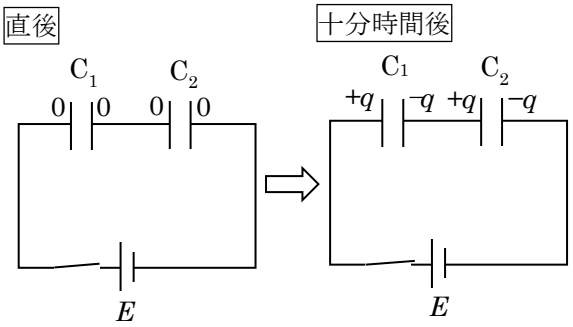
テーマ 4 コンデンサーの合成容量

コンデンサーを含む回路では「直列接続」「並列接続」と呼ばれるものがある。その際、「合成容量」という考え方も出てくる。

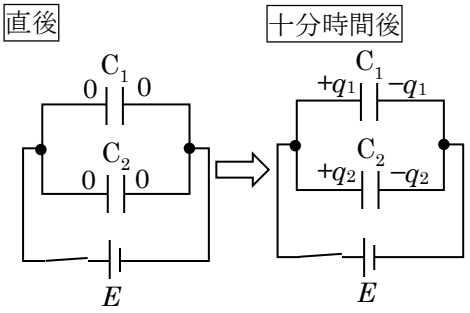
《合成の基本の形》

以下のような接続を直列接続、並列接続、という。

～直列接続～



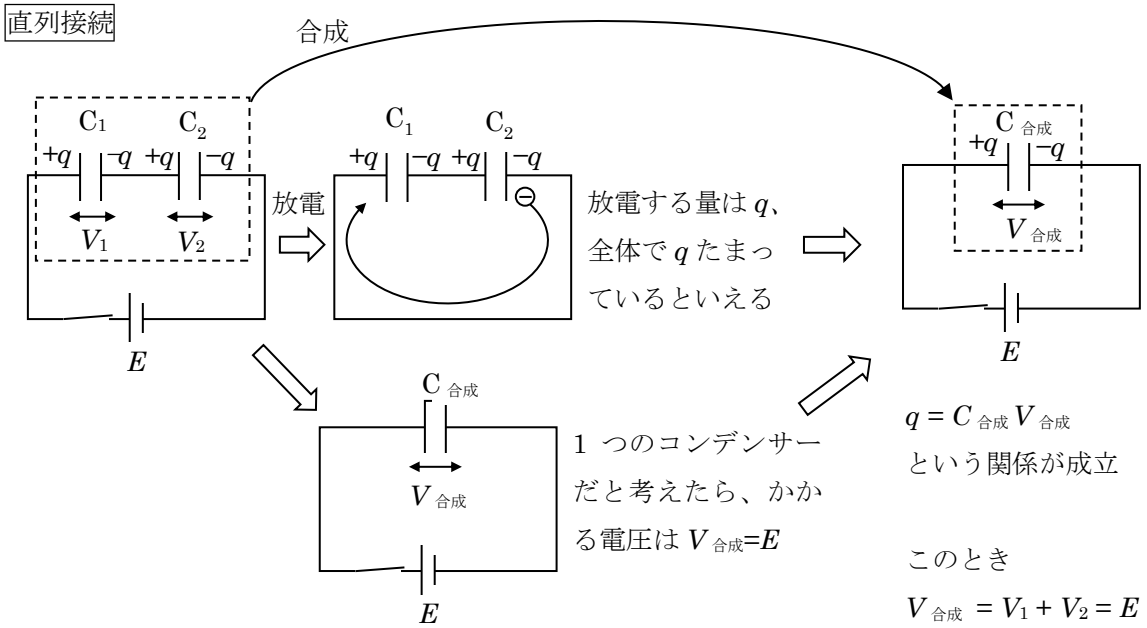
～並列接続～



＊電池の起電力を E〔V〕とする。

《合成の意味》

2 つのコンデンサーC_1、C_2が、あたかも 1 つのコンデンサー$C_{合成}$だったとすると？という考え方がコンデンサーの合成である。『放電できる電気量』と『かかる電圧』がポイントとなる。



$q = C_{合成} V_{合成}$

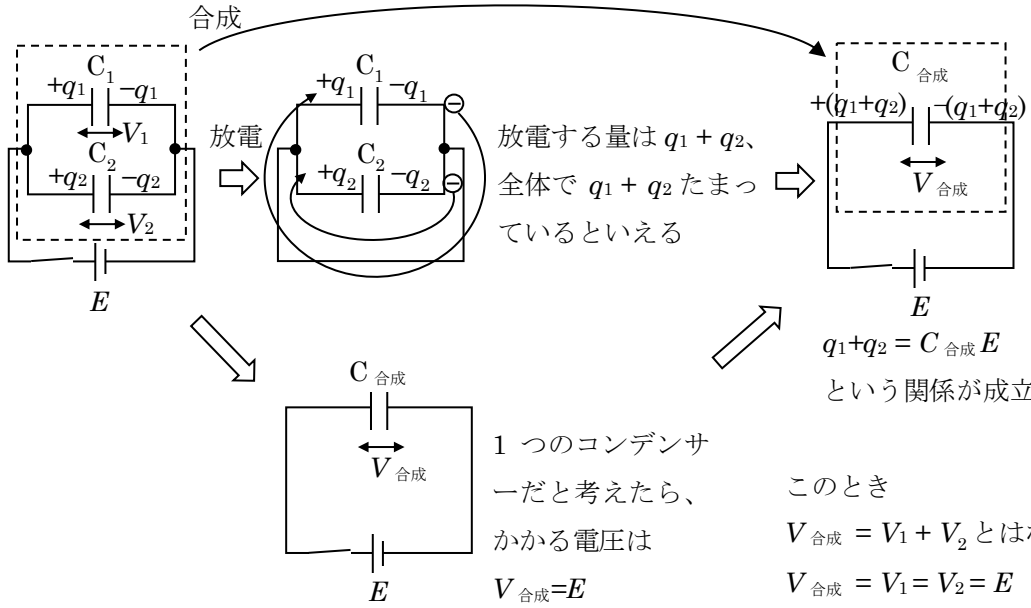
という関係が成立

このとき

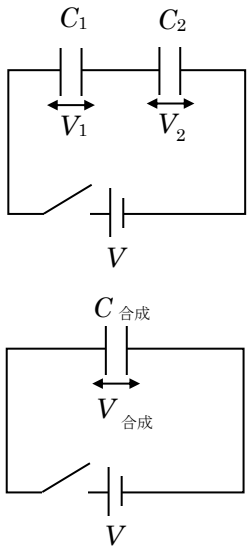
$V_{合成} = V_1 + V_2 = E$

となる

並列接続



問題 9 直列の合成容量の公式の導出



電気容量が C_1 のコンデンサーC_1 と、C_2 のコンデンサーC_2 と起電力 V の電池を図のように接続した。はじめコンデンサーに電荷はたまっていないものとする。

(1) スイッチを入れて十分時間がたったとき、それぞれのコンデンサーにたまる電気量 Q_1、Q_2 の関係を答えよ。

(2) コンデンサーにかかる電圧を V_1、V_2 としたとき、V_1、V_2 を Q_1、Q_2、C_1、C_2 を用いてあらわせ。

(3) 2 つのコンデンサーを合成したときの電気容量を $C_{合成}$、たまる電気量を $Q_{合成}$ とする。$Q_{合成}$ と Q_1、Q_2 の関係を答えよ。

(4) $V_{合成}$ と V_1、V_2 の関係を求めよ。

(5) 合成後のコンデンサーにかかる電圧 $V_{合成}$ を $Q_{合成}$、$C_{合成}$ を用いてあらわせ。

(6) 前問までの関係から、$\frac{1}{C_{合成}}$ を C_1、C_2 を用いてあらわせ。

問題 9 解答 (1) $Q_1 = Q_2$ (2) $V_1 = \frac{Q_1}{C_1}$、$V_2 = \frac{Q_2}{C_2}$ (3) $Q_{合成} = Q_1 = Q_2$ (4) $V_{合成} = V_1 + V_2$

(5) $V_{合成} = \frac{Q_{合成}}{C_{合成}}$ (6) $\frac{1}{C_{合成}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$

問題 9 解説

(1)　はじめ、電気がたまっていないことから、独立部分の電気量の保存より、

$$Q_1 = Q_2$$

(2)　$Q = CV$ より

$$Q_1 = C_1V_1 \qquad Q_2 = C_2V_2$$

$$\therefore\ V_1 = \frac{Q_1}{C_1} \qquad \therefore\ V_2 = \frac{Q_2}{C_2}$$

(3) コンデンサーが放電できる量から考えて、

$$Q_{合成} = Q_1 = Q_2$$

(4) 合成前の電位のアップダウンから考えて

$$V = V_1 + V_2$$

合成後の電位のアップダウンから考えて

$$V = V_{合成}$$

これらのことより、

$$V_{合成} = V_1 + V_2$$

(5) $Q = CV$ より

$$Q_{合成} = C_{合成} V_{合成}$$

$$\therefore\ V_{合成} = \frac{Q_{合成}}{C_{合成}}$$

(6) 前問(4)で求めた $V_{合成} = V_1 + V_2$ の式に、前問(2)(5)の答えを代入して、

$$\frac{Q_{合成}}{C_{合成}} = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2}$$

ここで、前問(3)より $Q_{合成} = Q_1 = Q_2$ であり、これを文字 Q として統一すると、

$$\frac{Q}{C_{合成}} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2}$$

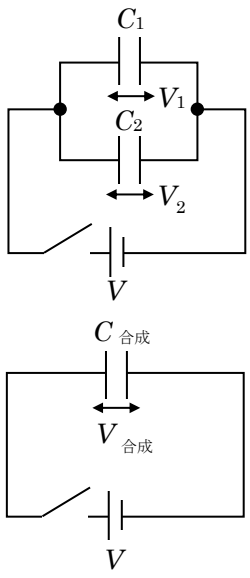
整理して、

$$\frac{1}{C_{合成}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

直列接続での要注意ポイント

この導出は、はじめ電気をたくわえていないことで、$Q_1 = Q_2$ という関係があるから成り立っている。つまり、**はじめ電気をたくわえていたら、つなぎ方が直列でも『コンデンサーの直列接続』とは呼べず、公式も使えない**ので注意が必要である。

問題 10　並列の合成容量の公式の導出



電気容量が C_1 のコンデンサーC_1 と、C_2 のコンデンサーC_2 と起電力 V の電池を図のように接続した。はじめコンデンサーに電荷はたまっていないものとする。

(1) コンデンサーにたまる電気量を Q_1、Q_2 としたとき、Q_1、Q_2 を C_1、C_2、V_1、V_2 を用いてあらわせ。

(2) 2 つのコンデンサーを合成したときの電気容量を $C_{合成}$、たまる電気量を $Q_{合成}$ とする。$Q_{合成}$ と Q_1、Q_2 の関係を答えよ。

(3) 合成後のコンデンサーにたまる電気量 $Q_{合成}$ を $C_{合成}$、$V_{合成}$ を用いてあらわせ。

(4) $V_{合成}$ と V_1、V_2、の関係を答えよ。

(5) 前問までの関係から、$C_{合成}$ を C_1、C_2 を用いてあらわせ。

問題 10 解答　(1) $Q_1 = C_1V_1$、$Q_2 = C_2V_2$　(2) $Q_{合成} = Q_1 + Q_2$　(3) $Q_{合成} = C_{合成}V_{合成}$

(4) $V_{合成} = V_1 = V_2$　(5) $C_{合成} = C_1 + C_2$

問題 10 解説

(1) $Q = CV$ より

$$Q_1 = C_1V_1 \quad Q_2 = C_2V_2$$

(2) 放電できる電気量を考えると

$$Q_{合成} = Q_1 + Q_2$$

(3) $Q = CV$ より

$$Q_{合成} = C_{合成}V_{合成}$$

(4) 合成前の電位のアップダウンから考え、

$$V = V_1 = V_2$$

合成後の電位のアップダウンから考え、

$$V = V_{合成}$$

これらのことより、

$$V_{合成} = V_1 = V_2$$

(5) 前問(2)で求めた $Q_{合成} = Q_1 + Q_2$ の式に前問(1) (3)の答えを代入して、

$$C_{合成}V_{合成} = C_1V_1 + C_2V_2$$

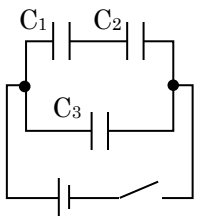
ここで、前問(4)より $V_{合成} = V_1 = V_2$ であり、これを V と統一すると、

$$C_{合成}V = C_1V + C_2V$$

整理して、

$$C_{合成} = C_1 + C_2$$

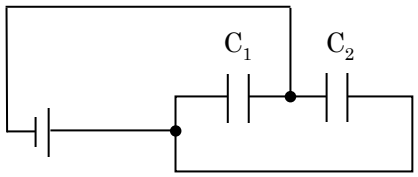
並列接続での要注意ポイント



左図は並列接続とはいわない。

C_1 と C_2 ではじめの電気量が 0 ならば、直列接続の合成を行え、その後、C_{1+2} と C_3 ではかかる電圧が同じになるので並列接続といえる。

並列接続では、コンデンサーにかかる電圧が等しくなることが必要条件なのである。



左図はコンデンサーが横に並んでいるが並列接続である。色塗りをすれば、C_1 と C_2 に同じ電圧がかかっていることがわかる。

直列も並列も要注意ポイントがあり、一般的な解法として用いるのはお勧めできない。

電位の式 ⇒ 電気量の保存の式 ⇒ $Q = CV$ の式 ⇒ 連立 という解き方を基本としよう。

テーマ 5　誘電体の挿入と合成容量

合成容量の公式を使うと便利なのが、このテーマでの問題である。

問題 11　誘電体の挿入と電気容量

極板間が空気で、電気容量 C〔F〕の平行板コンデンサーに、図のように比誘電率 ε_r の誘電体を極板間に挿入する。次の(1)、(2)、(3)の場合において、コンデンサーの電気容量はいくらになるか。

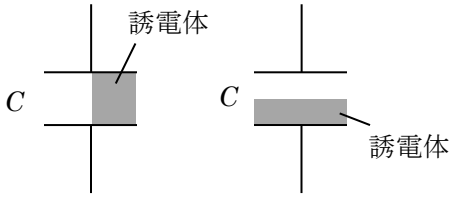


図 1

図 2

(1) 極板間を全て誘電体で満たした場合

(2) 図 1 のように、極板間の右半分を誘電体で満たした場合

(3) 図 2 のように、極板間の下半分を誘電体で満たした場合

問題 11 解答　(1) $\varepsilon_r C$　　(2) $\dfrac{(1+\varepsilon_r)C}{2}$　　(3) $\dfrac{2\varepsilon_r C}{\varepsilon_r+1}$

問題 11 解説

(1) 比誘電率 ε_r は、真空中（空気中）での電気容量から何倍になるか、というルールで書かれたものである。なので、全ての空間を満たせば電気容量は ε_r 倍になる。

＊ 誘電率 ε と比誘電率 ε_r の違いを理解しておこう。

(2) 一部だけ挿入した場合は、挿入している部分と、挿入していない部分で別のコンデンサーであると考えて、それを直列接獄の公式、並列接続の公式で合成をする。元の極板の面積を S、極板間距離を d、真空中（空気中）での誘電率を ε_0 として考えてみる。

右半分に挿入した場合、下図のように並列接続されていると考えてよい。

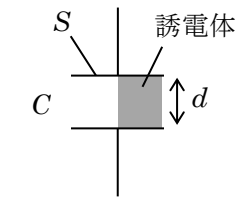
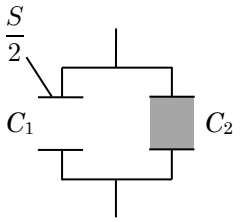


図 1



挿入した後の空気部分の電気容量 C_1 は面積が半分なので、

$$C_1 = \varepsilon_0 \frac{\frac{S}{2}}{d} = \varepsilon_0 \frac{S}{2d}$$

元の電気容量 C は、

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{d}$$

なので、これと比べると、

$$C_1 = \varepsilon_0 \frac{S}{2d} = \frac{C}{2}$$

誘電体のある部分の電気容量 C_2 は、C_1 と d や S の条件が同じコンデンサーで、それの ε_r 倍の電気容量になるので

$$C_2 = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{S}{2d}$$

これを元の電気容量 C を用いて示すと

$$C_2 = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{S}{2d} = \frac{\varepsilon_r C}{2}$$

C_1 と C_2 を並列の合成公式で合成すると、

$$C_{合成} = C_1 + C_2$$

$$C_{合成} = \frac{C}{2} + \frac{\varepsilon_r C}{2} = \frac{(1+\varepsilon_r)C}{2}$$

(3) 下半分に挿入した場合、下図のように直列接続されたコンデンサーとみなしてよい。

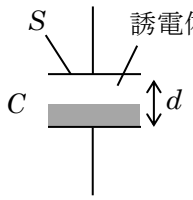
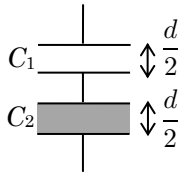


図 2

⇩



挿入した後の空気部分の電気容量 C_1 は極板間距離が半分なので、

$$C_1 = \varepsilon_0 \frac{S}{\frac{d}{2}} = \varepsilon_0 \frac{2S}{d}$$

元の電気容量 C は、

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{d}$$

なので、これと比べると、

$$C_1 = \varepsilon_0 \frac{2S}{d} = 2C$$

誘電体のある部分の電気容量 C_2 は、C_1 と d や S の条件が同じコンデンサーで、それの ε_r 倍の電気容量になるので

$$C_2 = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{2S}{d} = 2\varepsilon_r C$$

C_1 と C_2 を直列の合成公式を用いて合成すると、

$$\frac{1}{C_{合成}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

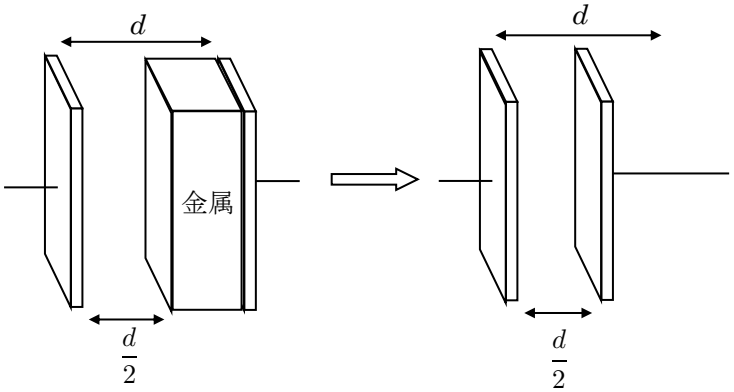
$$\frac{1}{C_{合成}} = \frac{1}{2C} + \frac{1}{2\varepsilon_r C}$$

$$\frac{1}{C_{合成}} = \frac{\varepsilon_r}{2\varepsilon_r C} + \frac{1}{2\varepsilon_r C}$$

$$\frac{1}{C_{合成}} = \frac{\varepsilon_r + 1}{2\varepsilon_r C}$$

$$\therefore C_{合成} = \frac{2\varepsilon_r C}{\varepsilon_r + 1}$$

＊ 金属板を挿入したときは、その部分が導線になったと考えよう。導線も金属なので、金属部分は太い導線とみなせるのだ。



例えば左図の場合は、極板間距離が$\frac{1}{2}$になっているので、電気容量は 2 倍になる。

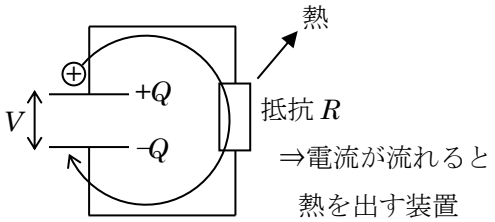
テーマ6 コンデンサーのエネルギー

充電されたコンデンサーは静電エネルギーUを持っている。静電気力による位置エネルギーUともいう。さて、このエネルギーの大きさを考えてみよう。

《モデル》

コンデンサーにQ〔C〕の電荷を充電したところ、極板間の電位差はV〔V〕となった。このコンデンサーに抵抗Rをつないだ。

① 充電済みのコンデンサーを回路に組み込むと、放電が起きて抵抗に電流を流すことができる。このとき、コンデンサーの持っている静電気力による位置エネルギーUが熱エネルギーに変換されているといえるのだ。

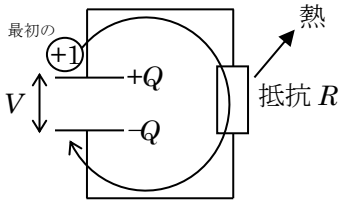


② 放電の過程を非常に細かく分けてみる。

左図のように+1C だけ電荷が動いたとき、電荷+1C はV〔V〕低い電位まで落ちているので、

$$\Delta U_1 = qV = 1\times V \text{〔J〕}$$

だけ位置エネルギーを失っており、この量だけ熱に変換されているといえる。そしてコンデンサーでは電荷が少し減り、極板間の電位差が下がる。(V'とする)

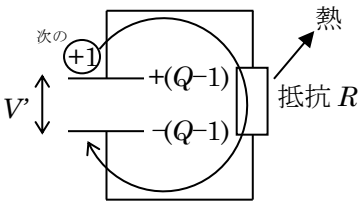


③ その後、次の+1C が動くときは、極板間の電位差がV'に下がっていることに注意して計算すると、

$$\Delta U_2 = qV = 1\times V' \text{〔J〕} \quad (V'<V)$$

だけ位置エネルギーを失っており、これは1回目より小さい量になっているとわかる。

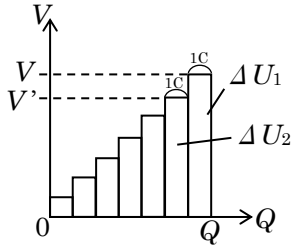
そして、コンデンサーにたまっている電気はさらに減り、さらに極板間の電位差は下がる。



④ これを繰り返し、ためた電荷を全て放電するまでのエネルギー変化をグラフを使って考察すると、右図の棒グラフの面積であるといえ、三角形と近似できて、

$$U_{全} = \frac{1}{2}QV$$

のエネルギーをコンデンサーは持っていたといえる。

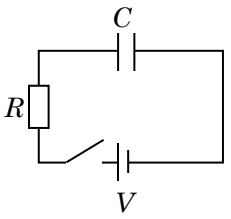


コンデンサーの持つ静電エネルギーの公式

$$U = \frac{1}{2}QV$$

問題 12 電池のする仕事

電気容量 C〔F〕の平行板コンデンサーに、図のように起電力 V〔V〕の電池と抵抗 R とスイッチをつなぐ。はじめ、コンデンサーには電気がたまっていなかったとして、以下の問いに答えよ。



(1) スイッチを入れて十分時間がたつと、コンデンサーの極板間の電圧が V〔V〕になるまで充電される。(抵抗 R があるときと、ないときの差などは次の章で扱う)
充電が終わった後、コンデンサーの持つエネルギーU の大きさはいくらか。

(2) コンデンサーが充電されるまでの間で、電池を通過した電荷の電気量 Q はいくらか。

(3) 電池の両端の電位差が V〔V〕なので、電荷 q〔C〕が電池を通過するとき、電池は qV〔J〕の仕事をして電荷を持ち上げているといえる。このコンデンサーを充電するまでに電池がした仕事 W はいくらか。

(4) コンデンサーが充電されるまでの間に、抵抗で発生した熱のエネルギーQ_R はいくらか。

問題 12 解答 (1) $U=\frac{1}{2}CV^2$〔J〕 (2) $Q=CV$〔C〕 (3) $W=CV^2$〔J〕 (4) $Q_R=\frac{1}{2}CV^2$〔J〕

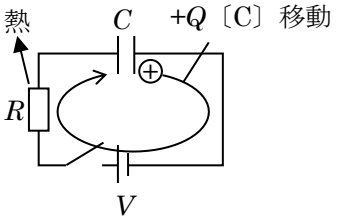
問題 12 解説

(1) 充電後のコンデンサーにたまる電気量は

$$Q=CV\ [\mathrm{C}]$$

なので、コンデンサーが持つエネルギーUは、

$$U=\frac{1}{2}QV=\frac{1}{2}\cdot CV\cdot V=\frac{1}{2}CV^2\ [\mathrm{J}]$$



(2) コンデンサーに充電されている電気は全て電池を通過しているので、前問で求めた電気量 Q だけ電池を通過しているといえる。

$$Q=CV\ [\mathrm{C}]$$

(3) 電池の両端では V〔V〕の電位差があり、電池はそこを通る電荷を持ち上げている。この際の仕事は $W=qV$ で計算ができるので、

$$W=QV=CV\cdot V=CV^2\ [\mathrm{J}]$$

(4) 電池は CV^2 の仕事をしているが、コンデンサーに溜まっているのは $\frac{1}{2}CV^2$ だけであり、どこかでロスしてしまっているのだ。エネルギーのロスは

$$(\text{エネルギーのロス})=CV^2-\frac{1}{2}CV^2=\frac{1}{2}CV^2\ [\mathrm{J}]$$

であり、これは抵抗で熱としてロスしてしまっている。よって、抵抗で発生した熱エネルギーが$\frac{1}{2}CV^2$〔J〕とわかるのである。

コンデンサーのエネルギーの公式の拡大

コンデンサーのエネルギーの公式は $U=\frac{1}{2}QV$ が基本であるが、$Q=CV$ という関係があるので、$U=\frac{1}{2}QV=\frac{1}{2}CV^2=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$ と公式を拡大できる。Q を出さずに C と V だけで出したり、V を出さずに C と Q だけでエネルギーを出せたりする時短テクニックである。

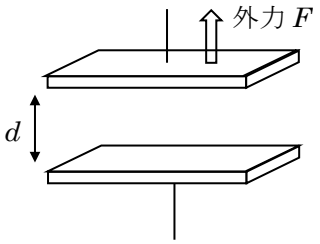
重要 電池の仕事でのエネルギーロス

電池はした仕事の半分しかコンデンサーに貯めることはできずに、熱によるロスが出てしまう。抵抗 R をつないでいなくても、導線や電池本体から熱が発生しロスとなってしまう。どんな場合も半分ロスする、という風に理解しておこう。

電気の分野では、このように『エネルギー収支』を考えることがキーとなるので常にエネルギー収支を考える習慣をつけておこう。

問題 13 外力のする仕事

極板間距離が d で、電気容量 C のコンデンサーに起電力 V の電池をつなぎ、充電をおこなった後、電池を切りはなした。以下の問いに答えよ。



(1) 極板に外力を加えてゆっくりと引きはなし、極板間距離を $2d$ にした。このときのコンデンサーの電気容量 C'はいくらか。

(2) 極板間距離を $2d$ にしたとき、コンデンサーの持つエネルギーU'はいくらになるか。

(3) コンデンサーの距離を大きくするために、外力がした仕事 W はいくらか。正負をつけて答えよ。

(4) 外力の大きさが一定だったとすると、その大きさ F はいくらだといえるか。

(5)[難] 電場をもとに極板同士が引き合う力の大きさを考え、外力の大きさ F を求めよ。

⇒ セミナーP226 基本例題 60　P230 発展例題 38

問題 13 解答 (1) $C' = \frac{1}{2}C$ (2) $U = CV^2$ (3) $W = +\frac{1}{2}CV^2$ (4) $F = \frac{CV^2}{2d}$ (5) $F = \frac{CV^2}{2d}$

問題 13 解説

(1) 電気容量は $C = \varepsilon_0 \frac{S}{d}$ と示され、d が 2 倍になったら C は$\frac{1}{2}$倍になるといえる。よって

$$C' = \frac{1}{2}C$$

(2) 初期条件よりたまった電気量 Q は $Q = CV$ であり、電池を切り離しているので、極板を引きはなしても電気量 Q は変化しない。一方で、電気容量は$\frac{1}{2}C$ に変化しているので、エネルギーの公式 $U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$ より

$$U' = \frac{1}{2}\cdot\frac{(CV)^2}{\frac{C}{2}} = CV^2 \text{・・・答}$$

＊ ここで、$U = \frac{1}{2}CV^2$ などの公式を使って、

$$U' = \frac{1}{2}\cdot\frac{C}{2}V^2 = \frac{CV^2}{4}$$

としてしまうと間違い。電池を切ってから極板を遠ざけると、極板間の電位差 V が大きくなる変化が起きている。もし $U = \frac{1}{2}CV^2$ で計算したいときは、変化後の電位差 V'を求めてから代入する必要があるのだ。ちなみに、変化後の電位差 V'は $Q = CV$ より

$$V' = \frac{Q}{C'} = \frac{CV}{\frac{C}{2}} = 2V$$

となり、これを公式 $U = \frac{1}{2}CV^2$ に代入すれば

$$U' = \frac{1}{2}\cdot\frac{C}{2}\cdot(2V)^2 = CV^2$$

と答えを出せる。

極板を引きはなすと電位差が増えるというイメージは中々湧きづらいが、誘電体を抜くと電位差が増えるのに似た変化である。

(3) 外力がした仕事の分だけコンデンサーのエネルギーが増えた、とエネルギー収支を考えられる。コンデンサーのエネルギーは $U = \frac{1}{2}CV^2$ から $U' = CV^2$ に増えているので $\Delta U = \frac{1}{2}CV^2$ だけ増えたといえる。外力がした仕事 W がこれに等しいので、

$$W = +\frac{1}{2}CV^2$$

となる。

(4) 極板間距離が d から $2d$ に増えているので､外力は距離 d だけ極板を動かしたといえる。
外力の大きさを F とすると、仕事 W は

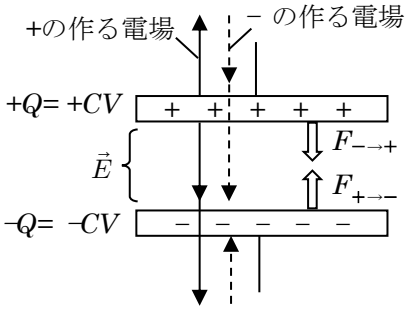
$$W = Fx = Fd$$

といえ、これが前問(3)で求めた $W = \frac{1}{2}CV^2$ と等しいので

$$Fd = \frac{1}{2}CV^2$$

$$\therefore F = \frac{CV^2}{2d}$$

(5) 極板同士は＋と－の電気を帯びているので、引力が発生している。これを電場と共に作図すると右図のようになる。



このとき、極板間の電場$\vec{E}$は、＋と－が作る電場を合わせたものであり、＋や－が単独で作る電場は半分の$\frac{\vec{E}}{2}$となる。

そして、上の極板は、－の作る$\frac{\vec{E}}{2}$の電場の影響で力を受け、下の極板は、＋の作る$\frac{\vec{E}}{2}$の電場の影響で力を受ける。自分の作る電場で自分の極板に力がはたらくことはないのだ。このことに注意して、極板同士が引き合う力 $F_{-\to+}$ や $F_{+\to-}$ を、$F = qE$ より計算すると、

$$F = Q \cdot \frac{E}{2}$$

の大きさであるといえる。

＊電池を切りはなしたときは Q が変化せず、電気力線の本数も変化しないので E も変化しない。よって、極板同士の引力 F は距離によらず一定といえる。

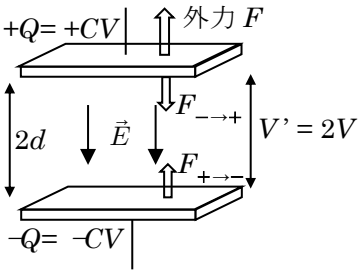
一方、電場 E は極板間の距離が $2d$、電位差が $V' = 2V$ になっていることに注意して、$E = \frac{V}{d}$ より計算すると、

$$|\vec{E}| = \frac{2V}{2d} = \frac{V}{d}$$

となるので、

$$|F_{-\to+}| = |F_{+\to-}| = Q\frac{|\vec{E}|}{2} = \frac{QV}{2d}$$

とかける。この引力と同じ大きさの外力 F を加えて、コンデンサーを引きはなしているといえるのだ。



これに、初期条件の $Q = CV$ を代入すれば、

$$F = \frac{CV \cdot V}{2d} = \frac{CV^2}{2d}$$

となり、エネルギー収支から出した外力の大きさ F と同じ結果が得られる。

問題 14　金属板の表面の電荷

電気容量が C、極板 A、B の間隔が $2d$ の平行板コンデンサーと、金属板と同じ形で d に比べて厚さの無視できる薄い金属板 D がある。図 1 のように、金属板 D を極板 A、B から等距離になるように置き、電圧 V の電池、およびスイッチ S を通して A、B と接続し、A、B を接地する。

(1) スイッチ S が閉じられているとき、金属板 D にたくわえられた電荷はいくらか。C、V を用いて表せ。

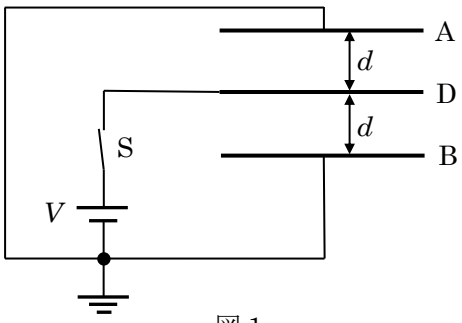


図 1

次にスイッチ S を開いた後、金属板 D を A の側に x だけ移動させる（図 2）

(2) D の電位はいくらか。d、x、V を用いて表せ。また、極板 A、B にたくわえられた電荷はいくらか。それぞれ d、x、C、V を用いて表せ。

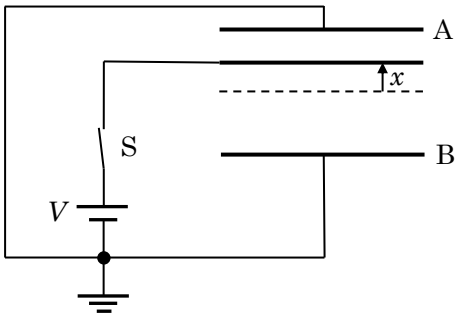


図 2

問題 14 解答 (1) $4CV$

(2) $V' = \frac{d^2-x^2}{d^2}V$　　$-Q_A' = -\frac{2(d+x)}{d}CV$　　$-Q_B' = -\frac{2(d-x)}{d}CV$

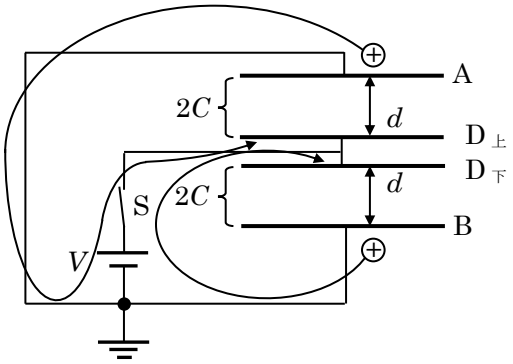
問題 14 解説

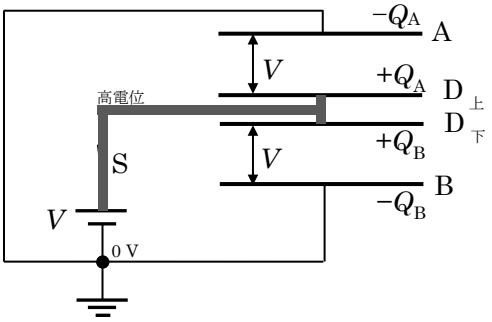
(1) 以下のポイントに気をつけて作図をしよう。

・金属板 D の上面と下面を分けて考えて、A、B の極板とそれぞれコンデンサーを作ると考える。

・極板間距離が $2d$ のときの電気容量が C であり、AD 上と BD 下でコンデンサーをつくるときは極板間距離が半分の d になっているので、電気容量はそれぞれ $2C$ になるといえる。

・色の濃い方が高電位なので、D 上、D 下には＋の電荷が現れる。電荷は、A、B の極板から D の極板に運ばれるとわかる。





回路の色分けをすると、それぞれのコンデンサーに V〔V〕の電圧がかかっていることがわかる。このことから Q_A、Q_B を求めると、

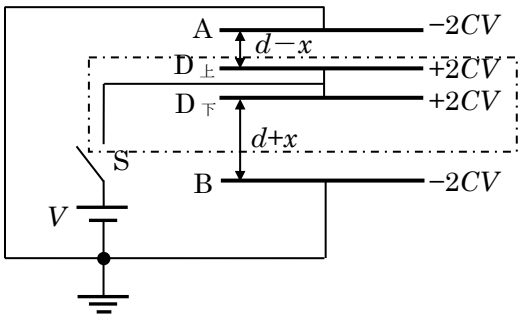
$Q_A = 2C \times V = 2CV$　　$Q_B = 2C \times V = 2CV$

金属板 D にたくわえられている電荷は、$(+Q_A) + (+Q_B)$といえるので、

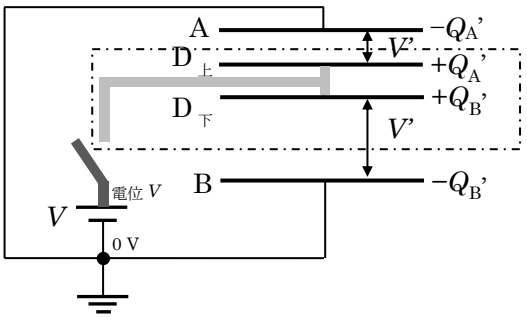
$(+Q_A) + (+Q_B) = 2CV + 2CV = 4CV$・・・答

(2) スイッチ S を開くと、D の電位が必ずしも V とは限らなくなる。また、D が独立した導体となり、電気量が保存するようになる。

変化前



変化後



・回路の色分けより、AD 上間の電位差と、D 下B 間の電位差が同じであることがわかるので、共通の文字 V'でおいた。

・スイッチが切れているのでスイッチを越えると違う電位になる。電池の＋極の導線は濃い線とし、D とつながっている導線は薄い色とした。

・ で囲まれている部分は、独立した導体なので、電気量が保存する。

・極板間距離の変化から、電気容量を求めると

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{2d} \qquad C_{\text{AD 上}} = \varepsilon_0 \frac{S}{d-x} \qquad C_{\text{D 下B}} = \varepsilon_0 \frac{S}{d+x}$$

と整理ができるので、

$$C_{\text{AD 上}} = \frac{2d}{d-x} C \qquad C_{\text{D 下B}} = \frac{2d}{d+x} C$$

となる。

これらを踏まえて　**電位の式**　⇒　**電気量の保存の式**　⇒　***Q* = *CV* の式**を立てて連立する。

電位の式

色分けで電位差が同じであることがわかったので省略できる。

電気量保存の式

$$(+2CV) + (+2CV) = (+Q_A') + (+Q_B')$$

$$\Rightarrow\ 4\,CV = Q_A' + Q_B' \quad \cdots①$$

$Q = CV$の式

$$Q_A' = \frac{2d}{d-x}CV' \quad \cdots② \qquad Q_B' = \frac{2d}{d+x}CV' \quad \cdots③$$

①に②、③を代入して、

$$4CV = \frac{2d}{d-x}CV' + \frac{2d}{d+x}CV'$$

V'について解いて、

$$4V = \frac{2d(d+x)}{(d-x)(d+x)}V' + \frac{2d(d-x)}{(d-x)(d+x)}V'$$

$$4V = \frac{2d(d+x)+2d(d-x)}{(d-x)(d+x)}V'$$

$$4V = \frac{2d^2+2dx+2d^2-2dx}{(d-x)(d+x)}V'$$

$$4V = \frac{4d^2}{(d-x)(d+x)}V'$$

$$V' = \frac{(d-x)(d+x)}{d^2}V$$

$$V' = \frac{d^2-x^2}{d^2}V$$

問題で聞かれているのは D の電位であり、これは薄い線の高さのことである。アースがつながっている塗り無しの線が電位 0V で、そこから V'高い位置であるので、
今求めた $V' = \frac{d^2-x^2}{d^2}V$ がそのまま答えになる。

②、③に代入して Q_A'、Q_B'を求める。約分しやすいので $V' = \frac{(d-x)(d+x)}{d^2}V$ の形で代入すると

$$Q_A' = \frac{2d}{d-x}C \times \frac{(d-x)(d+x)}{d^2}V = \frac{2(d+x)}{d}CV \qquad Q_B' = \frac{2d}{d+x}C \times \frac{(d-x)(d+x)}{d^2}V = \frac{2(d-x)}{d}CV$$

A、B ともに、たまっているのは負の電荷なので、答えは

$$-Q_A' = -\frac{2(d+x)}{d}CV \qquad -Q_B' = -\frac{2(d-x)}{d}CV$$