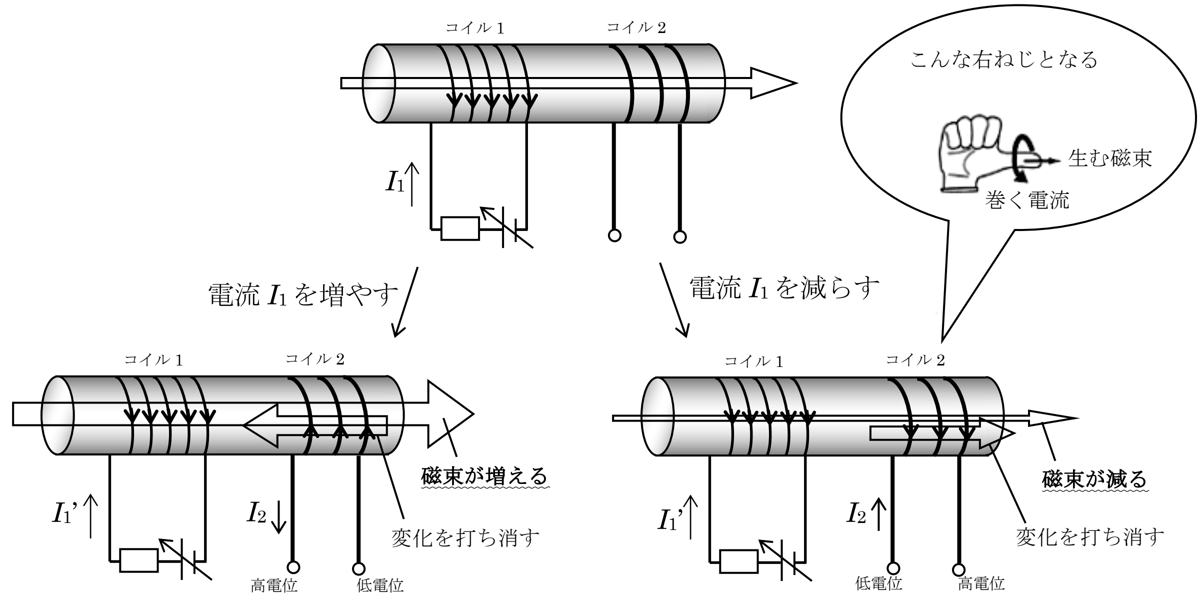
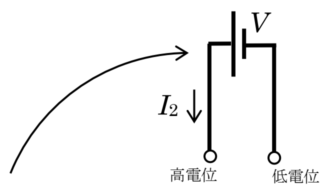
テーマ4 相互誘導・自己誘導

コイルを2つ並べ，片方のコイルに電流を流す．この時流す電流 I_1 を変化させると，もう片方のコイルに起電力が生じる．この現象を**相互誘導**という．

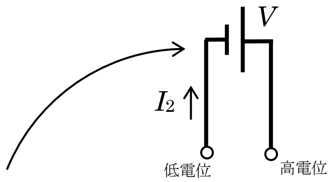


コイル2は磁束が増える変化を嫌がり，
変化を打ち消す向きに電流を流す

コイル2は磁束が減る変化を嫌がり，
変化を打ち消す向きに電流を流す



コイル2はこんな電池に
なったと考えてよい．



コイル2はこんな電池に
なったと考えてよい．

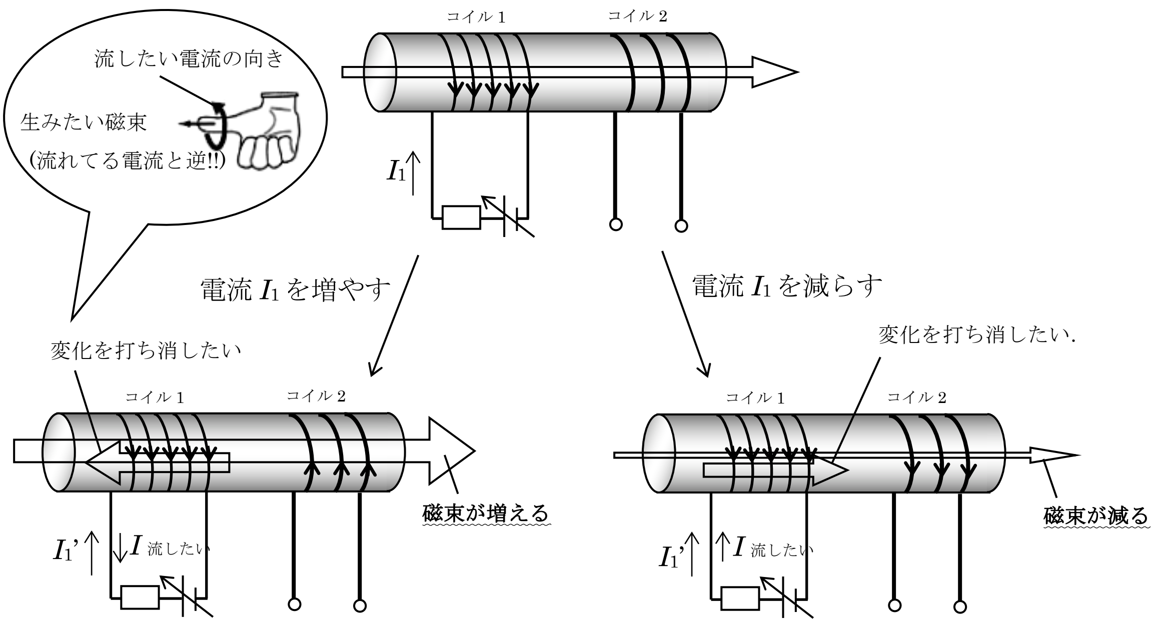
仕組みは非常に単純である．自分で上の図を書けるように練習しておこう．

コイル2に発生する誘導起電力 V は『コイル1の電流の1秒間の変化量』に比例する．
比例定数を M として，式にすると次のようになる．

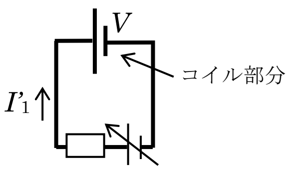
$$\boxed{V = -M\frac{\Delta I}{\Delta t}}$$

・$\dfrac{\Delta I}{\Delta t}$ は1秒あたりの電流の変化，という意味．
・M を**『相互インダクタンス』**という．
『コイル内を満たす物質（鉄芯など）』『それぞれのコイルの巻き数』などで変わる比例定数で，これが大きいほど，変化を敏感に嫌がるコイル，と言える．
・相互インダクタンス M の単位は〔H〕（読み：ヘンリー）

相互誘導で分析したように，コイル内を貫く磁束が変化すると，そのコイルは逆向きに電流を流そうとする. この現象は, 実はコイル単独でも起こる. 前ページと同じ図で見ていこう. コイル 1 単独の流れに注目だ.

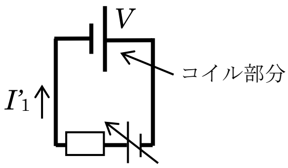


コイル 1 は磁束が増える変化を嫌がり，
変化を打ち消す向きに電流を流そうとする.
（電流と逆の向きの起電力をコイルは生む）



コイル 1 はこんな電池になったと考えてよい.

コイル 1 は磁束が減る変化を嫌がり，
変化を打ち消す向きに電流を流そうとする.
（電流と同じ向きの起電力をコイルは生む）



コイル 1 はこんな電池になったと考えてよい.

上図のようにコイルと電池とみなした回路図をかけるようになることが必要である.

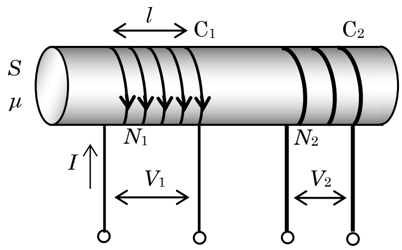
コイル 1 で発生する誘導起電力の大きさは，相互誘導のときと同じく『コイル 1 の電流の 1 秒間の変化量』に比例する．そのときの比例定数を L とし，式にすると次のようになる.

$$\boxed{V = -L\frac{\Delta I}{\Delta t}}$$

・L を**『自己インダクタンス』**という.
・自己インダクタンス L の単位も〔H〕 (読み：ヘンリー)

問題8 インダクタンスの導出

図のように，鉄芯（断面積 S，透磁率 μ）に1次コイル C_1（長さ l，N_1 回巻き）と2次コイル（N_2 回巻き）の2つを巻いた．



(1) C_1 に図のように電流 I を流す時，コイルを貫く磁束の本数 ϕ を求めよ．

(2) 電流を Δt の間に ΔI だけ増加させた．このとき，C_1 に生じる起電力の大きさ V_1 と，C_2 に生じる起電力の大きさ V_2 を求めよ．

(3) 前問(2)の結果から，C_1 の自己インダクタンス L，C_1 と C_2 の間の相互インダクタンス M を示せ．

問題8 解答 (1) $\phi = \mu\dfrac{N_1 S}{l}I$ (2) $V_1 = \mu\dfrac{{N_1}^2 S}{l}\dfrac{\Delta I}{\Delta t}$ $V_2 = \mu\dfrac{N_1 N_2 S}{l}\dfrac{\Delta I}{\Delta t}$

(3) $L = \mu\dfrac{{N_1}^2 S}{l}$ $M = \mu\dfrac{N_1 N_2 S}{l}$

問題8 解説

大まかな流れを頭に入れて，問題を追跡しよう．次のようなステップで考える．

STEP① ソレノイドコイルの作る磁場は，$H = nI$

STEP② 磁場Hから磁束密度Bへの変換をすると，$B = \mu H$

STEP③ 磁束の本数 ϕ は，$\phi = BS$

STEP④ コイルで発生する誘導起電力は $V = -N\dfrac{\Delta\phi}{\Delta t}$

問題 8 解説続き

(1)

STEP① 公式 $H = nI$ を用いるが n が『1 m あたりの巻き数』であることに注意する.

全長が l で全巻き数が N_1 なので，1 m あたりは$\frac{N_1}{l}$巻. よってコイル内の磁場 H は

$$H = \frac{N_1}{l}I$$

STEP② 磁場 H に透磁率 μ を掛け算して磁束密度 B に変換すると,

$$B = \mu\frac{N_1}{l}I$$

STEP③ $\phi = BS$ で，磁束の本数 ϕ にすると,

$$\phi = \mu\frac{N_1 S}{l}I \quad \cdots \boxed{答}$$

(2) ファラデーの電磁誘導の法則 $V = -N\frac{\Delta\phi}{\Delta t}$を用いる.

ここで，$\phi = \mu\frac{N_1 S}{l}I$ であり，今回は I を変化させることで ϕ に変化が起きているので,

$$\Delta\phi = \mu\frac{N_1 S}{l}\Delta I$$

となる．これを用いて，コイル 1，コイル 2 それぞれでファラデーの式を立てよう.

コイル 1

$$|V_1| = N_1\frac{\mu\frac{N_1 S}{l}\Delta I}{\Delta t} = \mu\frac{{N_1}^2 S}{l}\frac{\Delta I}{\Delta t} \quad \cdots \boxed{答}$$

コイル 2

$$|V_2| = N_2\frac{\mu\frac{N_1 S}{l}\Delta I}{\Delta t} = \mu\frac{N_1 N_2 S}{l}\frac{\Delta I}{\Delta t} \quad \cdots \boxed{答}$$

(3) インダクタンスは，前問(2)までのようなファラデーの式で定数となっている部分，を 1 文字で示したものとなっている.（コイルの大きさ, 巻き数, 材質などの構成部分である）

インダクタンスの公式と比べて，インダクタンスを導こう.

コイル 1 (自己インダクタンス L)

$$|V_1| = \mu\frac{{N_1}^2 S}{l}\frac{\Delta I}{\Delta t} \quad \Leftrightarrow \quad |V_1| = L\frac{\Delta I}{\Delta t}$$

$$\therefore L = \mu\frac{{N_1}^2 S}{l}$$

コイル 2 (相互インダクタンス M)

$$|V_2| = \mu\frac{N_1 N_2 S}{l}\frac{\Delta I}{\Delta t} \quad \Leftrightarrow \quad |V_2| = M\frac{\Delta I}{\Delta t}$$

$$\therefore M = \mu\frac{N_1 N_2 S}{l}$$

問題 9 相互誘導

図 1 のように鉄芯に巻いたコイル L_1，L_2 がある．図 2 のような電流 I_1 を L_1 に流すとき，L_2 に流れる誘導電流 I_2 と時間 t〔s〕との関係をグラフに示せ．

ただし，抵抗 R を 5.0 Ω，L_1 と L_2 の間の相互インダクタンスを 0.50 H とし，I_1 は図 1 の矢印の向きを正, L_2 に生じた誘導電流は A→R→B の向きを正とする．また，L_2 の自己誘導による起電力は無視できるものとする．

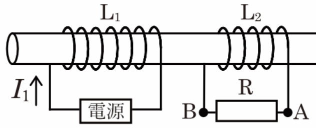
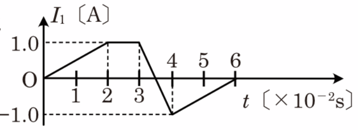
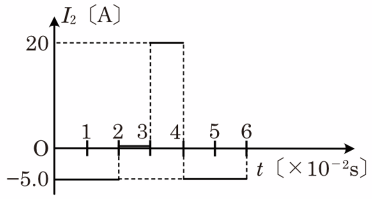
図 1


図 2


問題 9 解答



問題 9 解説

時間を区切って考える．

（0〜0.020 s）

L_2 に生じる誘導起電力の大きさは,

$$|V_2| = \left|-M\frac{\Delta I}{\Delta t}\right| = \left|-0.50\times\frac{1.0}{0.020}\right| = 25\ \mathrm{V}$$

誘導電流の大きさは，オームの法則 $V = RI$ より

$$|I_2| = \left|\frac{V}{R}\right| = \left|\frac{25}{5}\right| = 5.0\ \mathrm{A}$$

I_1 が正の向きに増加すると，L_2 を右向きに貫く磁束が増加する．このとき，レンツの法則から，L_2 には左向きの磁場が生じるように，B→R→A の向きに誘導電流が流れる．したがって，$I_2 = -5.0$ A

（0.020〜0.030 s）

I_1 が一定なので，磁束に変化がない．変化がないので起電力が発生しない．

$$|V_2| = 0 \qquad I_2 = 0$$

（0.030〜0.040 s）

はじめと同様に求めて，

$$|V_2| = \left|-M\frac{\mathit{\Delta} I}{\mathit{\Delta} t}\right| = \left|-0.50\times\frac{-2.0}{0.010}\right| = 100\ \mathrm{V}$$

$$|I_2| = \left|\frac{V}{R}\right| = \left|\frac{100}{5}\right| = 20\ \mathrm{A}$$

$\boxed{\text{注意}}$：途中で I1 の正負が変わっていることの影響を考えてみる．

正の向きの I_1 が減少 → L_2 を右向きに貫く磁束が減少 → レンツの法則から，L_2 には右向きの磁場が生じる → A→R→B の向きに誘導電流が流れる．したがって，$I_2 = +20$ A

負の向きの I_1 が増加 → L_2 を左向きに貫く磁束が増加 → レンツの法則から，L_2 には右向きの磁場が生じる → A→R→B の向きに誘導電流が流れる．したがって，$I_2 = +20$ A

I_1 の向きが切り替わっても，I_2 の向きは同じなのである．グラフの傾きが同じ部分は，同じと考えてよい．

（0.040〜0.060 s）

はじめと同様に求めて，

$$|V_2| = \left|-M\frac{\mathit{\Delta} I}{\mathit{\Delta} t}\right| = \left|-0.50\times\frac{+1.0}{0.020}\right| = 25\ \mathrm{V}$$

$$|I_2| = \left|\frac{V}{R}\right| = \left|\frac{25}{5}\right| = 5.0\ \mathrm{A}$$

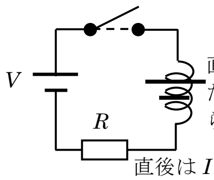
負の向きの I_1 が減少 → L_2 を左向きに貫く磁束が減少 → レンツの法則から，L_2 には左向きの磁場が生じる → B→R→A の向きに誘導電流が流れる．したがって，$I_2 = -5.0$ A

これらをもとに，グラフを書けばよい．

テーマ５ コイルの過渡現象

コイルを含む回路で，回路に流れる電流 I はどうなるかを分析していこう．

スイッチオン

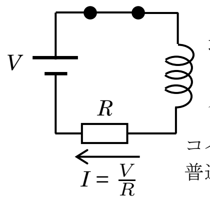


直後は，電流を流したくなく，電池に逆らう起電力を生む

直後は I は流れない

十分時間後

時間経過により，ΔI が小さい状況となる．→誘導起電力が減り I が流れる

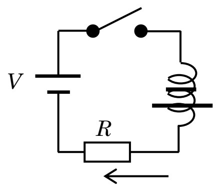


最終的に I が一定になり，コイルの誘導起電力は 0 になる．

コイルは電位差を生まない普通の導線となるのだ

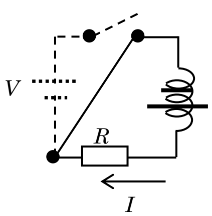
スイッチオフ

スイッチオフ直後



もともと流れていた量の電流をキープしようとして起電力を生む．

こんな風につないでみる．



回路が成立し，電流が流れる．

(コイルは電池と同様のエネルギーを蓄えているのだ!!)

コイルの基本性質は『変化を嫌がる』である．これを基本に考える．

① スイッチを入れた直後の考察

スイッチを入れる直前は，コイルに流れる電流は 0.

この状態をコイルはキープしようとする．

結果，回路には電流が流れない．（原理的には，自己誘導により，電池と逆向きの誘導起電力が生じ電流が流れない）

しかしコイルに電圧をかけ続け，少しずつコイルに電流を流れていくようになる．

② 十分時間後の考察

十分時間が経つと，コイルに一定の電流が流れ，自己誘導が起きていないので，**コイルは普通の導線になる**．

その結果，オームの法則に従い，電流が流れる．

③スイッチを切った直後の考察

スイッチを切る直前は，電流 I が流れている． この状態をキープしようとするので，コイルには起電力が生じる．原理的には，自己誘導により誘導起電力が生じている．

Point

『切り替えの直前』の状態をコイルは一瞬キープする．

最後の『誘導起電力が発生しているが，電流が流れていない』状態は，コイルがエネルギー（電流を流す能力）を蓄えている状態といえる．

このときのエネルギー量は，コイルの自己インダクタンス L を用いて

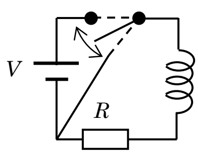
$\boxed{\text{コイルのもつ磁気エネルギー}\ U=\frac{1}{2}LI^2}$ となる．

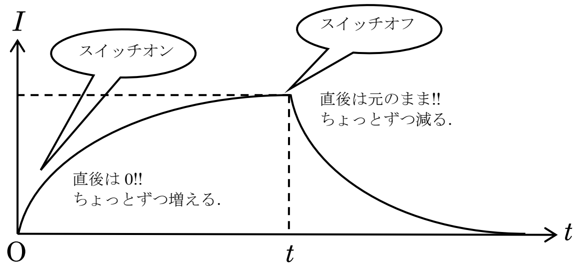
この式は丸暗記する公式である．

ちなみにエネルギーは，コイル内の磁場という形で蓄えられている．**空間にエネルギーを蓄えている**のだ．

もう少し詳しく，コイルに流れる電流の変化を分析すると，電流 I は以下のようなグラフで示される．

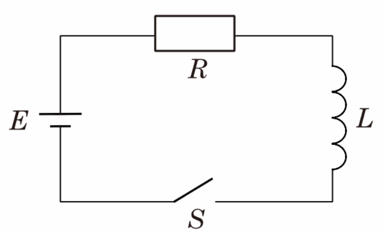
$t = 0$ でスイッチを上にオン
⇒ $t = t$ でスイッチを下にオン
(電池を飛ばして抵抗と接続する)





問題 10 コイルを含む回路

図の回路で，E = 50 V，R = 20 Ω，L = 8.0 H である．電池の起電力の向きを正とする．



(1) スイッチ S を閉じた瞬間の電流の変化率 $\Delta I/\Delta t$ を求めよ．

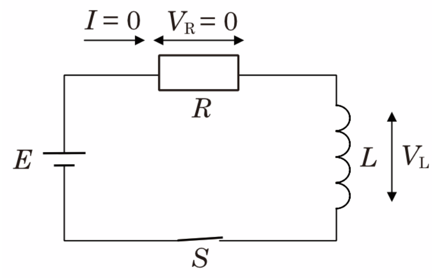
(2) スイッチ S を閉じて電流が 0.50 A となった瞬間に，コイルに生じる誘導起電力を求めよ．

(3) 前問(2)の瞬間の電流の変化率 $\Delta I/\Delta t$ を求めよ．

問題 10 解答 (1) 6.3 A/s　(2) − 40 V　(3) 5.0 A/s

問題 10 解説

(1) スイッチを入れる直前は，電流が流れていなかったので，スイッチを入れた直後も電流は流れない．そのことからキルヒホッフの法則の式を立てる．



コイルでの電圧を V_{L} とすると，

$$E = V_{\mathrm{L}}$$

（電流が流れていないので，$V_{\mathrm{R}} = 0$ である．）

また，インダクタンスを用いて V_{L} を示すと，

$$|V_{\mathrm{L}}| = \left| L\frac{\Delta I}{\Delta t} \right|$$

この 2 式より，

$$E = L\frac{\Delta I}{\Delta t}$$

値を代入して，

$$50 = 8.0 \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t} \qquad \therefore \frac{\Delta I}{\Delta t} = 6.25 \fallingdotseq 6.3 \text{ A/s}$$ … 答（電池の起電力の向きに増えるので正）

(2) 電流 $I = 0.50$ A になったときのキルヒホッフの式を立ててみる．

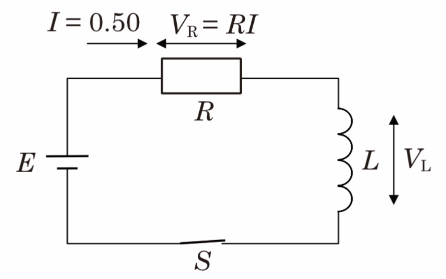
$$E = RI + V_L$$

値を代入して，

$$50 = 20 \cdot 0.50 + V_{\mathrm{L}} \qquad \therefore V_{\mathrm{L}} = 40 \text{ V}$$

電池の起電力の向きと逆向きの起電力なので，

$$V_{\mathrm{L}} = -40 \text{ V}$$ … 答



(3)

$$|V_{\mathrm{L}}| = \left| L\frac{\Delta I}{\Delta t} \right|$$

なので，

$$40 = 8.0 \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t} \qquad \therefore \frac{\Delta I}{\Delta t} = 5.0 \text{ A/s}$$ … 答（電池の起電力の向きに増えるので正）

コイルの性質まとめ

① 自己インダクタンス L, 相互インダクタンス M

コイルは，電流の変化を嫌がり，$\boxed{V=-L\dfrac{\Delta I}{\Delta t}}$　$\boxed{V=-M\dfrac{\Delta I}{\Delta t}}$ の起電力を生む.

変化がないときは起電力を生まない，『ただの導線』となる.

② インダクタンスの中身 ⇒ 問題８の流れはまるっと頭に入れておくべし.

磁束の変化 $\Delta\phi$ から出す起電力はファラデー則 $\boxed{V=-N\dfrac{\Delta\phi}{\Delta t}}$

電流の変化 ΔI から出す起電力はインダクタンスの式 $\boxed{V=-L\dfrac{\Delta I}{\Delta t}}$　$\boxed{V=-M\dfrac{\Delta I}{\Delta t}}$

＊ N や L や M, $\dfrac{\Delta\phi}{\Delta t}$, $\dfrac{\Delta I}{\Delta t}$ が何を示すか日本語で理解し，言葉で公式を捉えておこう.

③ コイルを含む回路のスイッチの切り替え

切り替え直後　⇒　切り替え直前の I が流れる.
十分時間後　⇒　コイルはただの導線となる.

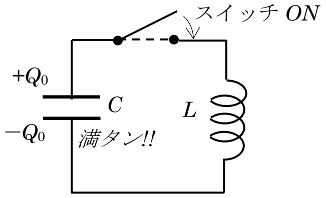
④ コイルに電流が流れているときは，コイルは磁気エネルギー U を蓄える.

$$\boxed{U=\frac{1}{2}LI^2}$$

テーマ 6 電気振動回路

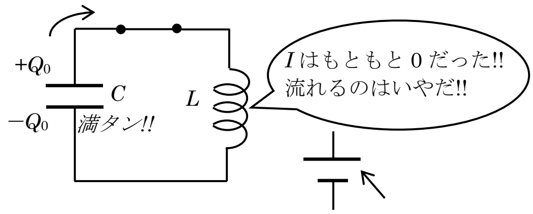
電気量 Q_0 を充電した電気容量 C のコンデンサーと，自己インダクタンス L のコイルに接続すると，電気振動という現象が起きる．現象を分析してみよう．

流れをみていく



直後

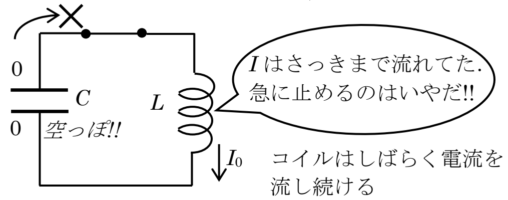
Q を放電しようとする．
（これは電流 I を流そうとするということ）



コンデンサーが頑張り，電荷が空になるまで電流を流す

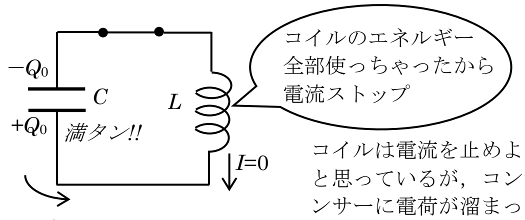
コイルはこんな誘導起電力を発生させて，最初は I を流さない!!
時間をかけてじわじわ流れる．

もう流す電気がない．
(コンデンサーは電流を止めようとする)



コイルはしばらく電流を流し続ける

コンデンサーが空になった後も電流が流れ，コンデンサーに電荷がたまる．



再度電流が流れる

コイルは電流を止めようと思っているが，コンデンサーに電荷が溜まってしまっている．
その結果，最初の向きと逆の放電が行われる．

エネルギーのやり取りに注目する

最初は
コンデンサーには電荷が満タン!!

エネルギーが $\dfrac{1}{2}\dfrac{Q_0^2}{C}$ たまっている．

コンデンサーはエネルギーを失うが，
コイルには電流が流れているので，

エネルギーが $\dfrac{1}{2}LI^2$ たまっている．

コイルはエネルギーを失うが，
コンデンサーには電気がたまっている．

エネルギーが $\dfrac{1}{2}\dfrac{Q_0^2}{C}$ たまっている．

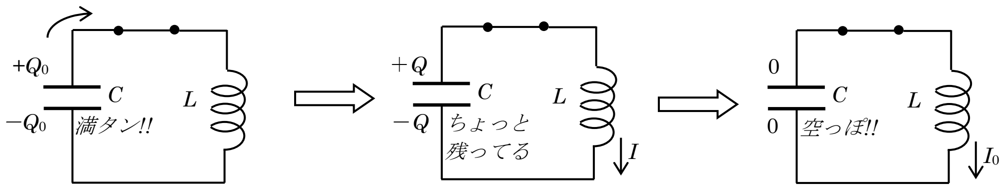
振動回路とは，コイルとコンデンサーの間で，エネルギーをキャッチボールしている回路なのだ

☆ ひとまず点数をとるためのポイント

その１　エネルギー保存則を立てよう

この回路には抵抗が含まれていない，よってジュール熱が発生しない．つまり**エネルギーは保存する**のだ．だから振動する過程でこんなエネルギー保存則が立てられる．

コンデンサー満タン状態（電流は 0）　　**中間状態**　　**コンデンサー空っぽ状態（電流は最大値 I_0）**



$$\underbrace{\frac{1}{2}\frac{Q_0^2}{C}}_{\text{コンデンサーエネ}}+\underbrace{0}_{\text{コイルエネ}} \overset{\text{イコール}}{=\!=} \underbrace{\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}}_{\text{コンデンサーエネ}}+\underbrace{\frac{1}{2}LI^2}_{\text{コイルエネ}} \overset{\text{イコール}}{=\!=} \underbrace{0}_{\text{コンデンサーエネ}}+\underbrace{\frac{1}{2}LI_0^2}_{\text{コイルエネ}}$$

こんなエネルギーの関係式をたてて，Q や I の最大値を出す問題がほとんどなのだ．

その２　周期の式　$T=2\pi\sqrt{LC}$　を覚えてしまおう

振動回路は，エネルギーがいったり来たりする回路だが，ある状態から，再び同じ状況になるまでの時間を周期 T とよび，このとき周期は $\boxed{T=2\pi\sqrt{LC}}$ となる．この式の導出は，次の章『交流』のなかで出てくる．(今はひとまず丸暗記)

時間の問題はすべてこの式で解く．注意が必要なのは，周期は『最初の状態に再び戻ってくるまでの時間』であることだ．前ページの図は，全部で $\frac{1}{2}T$ の出来事.このページ上図（ポイント $\boxed{\text{その１}}$ の図）は，全部で $\frac{1}{4}T$ の出来事である．単振動の時間を答える問題と似ている．

振動回路はややこしそうに見えるが，基本的にこれでほとんどの問題は解ける．

＊コイルの両端の電圧を聞く問題も多いが，コンデンサーにかかる電圧と等しくなると認識しておこう．導線を同じ色で結ぶと，コイルとコンデンサーにかかる電圧が等しいことの説明ができる．

$\boxed{\text{問題 11}}$ 振動回路

電気容量 C〔F〕のコンデンサーを電圧 V〔V〕で充電し，自己インダクタンス L〔H〕のコイルをつなぎ，スイッチを閉じる．コイルを流れる電流が最大になるまでの時間，電流の最大値 i_0 を求めよ．また，そのときのコイルの電圧を求めよ．

$\boxed{\text{問題 11 解答}}$ 時間：$\frac{\pi}{2}\sqrt{LC}$ 〔s〕 i_0：$V\sqrt{\frac{C}{L}}$〔A〕 電圧： 0 〔V〕

$\boxed{\text{問題 11 解説}}$

コイルに流れる電流が最大になるときは，コンデンサーの電気が 0 になり，回路のエネルギーが全部コイルに集まった時である．そして，コンデンサーの電気が満タンから 0 になるまでの時間は$\frac{1}{4}T$ といえる．よって，

$$\frac{1}{4}T = \frac{1}{4}\times 2\pi\sqrt{LC} = \frac{\pi}{2}\sqrt{LC} \quad \cdots \boxed{答}$$

電流の最大値は，エネルギー保存則で求める．コンデンサーの持っていたエネルギーがすべてコイルに移動した時の電流を求めればよいので，$\frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}Li_0{}^2$ という保存則の式を立てられ i_0 について解くと

$$i_0 = V\sqrt{\frac{C}{L}} \quad \cdots \boxed{答}$$

コイルの電圧は，同時刻のコンデンサーの電圧と等しくなる．
コイルに流れる電流が最大のときは，コンデンサーには電気がたまっておらず，コンデンサーの電位差は 0 となるので，コイルの電圧も 0 になる．… $\boxed{答}$