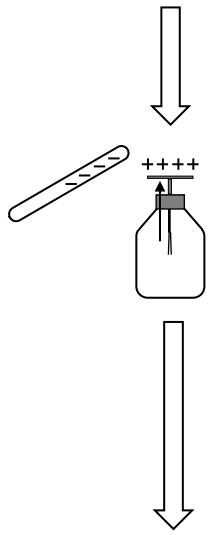
＊ 仮に近づけた棒が(＋)に帯電していたら、金属板に(−)が引き寄せられているので、この操作をすると(−)だけが箔検電器に残る。



問 3 負に帯電した棒を近づけると、箔にある(＋)の電荷が金属板に移動していくので、箔は次第に閉じていく。

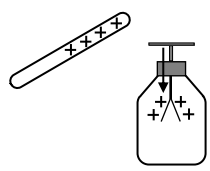
＊ 厳密に移動する粒子の説明をすると、金属板にある自由電子が箔の方へ移動している。金属板は電子を失い(＋)が大きくなり、箔は電子を得て(＋)が小さくなる。結果として、解答のように(＋)の電荷が移動したように見えるのだ。

＊ 箔が完全に閉じたところから、さらに近づけると、箔は再度開く。操作①のときよりも近づけることで、そのときよりも多くの電荷が分極するので、箔に(−)が現れるのである。



問 4 正に帯電した棒を近づけると、金属板にある(＋)が箔に移動して、箔の開きが大きくなる。

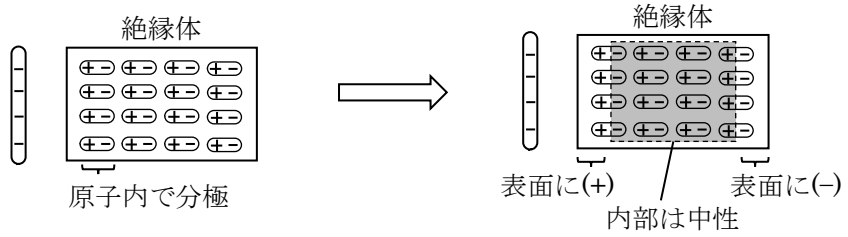
＊ 厳密に移動する粒子の説明をすると、箔の自由電子が金属板の方へ移動している。金属板は電子を得て（＋）が小さくなり、箔は電子を失い（＋）が大きくなるのだ。



静電誘導と誘電分極

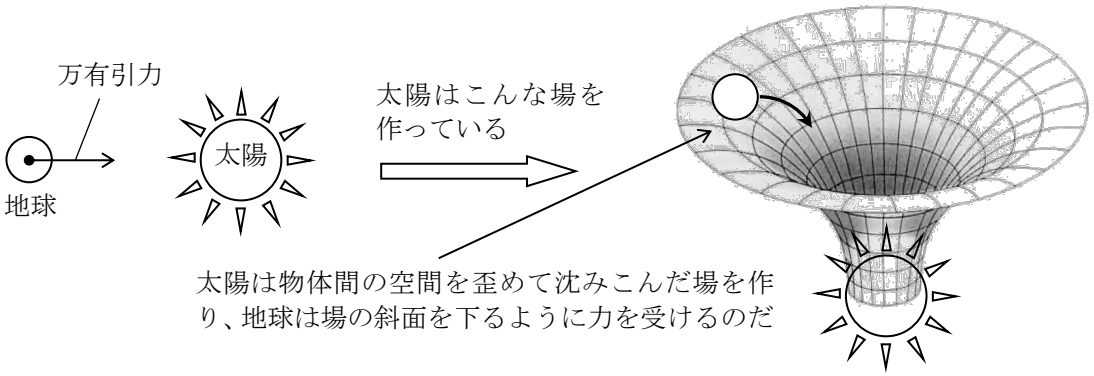
箔検電器の金属板と箔は導体なので、電荷の移動が活発に起き、帯電した棒を近づけると分極を起こし、箔が開いたりする。このように、導体に帯電した物体を近づけることで分極を起こすことを、『静電誘導』という。

一方で絶縁体では、分極の具合は非常に小さくなる。自由に電子が移動できないが、それぞれの原子内で分極が起きて、下図のように表面に電荷が現れる。これを『誘電分極』という。



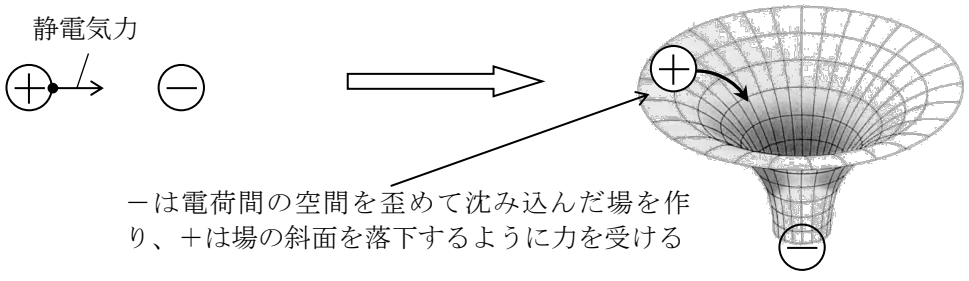
テーマ 4 電場 E

ここまでのテーマは、静電気力 F によって引き起こされる現象を見てきた。このテーマでは、静電気力 F そのものを深掘りしていく。静電気力 F は『場』という理論で語られる力である。万有引力も『質量が作る場』によるものであるので、そちらから。



では『電荷の作る場』という考え方で、静電気力を説明してみよう。

≪+が受ける力のイメージ≫



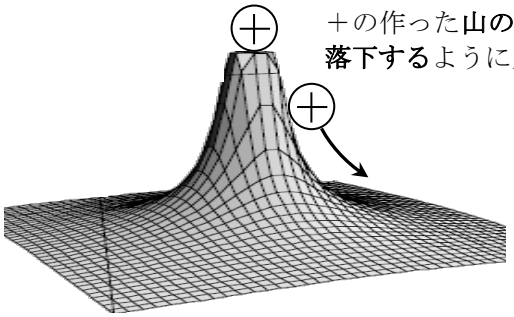
ーは電荷間の空間を歪めて沈み込んだ場を作り、＋は場の斜面を落下するように力を受ける

このような考え方で、＋が−の電荷に引かれることを説明できるのだ。しかし、この考え方ではしりぞけあう場合の説明ができず、次のような少し複雑なルールが出てくる。

・電荷が作る場は**＋は山、－は谷**をつくる。
・場に対して**＋は落下し、－は上昇する**（上に落下するイメージ）

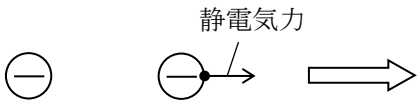
このルールで場を考えると以下のように静電気力を説明できる。

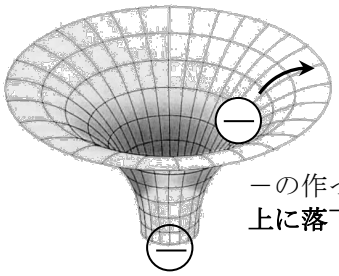
≪＋と＋で発生する斥力のイメージ≫



＋の作った**山の場**を、＋が**落下する**ように力を受ける

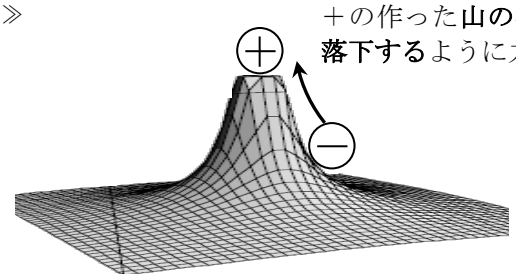
≪−と−で発生する斥力のイメージ≫





－の作った**谷の場**を、－が**上に落下**するように力を受ける

≪おまけ：－が受ける引力のイメージ≫



＋の作った**山の場**を、**上に落下する**ように力を受ける

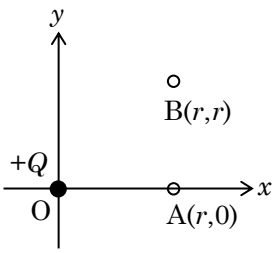
≪電場の定義≫

このように電荷が作る空間の歪み、坂道のことを『電場』という。電場による力は、**坂の傾きが急なほど、受ける力が大きい**と言えるだろう。**この傾きの大小を『電場の強さ』**といい、電場の強さは、仮に+1 C の電荷がそこにあったとき受ける力の大きさとすることにした。

電場の強さを計算するために仮でおく+1C の電荷を『試験電荷』という。

問題 2 電場の公式

図のように xy 平面上の原点と点 A(r,0)、点 B(r,r)をとる。原点 O に＋Q の点電荷を固定する。クーロンの法則の比例定数を k とする。以下の空欄を埋めよ。



① 点 A の電場を考える。電場は、仮に+1 C の電荷をおいたときに、それが受ける力であると定義されているので、点 A に+1 C の電荷をおいて考える。

点 A に+1 C の電荷があった場合、その電荷が受ける力 F は F = [ア] であるので、点 A の電場の強さ E は E = [イ] となる。また、電場の向きは [ウ] といえる。

② 点 A に+q の電荷をおいたとき、+ q の電荷の受ける力 F は、F = [エ] と考えられる。この力 F の大きさを、電場 E を用いて表すと、F = [オ] となる。

③ 電場の単位を考える。電場は『1 C あたりが受ける力』なので、これをそのまま単位にすると〔 [カ] 〕となる。

④ 点 A に負の電荷 −q があった場合、受ける力 F は+q の電荷のときと、大きさは同じで、向きが [キ] となる。このことから『負の電荷は電場と [ク] 向きに力を受ける』といえる。

⑤ ここまでの考え方を利用して、点 B での電場を考えると、電場の強さは E = [ケ]、電場の向きは x 軸となす角が [コ] の向きとなる。

公式のまとめ

静電気力 $|F_{1\to2}| = |F_{2\to1}| = \left|k\dfrac{q_1q_2}{r^2}\right|$

点電荷の周りの電場 $|E| = \left|k\dfrac{Q}{r^2}\right|$

電場から受ける力 $|F| = |qE|$

問題 2 解答 ア: (F =) $k\dfrac{Q}{r^2}$　イ: (E =) $k\dfrac{Q}{r^2}$　ウ: x 軸正の向き（図の右向き）　エ : (F =) $k\dfrac{Qq}{r^2}$

オ : (F =) qE　カ:〔N/C〕　キ: 逆　ク: 逆　ケ: (E =) $k\dfrac{Q}{2r^2}$　コ: 45°

問題 2 解説　『電場』が空間の歪み具合であることを意識して穴埋めをしよう。

ア：点 A に試験電荷をおいて、クーロンの法則より力を出すと、$(F=)\ k\frac{Q\times 1}{r^2}$

イ：空欄アがそのまま電場 E を意味する。 これが電場の公式となる。

ウ：試験電荷が受ける力の向きが電場の向きとなる。

エ：$+q$〔C〕の電荷をおいて、クーロンの法則より力を出すと、$(F=)\ k\frac{Q\times q}{r^2}$

オ：エの式 $F=k\frac{Q\times q}{r^2}$ に、イの式 $E=k\frac{Q}{r^2}$ を代入して $F=qE$ と求めてもいいし、定義より、+1 C のとき $F=E$ の力を受けるので$+q$ 〔C〕のときは q 倍で $F=qE$ と考えてもいい。

カ：言葉の意味から単位を考えてもいいし、$F=qE$ の公式から単位を逆算してもよい。

キ,ク：点 A に負の電荷をおいたとき、受ける力は x 軸負の向きになるが、電場はウで求めたように、x 軸正の向きである。よって逆向きといえる。
あくまでも、試験電荷が受ける力の向きが電場の向きなので気をつける。

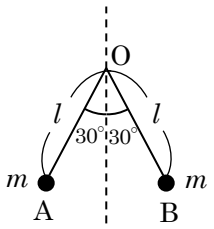
ケ：原点 O から点 B までの距離は、三平方の定理より$\sqrt{2}r$ となる。点 B に試験電荷を想定して、クーロンの法則より力を出すと、$F=k\frac{Q\times 1}{(\sqrt{2}r)^2}=k\frac{Q}{2r^2}$

これが点 B での電場 E となる。

コ:点 B においた試験電荷は､図中の斜め右上向きに力を受ける｡これが電場の向きとなる。

問題 3　静電気力によるつりあい

長さ $2l$ の軽くて伸縮しない糸の両端に、質量 m の小さな導体球 A、B を取り付ける。ここで、A、B に等量の正電荷を与え、糸の中点 O を固定して A、B を静かに放したところ、図のように、糸の OA、OB 部がともに鉛直下向きと角度 30° をなした状態で、全体が静止した。重力加速度の大きさを g、クーロンの法則の比例定数を k として、以下の設問に答えよ。



問 1　A が受ける静電気力の大きさを求めよ。

問 2　A が帯びる電気量を求めよ。

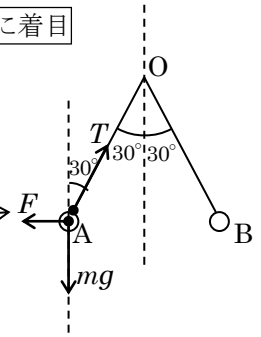
問 3　A の電荷が B の位置に作る電場の強さと向きをそれぞれ求めよ。

問題 3 解答　問 1　$F=\frac{1}{\sqrt{3}}mg$　問 2　$q=l\sqrt{\frac{mg}{\sqrt{3}k}}$　問 3　$E=\frac{1}{l}\sqrt{\frac{kmg}{\sqrt{3}}}$、A→B 向き

問題 3 解説

問 1 電気量がわかっていないので、クーロンの法則以外からのアプローチが必要になる。力の見出しをして、つりあいの関係式を立てよう。

A と B の正電荷同士の斥力なので、静電気力 F は真左にはたらく



A に関してつりあいの式を立てると、

鉛直方向：$T\cos30^\circ = mg \quad \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}T=mg$ … ①

水平方向：$T\sin30^\circ = F \quad \Rightarrow \frac{1}{2}T=F$ … ②

①より、$T=\frac{2}{\sqrt{3}}mg$　これを②式に代入して F について解く。

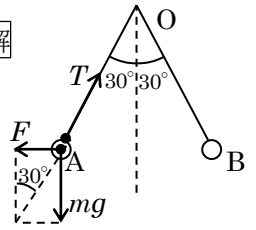
$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}mg=F$　　$\therefore\ F=\frac{1}{\sqrt{3}}mg$

問 1 別解

張力 T とつりあいの関係になるため、静電気力 F と重力 mg の合力は、鉛直下向きと 30° の角度となる。よって、

$\tan30^\circ=\frac{F}{mg}$　　$\therefore\quad F=\frac{1}{\sqrt{3}}mg$

別解

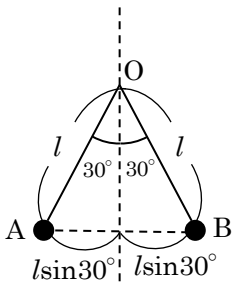


問 2 AB の位置関係は右図のようになる。よって、AB 間の距離は $2l\sin30^\circ \Rightarrow l$ である。これより、A、B の電気量を q とすると、クーロンの法則より、

$$F=\left|k\frac{q_1q_2}{r^2}\right|=k\frac{q^2}{(2l\sin30^\circ)^2}=k\frac{q^2}{l^2}$$

これが、問 1 で求めた F と等しいので、

$$\frac{1}{\sqrt{3}}mg=k\frac{q^2}{l^2}\qquad \therefore q=l\sqrt{\frac{mg}{\sqrt{3}k}}$$



問 3 点 B に試験電荷をおいて、A の電荷から受ける力を考えれば、それが A の作る電場といえる。よって、クーロンの法則より

$$F=E=\left|k\frac{q_1q_2}{r^2}\right|=k\frac{q\times1}{l^2}=\frac{k}{l^2}\cdot l\sqrt{\frac{mg}{\sqrt{3}k}}=\frac{1}{l}\sqrt{\frac{kmg}{\sqrt{3}}}\qquad\left(\because q=l\sqrt{\frac{mg}{\sqrt{3}k}}\right)$$

電場の向きは、B にある正電荷が受ける向きなので A→B 向き

ConcepTest7 電場の重ね合わせ

図 a)～d)に示すように、A、B、C の電荷をおいた。図 a)～d)において

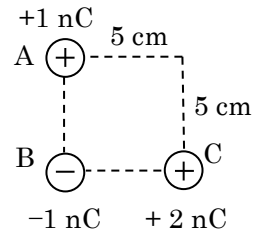
① 電荷 B にはたらく力を個々にベクトルで図に書き込め。

② 電荷 B にはたらく力の合力をベクトルで図に書き込め。

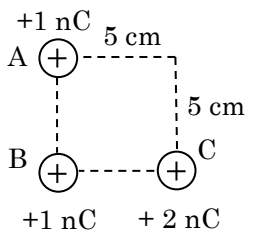
③ 電荷 A と電荷 C が、電荷 B のある場所に作る電場ベクトルを図に書き込め。

書き込む際、①に関しては、個々の力の大きさをベクトルの長さで示すこと。なお、〔nC〕はナノクーロンと読み、1.0 nC は 1.0×10^{-9} C を示している。ナノは 10^{-9} を意味するのだ。

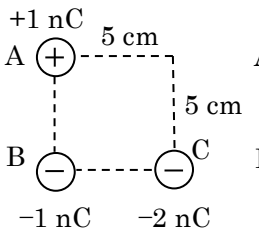
a)



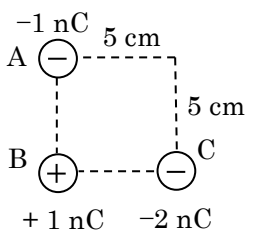
b)



c)



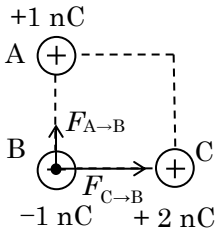
d)



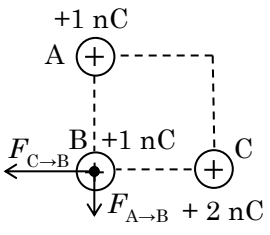
ConcepTest7 解答 ＊③について −の電荷は、電場と逆向きに力を受けることがポイント

① 個々の力

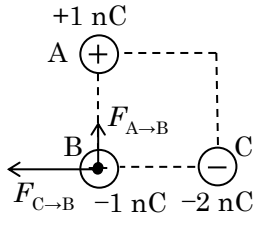
a)



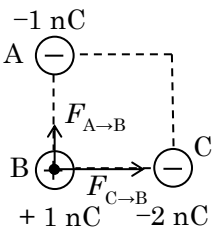
b)



c)

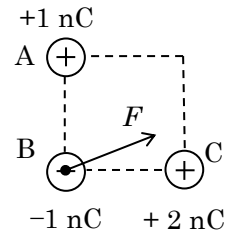


d)

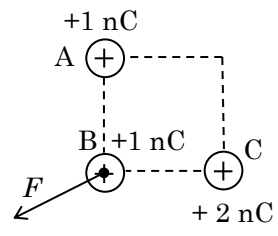


② 合力

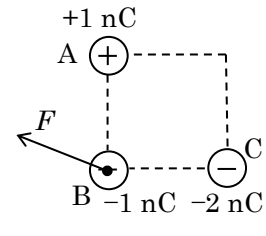
a)



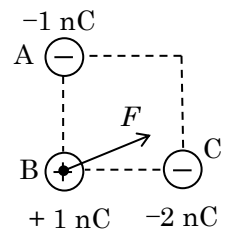
b)



c)

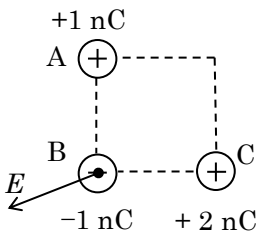


d)

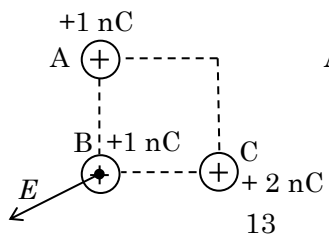


③ 電場

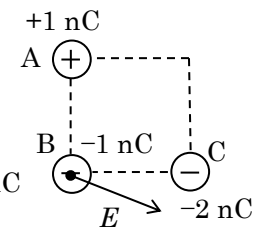
a)



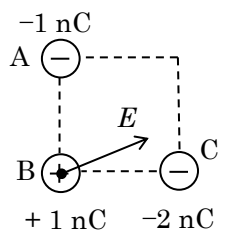
b)



c)



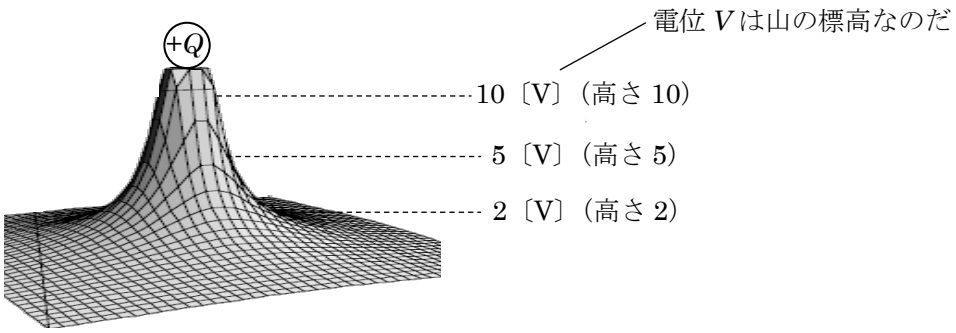
d)



テーマ 5　電位 V

前テーマの問題では、電場をベクトル計算で求めることが多かったが、そもそもは『山』や『谷』のような斜面のイメージである。電場ベクトルは斜面をくだる向きや傾斜の大きさを示していたのだ。そして、斜面の『標高』にも物理量があり、これを**電位 V** という。単位は〔V〕ボルトで示す。

電位は下図のようなイメージ。



$+Q$ の電荷があると、その周りは少なからず盛り上がってしまっている。

よって 0 V (高さ 0)の場所は$+Q$ から無限に離れたところ(無限遠点)と設定することが多い。

無限遠点が 0〔V〕の基準

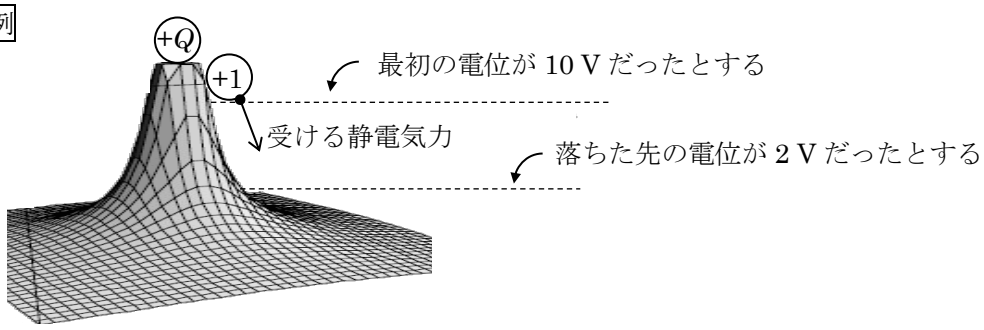
≪電位の定義≫

電位や電場などはあくまで、場のイメージであり、それぞれ大きさを数値化するには定義が必要である。電場は『+1 C が受ける力を電場 E とする』という定義であった。

そして、電位の定義は、以下のようにされた。

+1C の電荷が 1V 落ちたとき、静電気力は 1J の仕事をする

例



例えば、電位 10 V の位置にある+1 C の電荷が 2 V の高さまで落ちたとき、定義にしたがうと静電気力が 8 J の仕事をしたといえる。

この定義により、1 V がどのくらいの高さなのかが決まったのだ。

≪電位と静電気力による位置エネルギー≫

先ほどの定義を一般化する。

1 C の電荷が 1V 落ちたとき、静電気力に仕事を 1 J されている。

↓　仮に落ちた高さが V〔V〕だったら

静電気力に仕事を $1\times V$〔J〕されている。

↓　仮に電荷が$+q$〔C〕だったら

静電気力に仕事を qV〔J〕されている。

このように文字に切り替えられるので、

q〔C〕の電荷が V〔V〕落ちると、
静電気力に $W_{静電気}=qV$〔J〕の仕事をされる

と電位の定義を式にできる。

また、これは静電気力による位置エネルギーである、という考え方もできて、

高さ V〔V〕に電荷があるとき、その高さを消費することで、qV〔J〕の仕事ができるといえ、

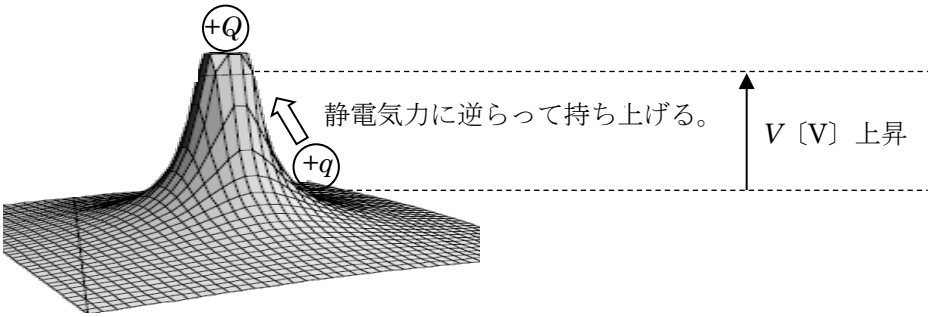
静電気力による位置エネルギーUの公式
$U=qV$

と定義式を示すこともある。

≪電位と仕事≫

次によく聞かれるのは、電荷を持ち上げる場合である。下図のような状況の時、

$+q$〔C〕の電荷を持ち上げるのに必要な仕事の量はいくらだろう。



これは、エネルギーと仕事の関係から考えることができて、

V〔V〕高い位置に移動しているので位置エネルギーが qV〔J〕増えている

といえることから、

V〔V〕持ち上げるには、外力によって、qV〔J〕の仕事が必要

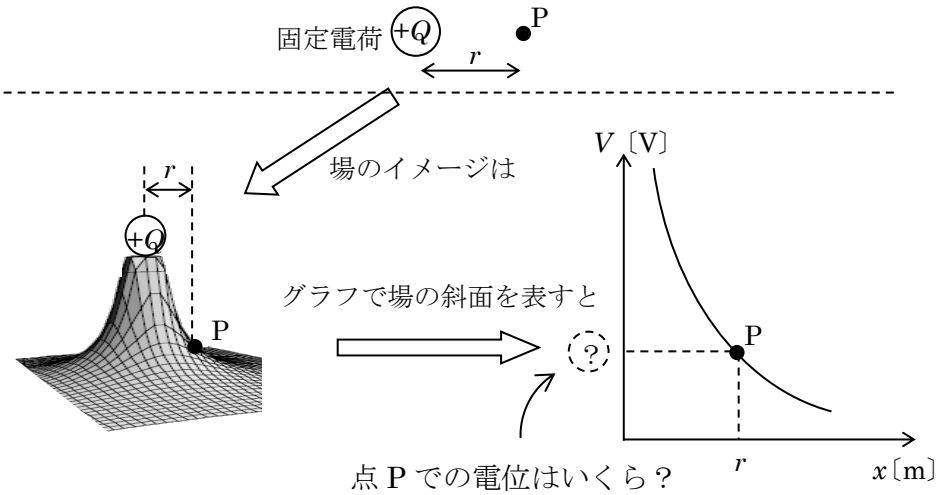
といえるのだ。

電位を V〔V〕あげるのに
必要な仕事の量は $W_{外力}=qV$

と公式化されることもあるので理解しておこう

≪点電荷の周りの電位≫

点電荷 Q からの距離と電位の関係を導こう。固定電荷+Q から r 離れた点 P を考える。



電位の導出（導出は試験には出ない。公式暗記で OK）

+1 C の電荷が、電位 1 V から電位 0 V まで落ちると、静電気力により 1 J の仕事をされるので、点 P の電位 V_P から電位 0 V まで落ちるとき、静電気力にどれくらい仕事をされるかを計算すれば、それが点 P で持っていた電位といえる。

10 J されれば V_P は 10 V、20 J されれば V_P は 20V といえるのだ。

STEP ①　無限遠点を 0 V として場をイメージして、点 P に+1 C の電荷をおく。

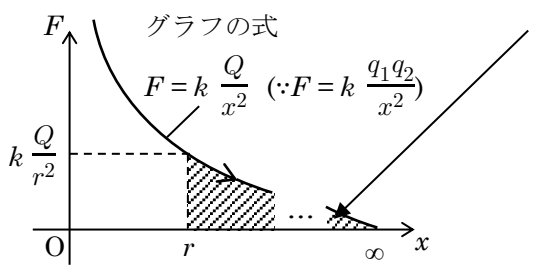
+Q〔C〕の電荷の周りは多少離れたとしても、少なからず持ち上がってしまっているので、無限に遠い点が 0〔V〕となる。その上で、点電荷 Q から r の位置に+1〔C〕をおく。

すると、受ける静電気力の大きさは $F = k\dfrac{Q}{r^2}$ $\left(\because F = k\dfrac{q_1 q_2}{r^2}\right)$ と計算できる。

STEP ②　$F-x$ グラフを書いて、面積を求める

公式　(仕事)＝(力)×(距離) で仕事量を求めるが、『力』が位置によって変わってしまうため単純な掛け算ができない。そこで、$F-x$ グラフを書き、その面積から仕事を求める。

+1 C の電荷が受ける静電気力は、電荷+Q からの距離を x とすると $F = k\dfrac{Q}{x^2}$ となるので以下のように F–x グラフがかけ、斜線の面積が、0 V まで落ちた際にされる仕事となる。



$$W = \int_r^\infty k\frac{Q}{x^2}dx = \int_r^\infty kQx^{-2}dx = \left[-kQx^{-1}\right]_r^\infty = -kQ\left[\frac{1}{x}\right]_r^\infty = -kQ\left(\frac{1}{\infty}-\frac{1}{r}\right) = k\frac{Q}{r}$$

これがされる仕事であり、電位である。

前ページの導出により、次のような公式が導ける。

公式　点電荷の周りの電位 V

$$V = k\frac{Q}{r}$$　(無限遠点を 0 V とする)

問題 4　電位と仕事

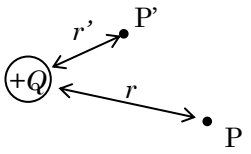
電気量+Q を持つ正の電荷を固定し、そこから距離 r の点を P から、距離 r' ($< r$)の点を P'とする。また、クーロンの法則の比例定数を k、無限遠点を 0 V の基準とする。

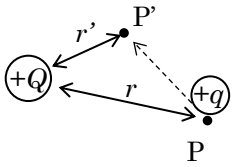
(1) 点 P の電位はいくらか。

(2) 点 P'の電位はいくらか。

(3) 点 P と点 P'の電位はどちらが高く、差はいくらか。

(4) 電気量+q を持つ正電荷を点 P において、点 P'までゆっくりと移動させる。このとき外力がする仕事はいくらか。





問題 4 解答　(1) $V_P = k\frac{Q}{r}$　(2) $V_{P'} = k\frac{Q}{r'}$　(3)点 P'、$\Delta V = kQ(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r})$　(4) $W = kQq(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r})$

問題 4 解説

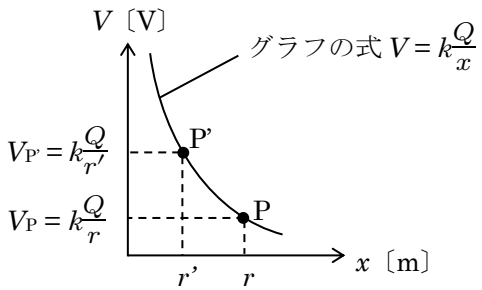
(1) 点電荷の周りの電位の公式 $V=k\frac{Q}{r}$ より

$$V_P=k\frac{Q}{r}$$

(2) 点電荷の周りの電位の公式 $V=k\frac{Q}{r}$ より

$$V_{P'}=k\frac{Q}{r'}$$

(3) 数式からも点 P'の方が電位が高いことはわかるのだが、坂道をイメージすることが大切。



左図のように場の坂道をイメージできて、点 P'の方が高いとわかり、差 ΔV は

$$\Delta V=k\frac{Q}{r'}-k\frac{Q}{r}=kQ\left(\frac{1}{r'}-\frac{1}{r}\right)$$

となる。

重要 言葉の整理と電位と電場のつながり

- 『電場』がグラフで書いたような山のことで、空間の歪みを示している。
- 『電位』がその山の標高を示している。また、電位の差を特別に『電位差』と呼ぶ。今回電位差は ΔV という文字でおいたが、Δ をつけず、『電位差 V』と表現することが多く、『電位 V』と文字が一緒でわかりづらいので気を付ける。
- 『電場の大きさ』は坂道の傾き示していて、傾きが急なところほど、電場が強い、大きい、と表現する。電位 V の傾きが電場の大きさ $|E|$ なので、電位 $V=k\frac{Q}{x}$ を微分して、

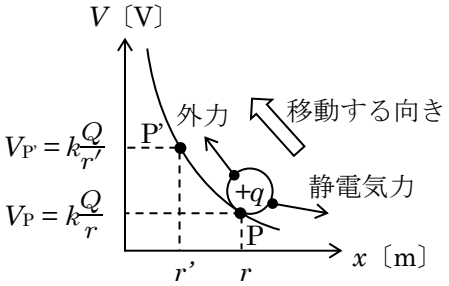
$$|E|=\left|\frac{dV}{dx}\right|=\left|-k\frac{Q}{x^2}\right|=\left|k\frac{Q}{x^2}\right|$$

このように、点電荷の周りの電場の公式が導ける。

(4) 電位の定義の式 $W=qV$ より、

$$W=q\times\Delta V=q\times kQ\left(\frac{1}{r'}-\frac{1}{r}\right)=kQq\left(\frac{1}{r'}-\frac{1}{r}\right)$$

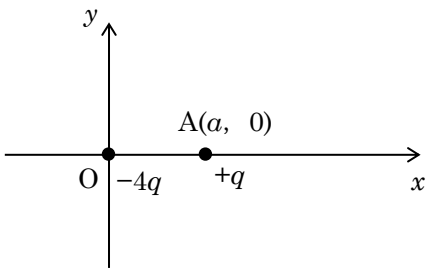
このとき、仕事の正負に気をつけたい。仕事の正負は、移動方向と力の向きが一致していたら正、というものである。今回、$+q$ に加えた外力を考察すると、



左図のように、静電気力が遠ざかる方向で、それに逆らって運ぶことになるので、外力は近づく方向にはたらかせていることになる。これより、仕事は正であるといえるのである。逆に静電気力による仕事を聞かれたら、負になるのである。

問題 5 電位と電場の重ね合わせ

図のように、xy 平面上の原点 O と点 A(a, 0)にそれぞれ$-4q$ と$+q$ の点電荷を固定する。以下の問いに答えよ。クーロンの法則の比例定数を k とし、電位の基準面は無限遠に取るものとする。



(1) 電位 V を縦軸に、座標 x を横軸にとって、V と x のグラフを描け。その際、点 A の電荷による電位と、原点 O の電荷による電位と、その 2 つを合成した電位の 3 種類を書くこと。グラフは大まかな形を示してあればよい。

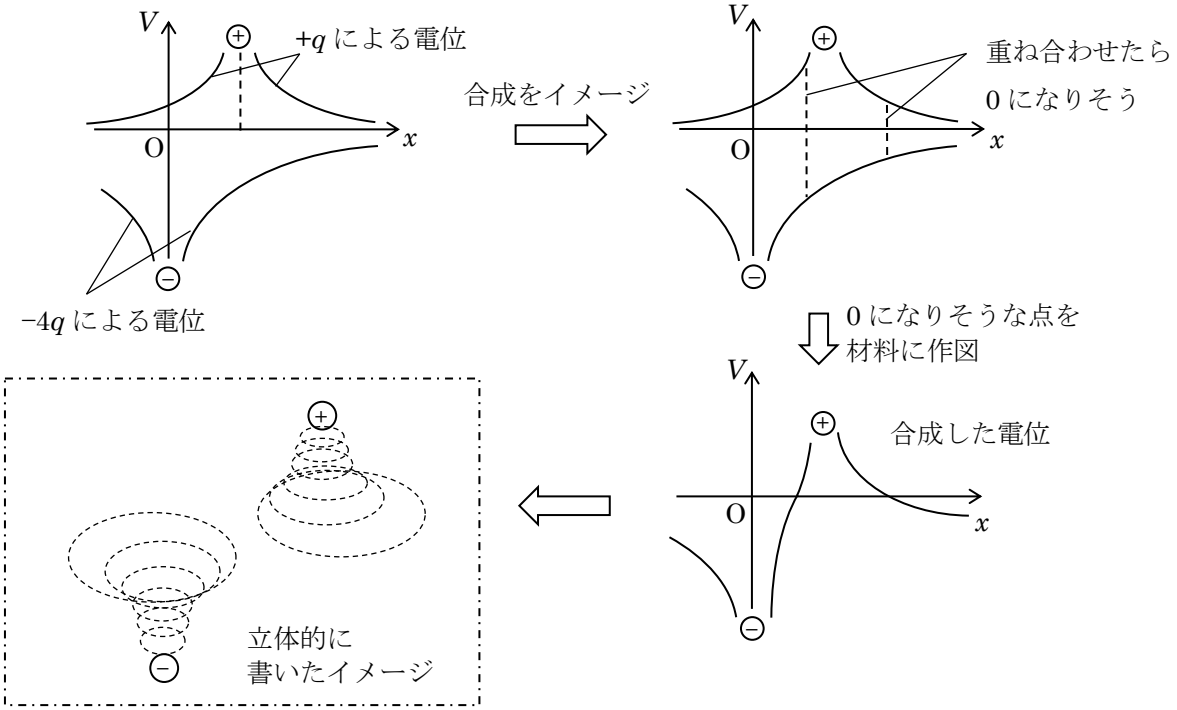
(2) x 軸上で、電位が 0 となる点を答えよ。

(3) x 軸上で、電場が 0 となる点を答えよ。

問題 5 解答 (1) 解説参照　　(2) $x = \frac{4}{3}a$, $\frac{4}{5}a$　　(3) $x = 2a$

問題 5 解説

(1) (+)の電荷は山を作り、(−)の電荷は谷を作るということから電位のグラフを書いてみる。



問題 5 解説続き

(2) 電位の公式 $V=k\frac{Q}{r}$を用いて計算する。また、前問(1)より、$V=0$ となるのは、$a<x$ の区間と、$0<x<a$ の区間の 2 箇所とわかっているが、それぞれの区間で場合分けが必要なので注意する。

《 $a<x$ の区間について 》

$-4q$ による電位 V_1

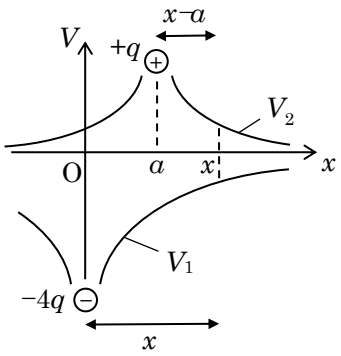
右図より$-4q$ から x 座標までの距離は、x なので

$$V_1=-k\frac{4q}{x}$$

$+q$ による電位 V_2

右図より$+q$ から x 座標までの距離は、$x-a$ なので

$$V_2=k\frac{q}{x-a}$$



V_1 と V_2 を足し算すれば、合成した電位 V となる。

$$V=-k\frac{4q}{x}+k\frac{q}{x-a}$$

$$V=-k\frac{4q(x-a)}{x(x-a)}+k\frac{qx}{x(x-a)}=kq\frac{-3x+4a}{x(x-a)}$$

この式から、$V=0$ となるときの座標を考える。

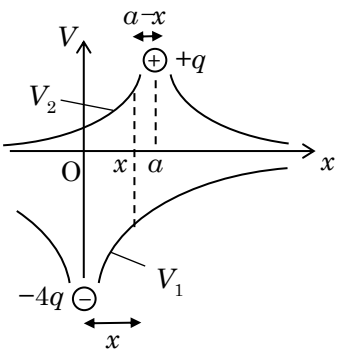
$$0=kq\frac{-3x+4a}{x(x-a)} \quad \Rightarrow \quad 0=-3x+4a \qquad \therefore\ x=\frac{4}{3}a$$

《 $0<x<a$ の区間について（2 つの電荷の間） 》

$-4q$ による電位 V_1

右図より$-4q$ から x 座標までの距離は、x なので

$$V_1=-k\frac{4q}{x}$$



$+q$ による電位 V_2

右図より$+q$ から x 座標までの距離は、$a-x$ なので

$$V_2=k\frac{q}{a-x}$$

V_1 と V_2 を足し算すれば、合成した電位 V となる。

$$V=-k\frac{4q}{x}+k\frac{q}{a-x}$$

$$V=-k\frac{4q(a-x)}{x(a-x)}+k\frac{qx}{x(a-x)}=kq\frac{-4a+5x}{x(a-x)}$$

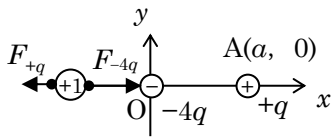
この式から、$V=0$ となるときの座標を考える。

$$0=kq\frac{-4a+5x}{x(a-x)} \quad \Rightarrow \quad 0=-4a+5x \qquad \therefore\ x=\frac{4}{5}a$$

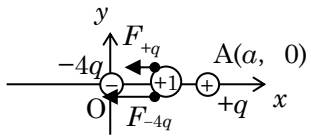
以上より、$V=0$ となるのは、$x=\frac{4}{3}a,\ \frac{4}{5}a$ の 2 箇所である。

問題 5 解説続き

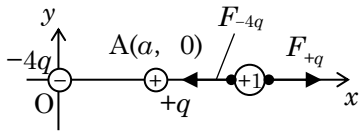
(3) 電場 E が 0 になる場所は、試験電荷(+1 C)をおいたとき、はたらく力が 0 になる点となる。各区間で、はたらく力を考察してみる。



$x<0$ の区間では、電気量が大きく距離も近い $-4q$ の電荷から受ける力 F_{-4q} が、勝ってしまうので、必ず合力が右向きになる。



$0<x<a$ の区間では、2 つの電荷から受ける力がどちらも左向きなので、合力は必ず左向きになる。



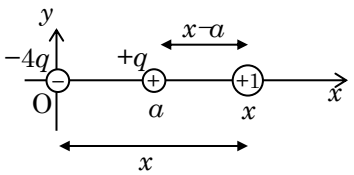
$a<x$ の区間では、電気量の多い $-4q$ は距離が遠く、電気量の少ない $+1q$ は距離が近いので、うまくバランスがとれて合力が 0 になる可能性がある。

上図のようにパターン分けでき、$a<x$ のときだけ、合力が 0 になる可能性があるので、そのときの力を公式 $F=k\frac{q_1q_2}{r^2}$ を用いて計算する。

$-4q$ による力 F_{-4q}

右図より、$-4q$ から x 座標までの距離は、x なので

$$F_{-4q}=k\frac{4q\times1}{x^2}=k\frac{4q}{x^2}$$



$+q$ による力 F_{+q}

右図より、$+q$ から x 座標までの距離は、$x-a$ なので

$$F_{+q}=k\frac{q\times1}{(x-a)^2}=k\frac{q}{(x-a)^2}$$

この 2 力がつりあい、合力が 0 となる点が電場が 0 の点なので、つりあいの式を立てて、x について解く。

$$F_{-4q}=F_{+q}$$

$$k\frac{4q}{x^2}=k\frac{q}{(x-a)^2}$$

$$4(x-a)^2=x^2$$

$$4x^2-8ax+4a^2=x^2$$

$$0=3x^2-8ax+4a^2$$

$$0=(3x-2a)(x-2a) \qquad \therefore x=\frac{2a}{3} \text{ または } 2a$$

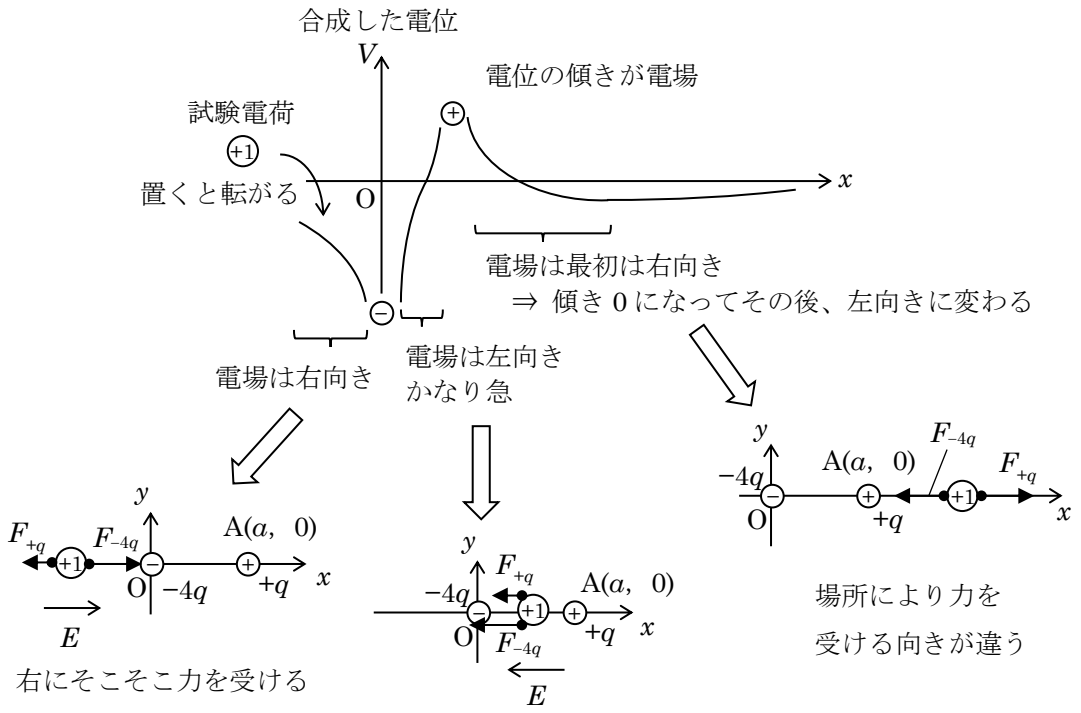
これは、$a<x$ の区間での話なので、解答は $x=2a$ となる。

重要なイメージ　～電位の傾きが電場～

問題 5(3)の電場を、電位の傾きから考えてみよう。

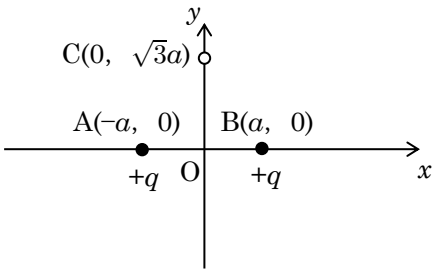
合成した電位のグラフに試験電荷を乗せてみて、坂道を落下していく向きに電場があるというイメージである。

ちなみに(3)で求めた $E=0$ の点よりもさらに正の向きに進むと、電場は左向きとなる。電位が上がって行くのだ。図にすると以下のようになる。



問題 6　平面での重ね合わせ

図のように、xy 平面上の点 A$(-a,\ 0)$、点 B$(a,\ 0)$に $+q$ の点電荷を固定する。以下の問いに答えよ。クーロンの法則の比例定数を k とし、電位の基準面は無限遠に取るものとする。



(1) 点 A の電荷が点 C$(0,\ \sqrt{3}a)$に作る電場の強さと向きを答えよ。

(2) 点 A と点 B の電荷が点 C に作る電場の強さと向きを答えよ。

(3) 点 C の電位はいくらか。

(4) 原点 O の電位はいくらか。

(5) 点 C に電気量$+q$ の正電荷をおき、y 軸負の向きに射出する。射出する速さをいくら以上にすれば、原点 O まで到達するか。ただし、点 C から射出する電荷の質量を m とし、重力による影響は考えないものとする。

問題 6 解答　(1) $\frac{kq}{4a^2}$、A→C 向き　(2) $\frac{\sqrt{3}kq}{4a^2}$、y 軸正の向き　(3) $\frac{kq}{a}$　(4) $\frac{2kq}{a}$　(5) $\sqrt{\frac{2k}{ma}}\,q$

問題 6 解説

(1) 点 C に試験電荷(+1C)をおいて、受ける力を計算すればそれが電場 E である。

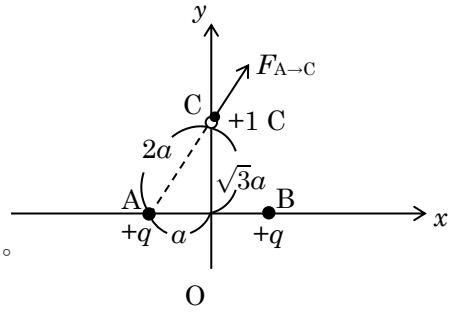
三平方の定理より、AC 間の距離は $2a$ とわかる。

クーロンの法則 $F=k\frac{q_1q_2}{r^2}$より、$F_{A\to C}$ は、

$$F_{A\to C}=k\frac{q\times1}{(2a)^2}=\frac{kq}{4a^2}$$

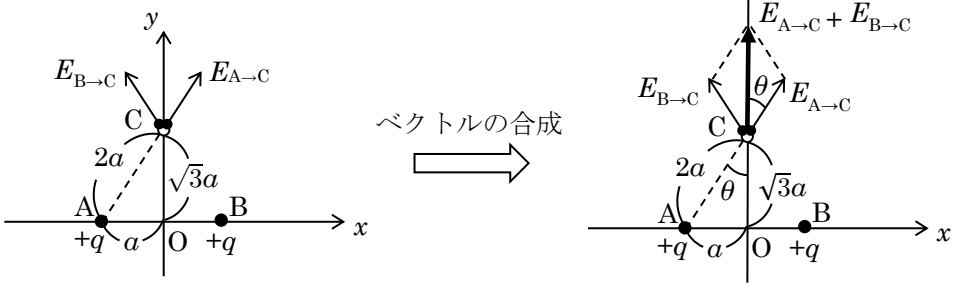
これが、点 A の電荷が点 C に作る電場の強さとなる。

向きは $F_{A\to C}$ の向きなので、A→C 向き



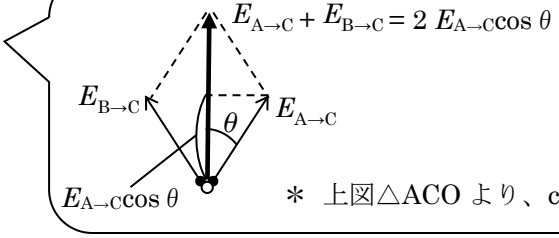
(2) 点 A の電荷と点 B の電荷の 2 つが作る電場を重ねあわせる。**電場はベクトルなので、ベクトルの足し算**になることに注意する。

点 B の作る電場の大きさは、点 A と対称的な関係なので前問(1)で計算したものと同じなので、$|\vec{E}_{A\to C}| = |\vec{E}_{B\to C}| = \left|\frac{kq}{4a^2}\right|$となる。向きは B→C 向きになる。ベクトルを書くと下図のようになる。



ベクトルの合成をすると、

$$E_{A\to C}+E_{B\to C} = 2E_{A\to C}\cos\theta$$
$$= 2\cdot\frac{kq}{4a^2}\cdot\frac{\sqrt{3}a}{2a}$$
$$= \frac{\sqrt{3}kq}{4a^2}$$



＊ 上図△ACO より、$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}a}{2a}$

向きはちょうど真上になるので、y 軸正の向きといえる。

(3) 点電荷の周りの公式 $V = k\frac{Q}{r}$より考え、電位の重ねあわせする。**電位はスカラー量なので、単純な足し算と**なる。

点 A にある電荷が点 C に作る電位 $V_{A\to C}$ は

$$V_{A\to C} = k\frac{q}{2a}$$ ＊点 A の電荷は(+)なので山の場で電位は(+)になる。

点 B にある電荷が点 C に作る電位 $V_{B\to C}$ は

$$V_{B\to C} = k\frac{q}{2a}$$ ＊点 B の電荷は(+)なので山の場で電位は(+)になる。

$V_{A\to C}$ と $V_{B\to C}$ を重ね合わせる。結果、点 C での電位 V_C は

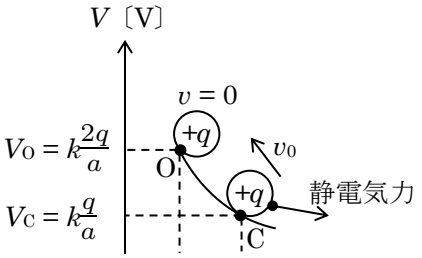
$$V_C = V_{A\to C} + V_{B\to C} = k\frac{q}{2a} + k\frac{q}{2a} = \frac{kq}{a}$$

(4) 点 A や点 B から原点 O までの距離が a であることに注意して、前問(3)と同様に電位を求める。原点 O での電位 V_O は

$$V_O = V_{A\to O} + V_{B\to O} = k\frac{q}{a} + k\frac{q}{a} = \frac{2kq}{a}$$

問題 6 解説続き

(5) 点 C→原点 O では、より高い電位に移動しているので、坂道を登って行っているイメージである。射出する速度を v_0 として、下図のようにイメージしよう。ギリギリ原点 O に到達するには、原点 O に到達したとき速さが 0 になっていればよい。



ここで静電気力による仕事は $W=qV$ より、

$$W = q \times (V_O - V_C)$$
$$= q \times \left(k\frac{2q}{a} - k\frac{q}{a}\right)$$
$$= k\frac{q^2}{a}$$

このときの V は、電位ではなく、電位差という意味の V であることがポイント。

また、移動方向と、静電気力の向きの関係より、これは負の仕事であることに注意する。

運動エネルギーと仕事の関係より式を立てると、

㊊運動エネ	＋	仕事	＝	㊋運動エネ
$\frac{1}{2}mv_0^2$	＋	$\left(-k\frac{q^2}{a}\right)$	＝	0

$$\therefore v_0 = \sqrt{\frac{2k}{ma}}\, q$$

(5)別解　静電気力による位置エネルギーでの解法

静電気力による要素を仕事ではなく、位置エネルギー $U=qV$ として捉えて、力学的エネルギーの保存の式を立てる。

㊊力学エネ	＝	㊋力学エネ
$\frac{1}{2}mv_0^2 + qV_C$	＝	$0 + qV_O$
$\frac{1}{2}mv_0^2 + q\times k\frac{q}{a}$	＝	$0 + q\times k\frac{2q}{a}$

$$\therefore v_0 = \sqrt{\frac{2k}{ma}}\, q$$

このときの V は電位差ではなく、電位という意味の V であることがポイント。

どちらの解き方も理解しておこう。