§ 原子① 電子と光

原子の分野では、目に見えない小さなスケールでの物理学を扱う。

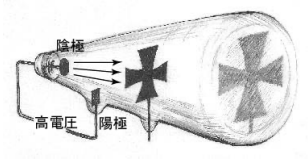
ここまで習得してきた物理学では、球など目に見えるものを扱っていた。その研究は発見から成立まで非常にスピーディに整理され、物理学は全て解明された！と言われる日も近いとまで思われていた。しかし、原子分野でのスケールで観察すると、その物理法則が成立しないような場面が発見された。当時の人がもうほぼ終わりと思っていた物理学の世界に、現在でもまだまだ終わりの見えない入り口が示されてしまったのだ。現代でも解明されていない世界の入り口として、原子分野の学習を進めよう。発見にまつわる歴史の流れも楽しんで。

テーマ 1　電子の発見と、比電荷を求める実験

原子分野の最初は、電子の発見のきっかけとなった実験から。既知の法則を使った実験なので、問題ベースで学習しよう。

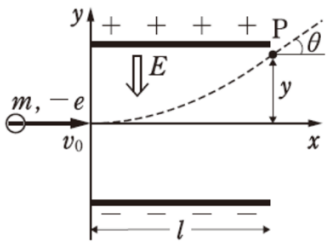
問題 1　トムソンの実験

クルックス管は、内部をほぼ真空にしたガラス管で、高電圧をかけると、**真空放電**が起こり、陰極から何かが飛び出していることがわかった。これには**陰極線**という名前が付けられた。



その後、トムソンが以下のような実験を行い、電子の比電荷$\frac{e}{m}$が測定された。（電子が 1kg あたり、何 C 持っているか）

右図のように、長さ l の領域に$-y$ 方向の一様な電場 E を加える。この電場と直角に、質量 m、電気量$-e$ の電子を x 方向に初速度 v_0 で電場内に入れた。



(1) 電場内を電子が通りぬける時間 t を求めよ。

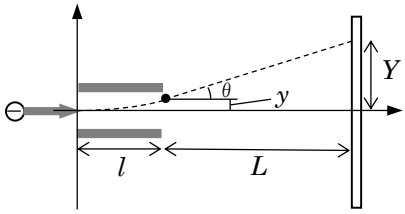
(2) 電場内での電子の加速度 a の大きさと向きを求めよ。

(3) 電場を通りぬけた点 P での y 座標(図の y)を求めよ。

(4) 前問(3)の点 P で、軌道と x 軸がなす角度 θ の正接($\tan\theta$)を求めよ。

x 座標が$(l+L)$の位置に蛍光板を設置し、電子の衝突する点を調べると、電子は y 座標が Y の位置に衝突した。

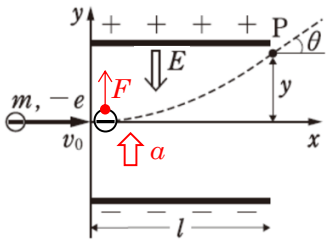
(5) Y を m、e、E、v_0、l、L で示せ。



問題 1 解答 (1) $\dfrac{l}{v_0}$　(2) $\dfrac{eE}{m}$、y 軸の正の向き　(3) $\dfrac{eEl^2}{2mv_0{}^2}$　(4) $\dfrac{eEl}{mv_0{}^2}$　(5) $\dfrac{El(2L+l)}{2v_0{}^2}\cdot\dfrac{e}{m}$

問題 1 解説

(1) 電子は電場内で、電場と逆向きに一定の大きさの静電気力を受ける。すると、力を受ける向きには等加速度運動、力を受けない向きには等速運動をすることになる。



図で示すと、左図のよう整理ができ、

x 方向：等速運動　　y 方向：等加速度運動

と分析できるのだ。

水平投射を上下ひっくり返したような運動である。

(1) x 方向の運動は等速運動なので、公式 $x = vt$ を利用して

$t = \dfrac{l}{v_0}$

(2) 電子が受ける力を考えると、電場から受ける力の公式 $F = qE$ より

$F = eE$

運動方程式 $ma = F$ の F にこれを代入して、

$ma = eE$　これを a について解いて

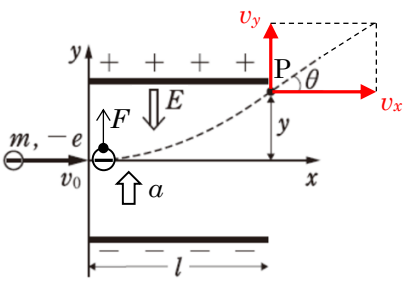
$a = \dfrac{eE}{m}$　となる。　解答は、$\dfrac{eE}{m}$ 、y 軸の正の向き

(3) y 座標に関しては、y 方向の運動から考える。y 座標は等加速度運動なので、P 点到達までの時間を t とおくと、等加速度運動の公式 $x = v_0t + \dfrac{1}{2}at^2$ より

$y = 0 + \dfrac{1}{2}at^2$　　t は前問(1)より $t = \dfrac{l}{v_0}$ 、a は前問(2)より $\dfrac{eE}{m}$、これを代入すると

$y = 0 + \dfrac{1}{2}\dfrac{eE}{m}\cdot\left(\dfrac{l}{v_0}\right)^2$　　整理して、解答は $y = \dfrac{eEl^2}{2mv_0{}^2}$

(4) θ については、P 点での速度に注目すればよい。



左図のように v_x、v_y を設定して $\tan\theta$ を考える。

v_x は、水平方向が等速運動なので、$v_x = v_0$

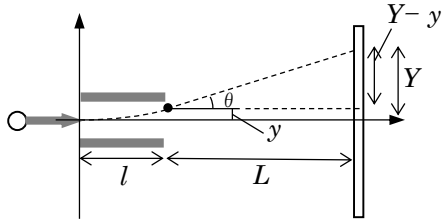
v_y は、等加速度運動なので、公式 $v = v_0 + at$ より

$v_y = 0 + \dfrac{eE}{m}\cdot\dfrac{l}{v_0} = \dfrac{eEl}{mv_0}$

$\tan\theta = \dfrac{v_y}{v_x}$ なので、$\dfrac{\frac{eEl}{mv_0}}{v_0} = \dfrac{eEl}{mv_0{}^2}$　となる。

問題 1 解説 続き

(5) 極板を出た後は、電場による力を受けないので、真っ直ぐにすすむ。



すると、右図のように作図でき、θ の値を用いて、

$\tan\theta = \dfrac{Y-y}{L}$ と書け、前問(4)の $\tan\theta$ を代入。

$\dfrac{eEl}{mv_0{}^2} = \dfrac{Y-y}{L}$ となる。これを Y について解いて

$Y = \dfrac{eElL}{mv_0{}^2} + y$ となる。y は使えない文字なので、これに前問(3)の $y = \dfrac{eEl^2}{2mv_0{}^2}$ を代入

$$Y = \frac{eElL}{mv_0{}^2} + \frac{eEl^2}{2mv_0{}^2} = \frac{El(2L+l)}{2v_0{}^2}\cdot\frac{e}{m}$$

読み物　トムソンの実験でわかったこと

原子分野では、原子の発見の歴史を意識して学んでいったほうが良い。

では、問題 1 のトムソンの実験では、どのような発見があったのだろう。クルックス管の実験により、陰極線が「マイナスの電気を持つ」「粒子である」という事実まではわかった。その粒子には電子という名前がつけられたが、電子のもつ電気の量（電気素量 e）とその質量(m)は分かっていなかった。

ここでトムソンの実験である。問題 1(5)の結論として $Y = \dfrac{El(2L+l)}{2v_0{}^2}\cdot\dfrac{e}{m}$ と求まったが、これを変形すると以下のように書ける。

$$\frac{e}{m} = \frac{2v_0{}^2 Y}{El(2L+l)}$$

そして、v_0、E、l、L は実験装置の設定で自由に設定でき、Y は実験結果として測定ができる。(問題 1(3)の y は値が小さすぎて定規などで測ることはできないので、未知の値である。)

この実験で Y を測定することで、$\dfrac{e}{m}$ の値を解明することができたのだ。

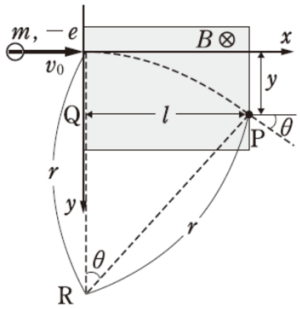
ちなみに比電荷の大きさは $\dfrac{e}{m} = 1.76\times10^{11}$ C/kg である。

この段階では、e と m をセットにした物理量、比電荷 $\dfrac{e}{m}$ までしか解明できなかったが、のちの『ミリカンの実験（問題 3）』により、e と m を個別に求めることに成功する。

また、この実験では、電子にかかる重力を考慮しないで、軌道の計算をしている。電子の質量 m が非常に小さいので、電場による力 qE に対して重力 mg がとても小さく、無視できるのだ。

問題 2　磁場を用いたモデル

右図のように、長さ l の領域に紙面の表→裏向きの一様な磁場(磁束密度 B)を加える。この磁場と直角に、質量 m、電気量 $-e$ の電子を x 方向に初速度 v_0 で磁場内に入れたら、軌道は円弧を描いて点 P で磁場を通りぬけた。



(1) 軌道の半径 r を求めよ。

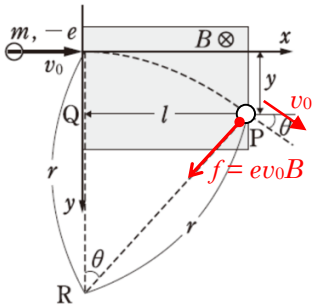
(2) 図で△PQR について三平方の定理を用い、y が十分小さいとして $y^2 \fallingdotseq 0$ とおき、y を求めよ。

(3) 点 P で軌道と x 軸がなす角度 θ の正接($\tan\theta$)を求めよ。ただし、θ は十分小さく、$\tan\theta \fallingdotseq \sin\theta$ を用いてよい。

問題 2 解答　(1) $\dfrac{mv_0}{eB}$　(2) $\dfrac{eBl^2}{2mv_0}$　(3) $\dfrac{eBl}{mv_0}$

問題 2 解説

(1) 磁場内を進む電荷はローレンツ力 $f = qvB = ev_0B$ を受け、円運動を行う。



円運動の運動方程式 $m\dfrac{v^2}{r} = F$ より

$m\dfrac{{v_0}^2}{r} = ev_0B$ よって　$r = \dfrac{mv_0}{eB}$

(2) △PQR で三平方の定理を用いると、

$r^2 = l^2 + (r - y)^2$　となり、展開すると、

$r^2 = l^2 + r^2 - 2ry + y^2$　となる。ここで、y が非常に小さいとき、$y^2 \fallingdotseq 0$ と近似でき、

y が(極小)なら、y^2 は(極小)の 2 乗で(超極小)≒0

$r^2 \fallingdotseq l^2 + r^2 - 2ry$　となる。y について解いて

$y = \dfrac{l^2}{2r}$　これに、前問(1)の $r = \dfrac{mv_0}{eB}$ を代入して、

$y = \dfrac{eBl^2}{2mv_0}$

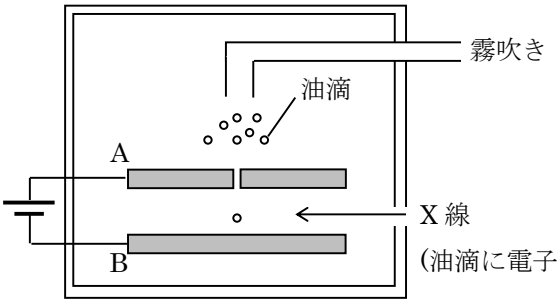
(3) θ が非常に小さく、$\tan\theta \fallingdotseq \sin\theta$ とみなし、$\tan\theta \fallingdotseq \sin\theta = \dfrac{l}{r} = \dfrac{eBl}{mv_0}$

＊ y と $\tan\theta$ を出せたので、あとは問題 1 (5)のように蛍光板をおき、Y を測定すれば比電荷 $\dfrac{e}{m}$ を出すことができる。磁場による偏向でも、トムソンの実験を行える。

テーマ 2　ミリカンの実験

ミリカンの実験により、電子 1 個の持つ電気量（電気素量 e）と、電子の質量 m を解明することができた。原理と計算方法を理解しよう。

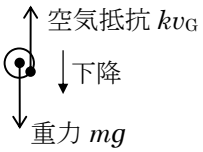
≪ミリカンの実験と解析≫



(油滴に電子を打ち込める。負に帯電する)

① 霧吹きから油滴を舞わせ、そこに X 線を打ち込む。すると油滴は電子を吸収し帯電する。

② 電源をつなげずに油滴を観察すると、油滴は一定の速度 v_G で落下していたとする。
速度が一定なのは、油滴にはたらく重力と、空気抵抗がつりあっているからである。
つりあいの式をたてると、

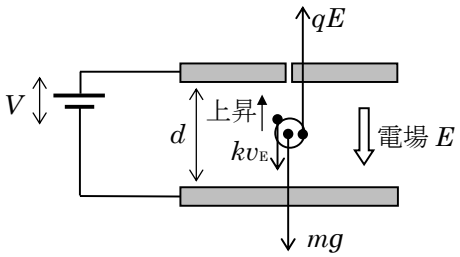


$$kv_G = mg$$

となる。

③ 次に、極板に電圧をかけ、電場を発生させると、電場から受ける力により油滴は上昇し、一定の速度 v_E となったとする。このとき、重力、空気抵抗、電場から受ける力、の 3 力がつりあっているといえる。

④ 仮に油滴の質量を m、油滴の持つ電気量を q、極板 AB の電位差を V、極板 AB の距離を d として力のつり合いの式を立てると、



(②より $mg = kv_G$)

$$qE = kv_E + mg$$

ここで、電場 E は $E = \frac{V}{d}$ であり、mg は②の式より $mg = kv_G$ である。これを代入すると

$q\frac{V}{d} = kv_E + kv_G$ となる。q について解き

$$q = \frac{k(v_E + v_G)d}{V}$$

このように q を求めることができる。

⑤ しかし、この計算で求まる q がそのまま電気素量 e となるわけではない。油滴に X 線を打ち込んだ時に、油滴は複数の電子を吸収している。電子を 3 個打ち込まれた油滴は $q = 3e$、5 個打ち込まれたなら $q = 5e$ となる。実験ごとに q の値にばらつきがでるのだ。

問題 3　ミリカンの実験の結果処理

ミリカンの実験を行い、複数の油滴を観察して、q を計算したところ以下のような電荷の値が測定されたとする。

	油滴 A	油滴 B	油滴 C	油滴 D	油滴 E
電荷の大きさ q($\times 10^{-19}$〔C〕)	4.9	6.5	9.7	11.3	17.6

この結果から、電子 1 個あたりが持つ電気量 e を求めよ。

問題 3 解答　$e = 1.6129 \cdots \times 10^{-19}$　(1.6×10^{-19} C)

STEP 1　それぞれの差を書き出す

電荷の大きさ q($\times 10^{-19}$〔C〕)	4.9	6.5	9.7	11.3	17.6

1.6　3.2　1.6　6.3

差をとると、大まかに 1.6×10^{-19} C の倍数になっていることに気づく。これは、電子 1 個の電気量が大まかに 1.6×10^{-19} C で、1 個多く電子を吸収したときに、1.6×10^{-19} C だけ電気量が増え、電子を 2 個多く吸収するときは、3.2×10^{-19} C 増える、という仕組みからだ。ここで、仮に $e = 1.6\times10^{-19}$ C と考えてみて、STEP 2 に進む。

STEP 2　仮の e の値を用いて、油滴の電荷の大きさ q を○×e という形で表す

電荷の大きさ q($\times 10^{-19}$〔C〕)	4.9	6.5	9.7	11.3	17.6
○×e という形で表してみる	$3e$	$4e$	$6e$	$7e$	$11e$

表の値がきれいに q を 1.6 で割り切れないので、大まかな計算をすることになる。
割り切れないのは、$e = 1.6$ が正確な大きさでないからだ。正確な e を求められていないということなので、STEP 1 だけでは解答にしてはいけない。注意しよう。

STEP 3　実験結果の合計値から平均して、e を逆算する。

$(4.9 + 6.5 + 9.7 + 11.3 + 17.6)\times10^{-19} = 3e + 4e + 6e + 7e + 11e$

$50\times10^{-19} = 31\,e \quad \Rightarrow \quad e = 1.6129 \cdots \times10^{-19}$

このように電気素量 e を計算するのが、ミリカンの実験である。

＊ 現在では、多くの実験を重ね $e \fallingdotseq 1.60\times10^{-19}$ C とされている。比電荷 $\frac{e}{m}$ と電気素量 e の値が解明されたことで、電子の質量 m を逆算でき、ついに質量 m が解明できたのだ。

テーマ 3　光電効果でのエネルギーのやりとり

金属に光を当てると電気が流れる。これを光電効果という。

《準備》

① 新しい文字：ν　　読み：ニュー

振動数の文字にはfを使っていたが、原子分野の振動数の場合『ν』（読み：ニュー）を用いる。

② 光の持つエネルギー

アインシュタインは、光が粒子であるという仮説を立て、それを光子と名付けた。

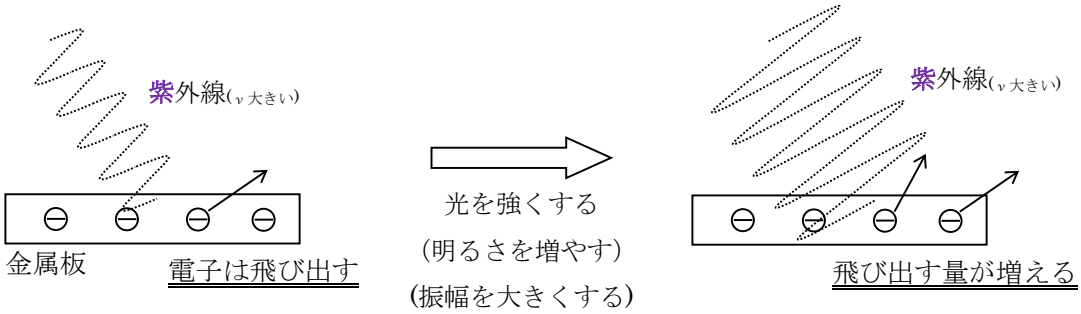
そして、光子のエネルギーが $\boxed{E = h\nu}$ であることを示した。

（この式は、理屈抜きで単純暗記です。超重要式です。）

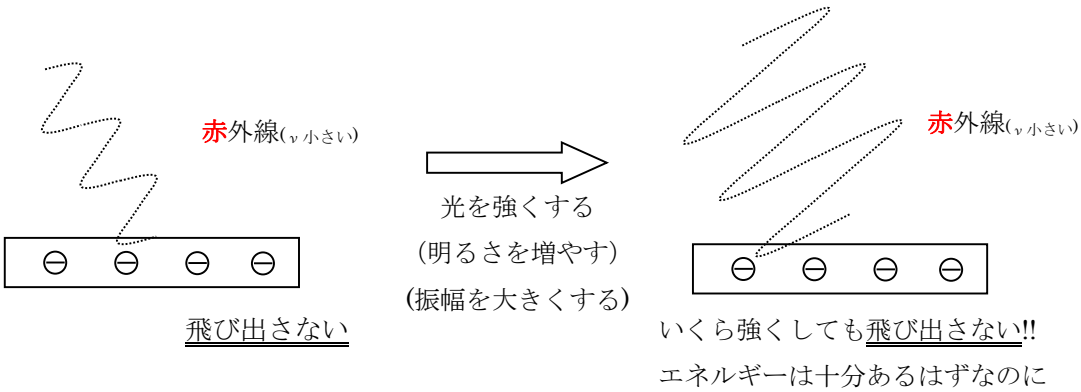
このときのhをプランク定数といい、$h = 6.62\times 10^{-34}$ J･s である。

《原理と意義》

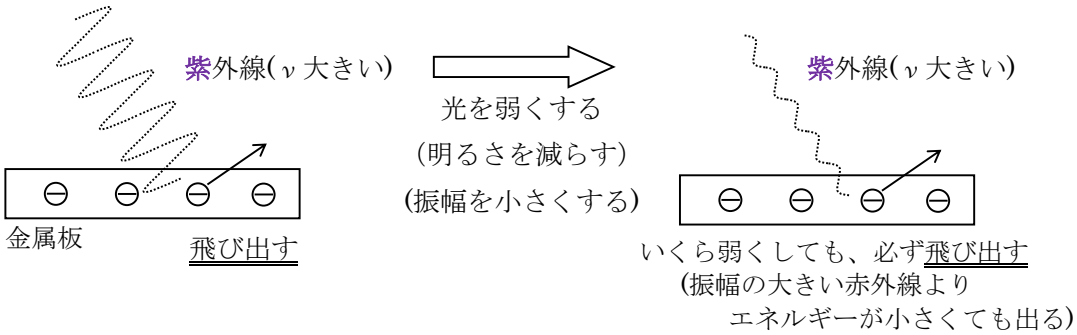
波動としての光は、強さ（明るさ）と振動数(色)の 2 つの大きさが、エネルギーの大きさと関わっていることがわかっていた。これらを変化させ、光電効果の実験結果を比較してみる。



ここまでは、当たり前のように感じる実験結果である。しかし不思議なのはここから。



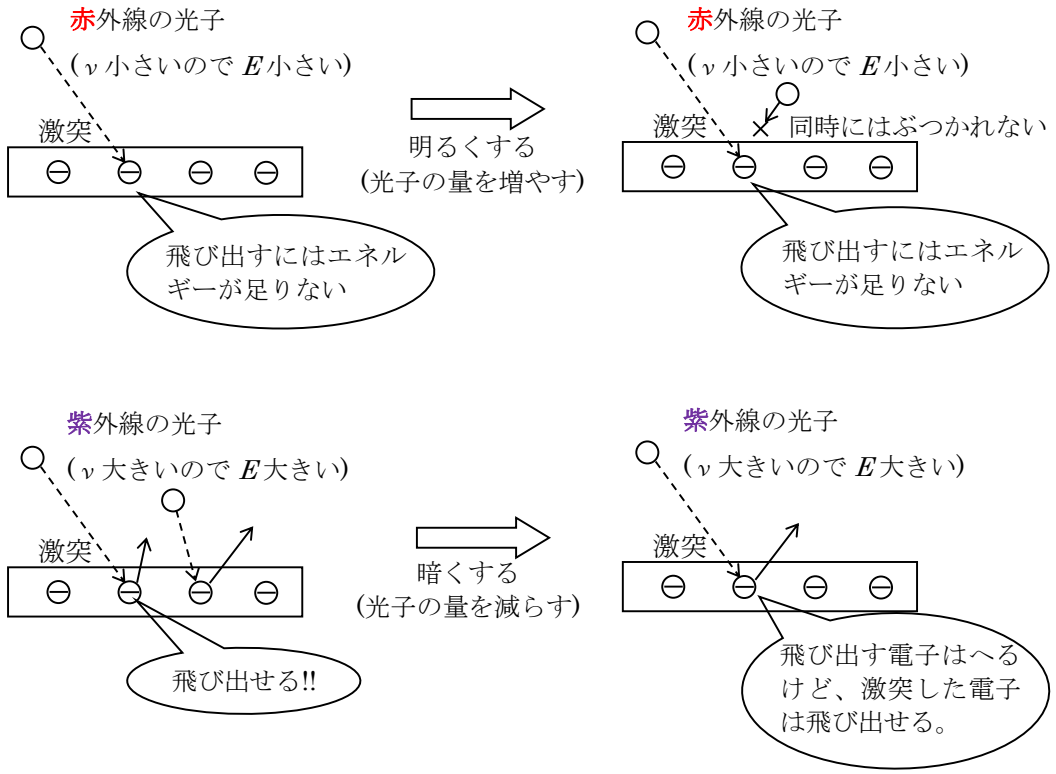
さらに、話を紫外線に戻すと、



このような実験結果になる。この実験結果は、光を波動として捉えると説明がつかない。
波として持つエネルギーの大小と、飛び出す条件につながりが見えないのだ。
しかし、光が粒子であることで筋の通った説明が行える。

光粒子説の基本

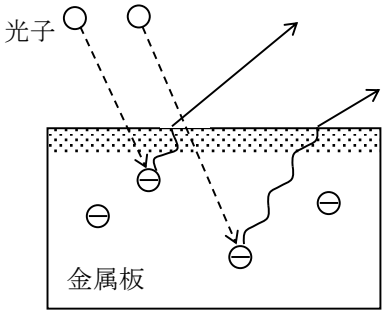
光は粒子であり、光子と呼ぶ。エネルギーはνで決まる。
光の明るさは、振幅ではなく、光子の個数であると考える。
電子１つに対して、光子１つしか衝突できない。



光電効果の実験より、光は粒子性を持つという仮説が現実的になったのだ。

≪仕事関数 W≫

光電効果を詳しく調べていくと、同じ光でも金属によって、電子が飛び出さないときがあった。金属の種類ごとに飛び出す条件が違ったのだ。この現象は下のイメージ図で説明できる。



飛び出す電子を「光電子」という

金属板内には様々な場所(深さ)に電子が埋まっている。飛び出るには、埋まっている場所から、金属を掘り進めないといけない。

エネルギーのやりとりをイメージ

光子が電子にぶつかるとき、持っていたエネルギー$h\nu$を電子に与える。

↓

電子はもらったエネルギーを用いて、金属板から這い出ていく。その際エネルギーを消費する。

↓

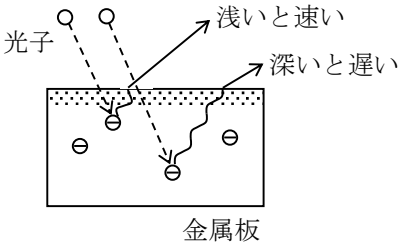
電子は、

光子からもらったエネ　－　這い出るのに使ったエネ　⇒　余ったエネ

を持って飛び出す。余ったエネルギーは運動エネルギーとして持ち出す。

エネルギーが余るほど、勢いよく飛び出す。

そして、金属板には、いろいろな深さに電子が埋まっていて、深さごとに飛び出す電子の速さが違う。



ここで、金属によって、一番浅い電子までの深さが違い、飛び出しやすい金属と、飛び出しにくい金属があるのだ。ここで、

一番浅い電子が、金属から出ていくために使うエネルギーの量を仕事関数 W という。

金属の種類や、温度によって W が変わるのだ。

まとめの穴埋め

飛び出す電子で、一番速いものの速度を v_{MAX} としたときのエネルギー収支は、

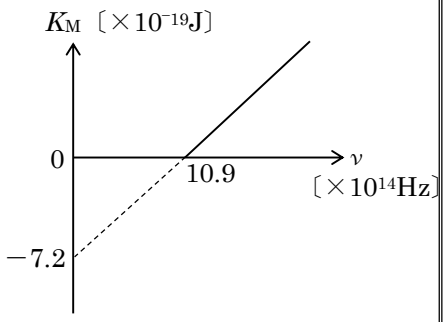
プランク定数を h、電子の質量を m とすると　　とかける。

前ページ穴埋めの解答

$h\nu - W = \frac{1}{2}mv_{MAX}^2$　　または、　$h\nu = W + \frac{1}{2}mv_{MAX}^2$　（←右の方がよく書かれる。）

問題 4　仕事関数とエネルギーのやりとり

図は、光電効果の実験を行い、入射させる光の振動数 ν を変化させて、光電子の最大運動エネルギー K_M を測定した結果である。以下の問いに答えよ。



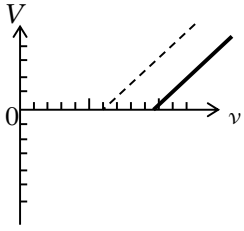
(1) 電子がギリギリ飛び出すときの振動数を限界振動数という。限界振動数を ν_0、プランク定数を h として、仕事関数 W を示せ。

(2) 飛び出す電子の最大運動エネルギー K_M と光の振動数 ν の関係式を、ν、ν_0、h、K_M を用いて示せ。

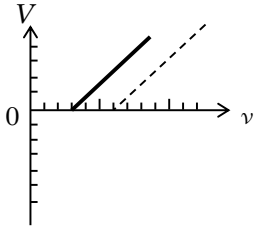
(3) グラフから、仕事関数 W と、プランク定数 h を求めよ。ただし、$e = 1.6 \times 10^{-19}$〔C〕とする。

(4) 仕事関数 W が大きい金属に取り換えて同じ実験を行うと、どのようなグラフになるか。選択肢から選べ。

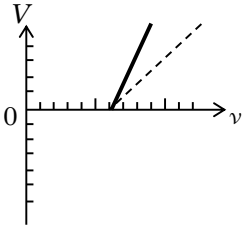
ア



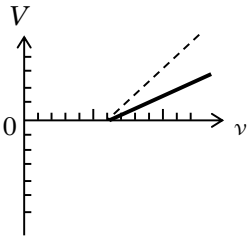
イ



ウ



エ



問題 4　解答　(1) $W = h\nu_0$　(2) $K_M = h(\nu - \nu_0)$
(3) $W = 7.2\times10^{-19}$〔J〕　$h = 6.6\times10^{-34}$〔J・s〕　(4) ア

問題 4　解説

(1) 限界振動数は、一番浅い部分の電子が、ギリギリ飛び出すときの振動数といえる。
このとき、光子のもつエネルギーは $h\nu$ で、一番浅い電子が飛び出す際に消費するエネルギーが W で、ギリギリ飛び出した後の運動エネルギーは 0 といえるので、エネルギーの関係式を立式すると、

(光子の持つエネルギー) − (消費するエネルギー) = (余った運動エネルギー)

⇒　$h\nu_0 - W = 0$

となる。よって、$W = h\nu_0$　となる。

(2) 最大運動エネルギーを持つ電子は、一番浅いところから出てくる電子なので、金属板から出るのに、W だけエネルギーを消費している。このことからエネルギーの関係は、

(余った運エネ) = (光子のエネ)−(消費するエネ)

⇒　$K_M = h\nu - W$

となる。

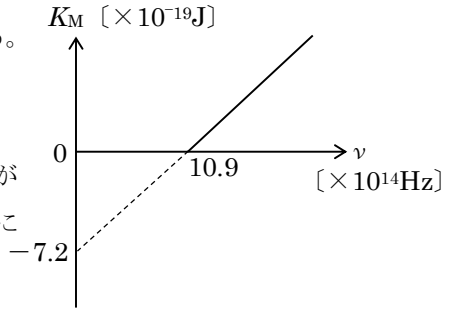
W は(1)で $W = h\nu_0$　と求めているので、代入して

$K_M = h\nu - h\nu_0$　⇒　$K_M = h(\nu - \nu_0)$　となる。

(3) このグラフは、前問まででも立式した

$K_M = h\nu - W$

という式のグラフであるので、切片が $-W$、傾きが h といえる。(負の領域の線が点線なのは、実際には電子が飛び出していないからだ)



W について

切片が -7.2×10^{-19}〔J〕なので $W = 7.2\times10^{-19}$〔J〕

h について

傾きはグラフの点線の部分から求めると $\dfrac{7.2\times10^{-19}}{10.9\times10^{14}} = 6.60\cdots\times10^{-34} \fallingdotseq 6.6\times10^{-34}$〔J・s〕

(4) W が大きくなると、切片がより負の方向にずれることになる。
しかし、プランク定数 h は変わらないので、傾きは変わらないはずである。よってア。
他にも、ギリギリ飛び出すのに必要な限界振動数が増えるので、グラフの 10.9 の部分が右に移動すると考えて、ア、と答えることもできる。

テーマ 4　〔eV〕という単位

エネルギーの単位は〔J〕であるが、原子分野では、非常に小さいエネルギーを扱うので、頻繁に 10^{-19} などがついてしまう。これだと不便なので新しい単位を作ることにした。

単位

エネルギーの単位：〔eV〕 読み：『電子ボルト』または『エレクトロンボルト』

〔MeV〕 読み：『メガ電子ボルト』または『メガエレクトロンボルト』

＊メガは、10^6 という意味。1 MeV = 1×10^6 eV

＊読みの最後が『ボルト』なので、電圧の単位と勘違いする人が多い。エネルギーの単位なので気をつけよう。〔J〕の代わりに使う単位なのだ。

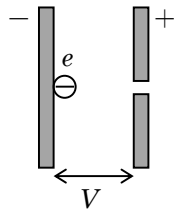
エレクトロンボルトの定義

電子 1 個を 1 V の区間加速させた際に得るエネルギーを 1 eV とする。←**重要**

〔J〕で示すと、1 eV= 1.6×10^{-19} J　←覚えなくてよい

問題 4　極板間の電子の加速と〔eV〕の定義

2 枚の極板の間に、V〔V〕の電圧をかけ、電子を加速させた。電子の質量を m〔kg〕、電気素量を e〔C〕とする。以下の問いに答えよ。



(1) 電子が極板間を移動する間に、電場からされる仕事は何〔J〕か。

(2) 初速度 0 で、−の極板をスタートした場合、反対の極板に到達したときの電子の速度は何〔m/s〕か。

(3) 極板間にかけた電圧を 1.0 V、電気素量を 1.6×10^{-19} C とした場合、電子が電場からされる仕事は何〔J〕か、また何〔eV〕か。（この問題のみ数値で答えよ。）

(4) eV〔J〕は何〔eV〕か。

問題 4 解答 (1) eV〔J〕　(2) $\sqrt{\dfrac{2eV}{m}}$〔m/s〕　(3) 1.6×10^{-19} J　1.0 eV　(4) V〔eV〕

問題 4 解説 斜体の文字は物理量であり、斜体じゃない文字は単位であることに気を付けて解説を読もう。

(1) 電位と仕事の公式　$W = qV$ より、

$W = eV$　〔J〕

(2) 運動エネルギーと仕事の式を立てる。到達したときの速度を v とおくと

（前運エネ）＋（仕事）＝（後運エネ）

$$0 \quad + \quad eV \quad = \quad \frac{1}{2}mv^2$$

v について解いて

$$v = \sqrt{\frac{2eV}{m}} \quad 〔\mathrm{m/s}〕$$

(3) 前問(1)の答えに、数値を代入して、

$W = 1.6\times10^{-19} \times 1.0$

$= \underline{1.6\times10^{-19}\ \mathrm{J}}$

単位〔eV〕の定義は、<u>電子 1 個を 1 V で加速したときに得るエネルギーを 1 eV とする</u>、というものなので、この問題で求めた仕事の量が <u>1 eV</u> と言える。

〔eV〕と〔J〕の換算

このことから、　1 eV = 1.6×10^{-19} J という関係を導ける。なので、覚える必要がない。

また、〔eV〕→〔J〕　に直すときは、電気素量 e を掛け算する
〔J〕→〔eV〕　に直すときは、電気素量 e で割り算する　という整理もしておこう。

(4) eV〔J〕を〔eV〕に直すには電気素量 e で割り算する(前問(3)のまとめ参照)。よって <u>V〔eV〕</u>。

問題 5 〔eV〕と〔J〕の換算

電気素量を 1.6×10^{-19} C として、以下の問いに答えよ。

(1) 5.0 eV は何 J か。

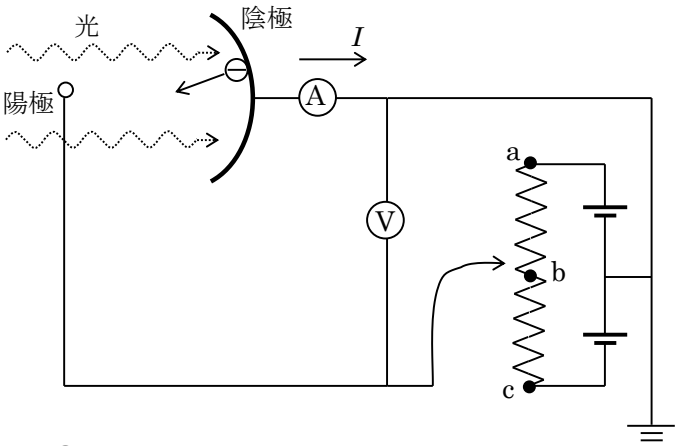
(2) 4.0×10^{-12} J は何 eV か。

問題 5 解答 (1) 8.0×10^{-19} J　(2) 2.5×10^{7} eV

問題 5 解説 (1) 1.6×10^{-19} をかければよい　(2) 1.6×10^{-19} でわればよい

テーマ５　光電効果の実験装置

光電効果の実験では以下のような装置を使う。



装置のポイント

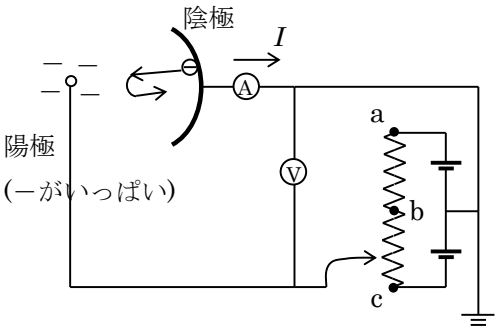
① 陰極に光を当てると陰極から電子が飛び出す。
　⇒ 電流が図の向きに流れる。

② 矢印導線をつなぐ位置によって、陰極と陽極の電位差を操作することができる。
　⇒ 電位の色分けをしてイメージを湧かせましょう

＊②について詳しく

アースとつながっている導線は、電位が 0 であり、接続された電池によって、a 地点は正（高い）の電位、c 地点は負（低い）の電位となっている。なので、中央の b 地点が 0 V であり、c 側に導線の矢印をつなぐと陽極が負になり、a 側につなぐと陽極が正となるのだ。

≪陽極側が負の場合≫

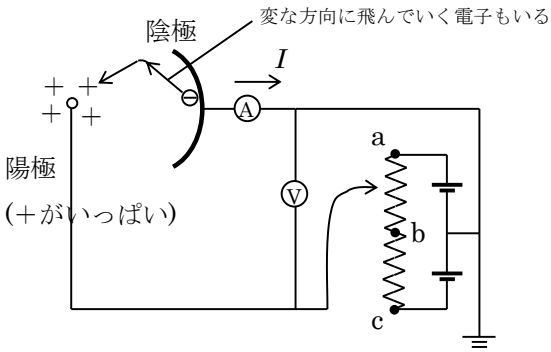


電子は、陽極のマイナスに押し返される。

⇩

電位差を大きくしていくと、電流が減っていく。そして、一番活きのいい電子を押し返せる電圧になったら、電流は流れなくなる。この電圧を阻止電圧 V_0 という。エネルギーの関係式から、飛び出す電子の運動エネの最大値 K_{MAX} は $K_{MAX} = eV_0$ といえる。

≪陽極側が正の場合≫



変な方向に飛び出した電子も、陽極に集まる。

⇩

電位差を大きくしていくと、電流が大きくなる。ただし、出た電子の中で、一番集めにくいやつを集められる電圧になったら、それ以降電圧を上げても電流は増えない。出た電子を全回収したので、それ以上引き寄せても、集まる電子の数は増えないのだ。

問題 6　光電効果の実験値の分析

図 1 のような、光電管を用いた回路をつくった。

振動数 $\nu = 5.0\times10^{14}$〔Hz〕の単色光を金属板 K にあてたときに、その表面から飛び出して金属板 P に達する光電子による電流(光電流)を、PK 間の電圧を変えて測定したところ、図 2 に示す結果を得た。

電気素量を 1.6×10^{-19} C、プランク定数を 6.6×10^{-34} J･s とする。

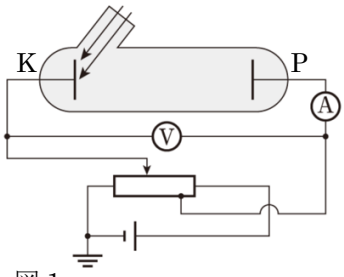


図 1

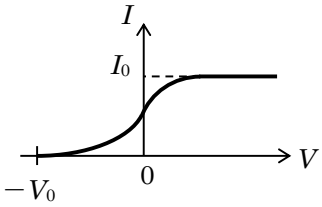


図 2（K に対する P の電位）

(1) この単色光の光子 1 個のエネルギーは何 eV か。

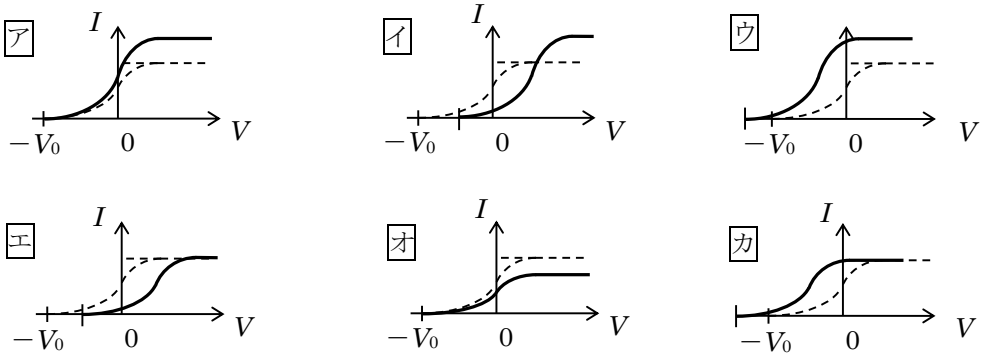
(2) 飛び出す光電子の最大運動エネルギーは何 eV か。ただし、図 2 の V_0 の値を 0.66 V とする。

(3) 陰極 K に用いた金属の仕事関数は何 eV か。

(4) 次のように実験の条件を変えたとき、グラフがどのように変化するか、選択肢から選べ。

(a) 単色光の振動数を一定に保ったまま、明るさをもとよりも大きくした。

(b) 明るさを一定に保ったまま、振動数 ν のみを大きくする。



問題 6 解答 (1) 2.1 eV　(2) 0.66 eV　(3) 1.4 eV　(4) (a)ア (b)カ

問題 6 解説 この実験装置では、抵抗の左端がアースとつながっているので 0 V、右端が電池の電圧分上昇した電位となっており、そこに接続することで、K と P の電位を調整している。

①P の導線が右側になるようにつなげば、P に＋が集まり、光電子を集め I が増える。また、このとき電圧計は正の値を示す。

② P の導線が左側になるようにつなげば、P に － が集まり、光電子を押し返し I が減る。また、このとき電圧計は負の値を示す。

実験装置と、起きている現象の理解を大切にしよう。

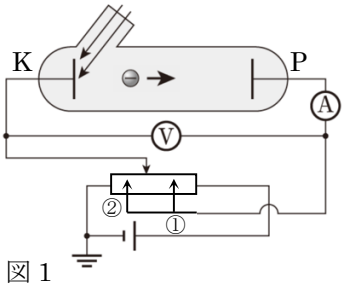


図 1

(1) 光子のエネルギーの公式　$E = h\nu$ より

$E = (6.6\times10^{-34}) \times (5.0\times10^{14}) = 3.3\times10^{-19}$ J

これを〔eV〕に換算すると、

$E = \dfrac{3.3\times10^{-19}}{1.6\times10^{-19}} = 2.06\cdots$ eV ≒ 2.1 eV

(2) 最大運動エネルギー K_{MAX} を持つ電子を押し返すことのできる電圧が阻止電圧 V_0 〔V〕であることに注目する。エネルギーと仕事の関係式を立てると、

$K_{MAX} = eV_0$ 〔J〕

これを〔eV〕に換算すると、

$K_{MAX} = \dfrac{eV_0}{e} = V_0$ 〔eV〕

問題文より、$V_0 = 0.66$ V なので、$K_{MAX} = 0.66$ eV

(＊エネルギーを〔J〕で聞かれたら $K_{MAX} = eV_0$ 〔J〕の式に数値を代入しよう。)

(3) 仕事関数 W は一番浅いところにいる電子が飛び出すのに必要なエネルギーのことであることから、$K_{MAX} = h\nu - W$ という関係式が成り立つ。

単位に気を付けて、前問までのデータを代入する。今回は〔eV〕を用いる。

$0.66 = 2.06 - W$

W について解いて　　$W = 1.4$ eV

(4) (a) 明るさが大きいということは、光子の数が増えている。光子に衝突される電子の数が増え、飛び出てくる電子の数が増える。つまり、I は大きくなる。

一方で、振動数 ν は変わっていないので、電子に与えるエネルギー $h\nu$ は変化しない。

電子の K_{MAX} が変わらないので、阻止電圧 V_0 は変わらない。グラフはア。

(b) 明るさが一定に保たれているなら、衝突する光子の数も変わらない。よって飛び出る電子の数も変わらないので I_0 は変わらない。

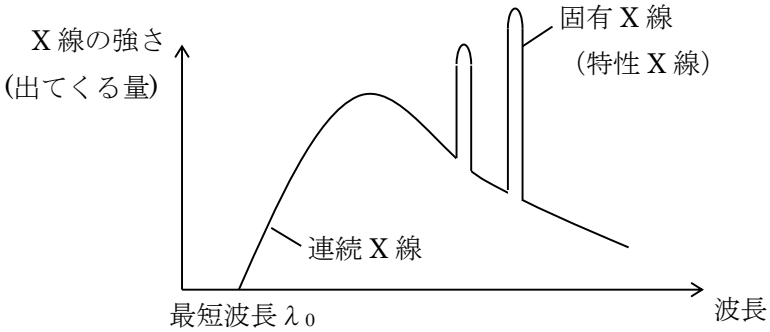
ν を大きくするということは、電子に与えるエネルギー $h\nu$ が増えるので、電子の K_{MAX} が大きくなるので阻止電圧 V_0 が大きくなる。グラフはカ。

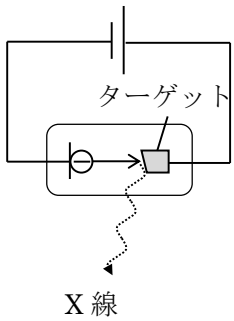
テーマ 6　X 線

電子を物質(ターゲット)に当てると、紫外線よりも波長が短い光である X 線が飛び出した。これは光電効果の逆の現象である。

光電効果 … 光 → 電子　　X 線 … 電子 → 光　　と整理しよう。

X 線の発生の際によく出てくるグラフは以下のようなもの。
ある一定の速さで電子を飛ばしたときに、さまざま波長の X 線が観測されるので、その波長ごとにどれくらいの量が出ているのかを示したグラフである。





(エネルギー最大)

ポイント① 波長とエネルギーの大小関係

光の持つエネルギーは $E = h\nu$ であるが、これを波長で示してみる。波の式 $v = f\lambda$ から、$c = \nu\lambda$。変形して $\nu = \frac{c}{\lambda}$ 、これをエネルギーの式に代入すると、$E = \frac{hc}{\lambda}$ となる。
つまり、波長が短いほどエネルギーが大きいと言える。

ポイント② 連続 X 線の発生原理と、最短波長 λ_0

連続 X 線は、高速で移動する電子が物体に衝突したとき、**電子の速度が減少し、そのとき失う運動エネルギーが光(X 線)となっている**。この際、電子ごとに、失う運動エネルギー量に差があり、いろいろな波長の X 線が出る。最短波長となるときは、エネルギーが最も大きい X 線の場合だが、**電子が完全に停止するとき発生する X 線がエネルギー最大、最短波長の X 線**である。式にすると

$$\underline{\underline{eV}} = \underline{\underline{h\frac{c}{\lambda_0}}} \ (= h\nu_0)$$

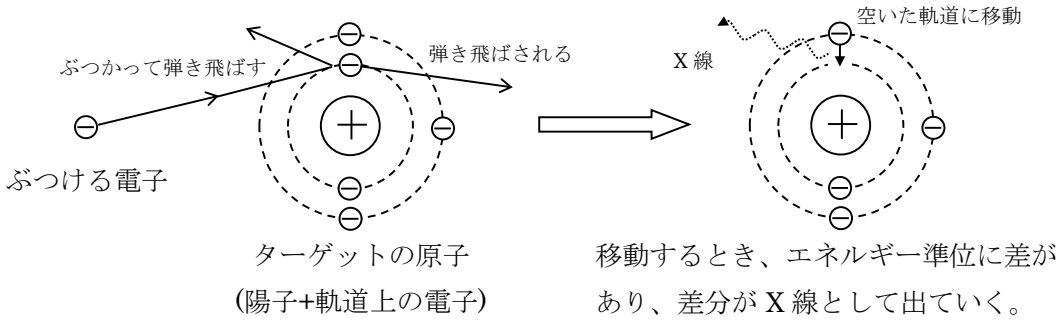
電子の持つエネルギー

X 線の持つエネルギー

打ち出された電子の持つエネルギーは、打ち出しの電圧が V〔V〕なら、eV〔J〕のエネルギーといえる。
それがすべて X 線になった時、最短波長 λ_0 の X 線が発生する、という式である。当てる電子が速くなるほど、出てくる X 線の最短波長 λ_0 は小さくなるのだ。

ポイント③ 固有 X 線の発生原理

固有 X 線は、連続 X 線とは発生する原理が違う。下図のようなイメージを持っておこう。

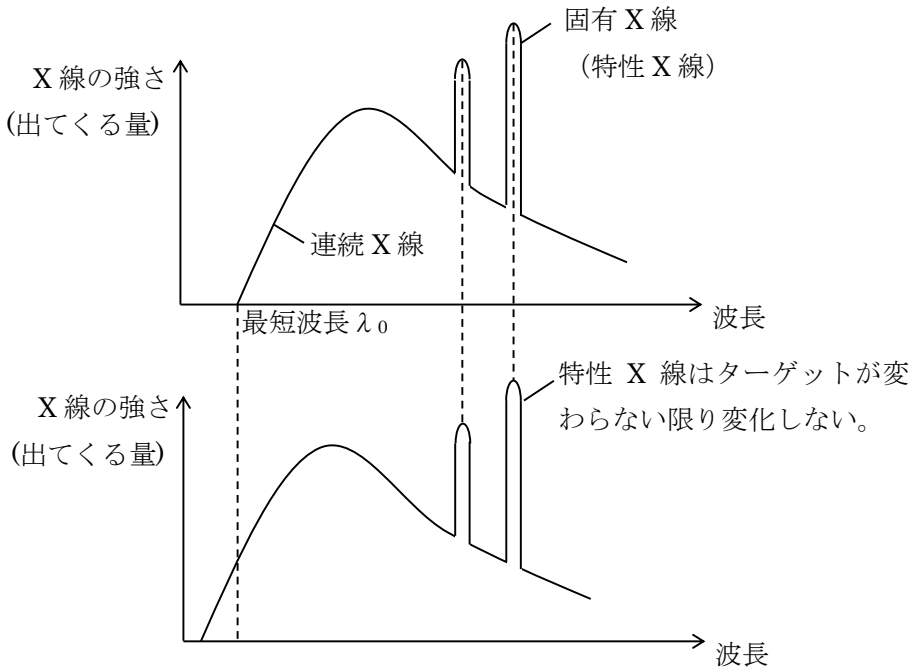


ぶつける電子のエネルギーが X 線になっているわけではないので、電子の打ち出し速度を変えても固有 X 線の波長は変わらない。一方で、ターゲットの種類を変えると、軌道上のエネルギーの状態が違うので、固有 X 線の波長は変わる。

また、1 つはじかれ、そこに外側から移動して来たら、移動した電子の場所がまた空席になり、さらに外側から電子が移動し…と連鎖する。そして、2 周目→1 周目と、3 周目→2 周目で、エネルギーの差が異なるので、固有 X 線は 2 種類あったりするのだ。

ポイント④ グラフの変化

ここまでのポイントを基に、グラフの変化を考察する。



当てる電子のエネルギーが大きくなれば、最短波長 λ_0 は小さくなる。

問題 7 X 線の発生

図 1 は X 線を発生させる装置で、図 2 は初速 0 で陰極から放出された電子(質量 m、電気量$-e$)を電位差 V の陽極に衝突させたときに発生した X 線のスペクトルである。波長 λ_2、λ_3 には固有 X 線(特性 X 線)のピークがある。プランク定数を h、光の速さを c とする。

(1) 陽極に衝突するときの電子の運動エネルギーE、速さ v はいくらか。

(2) 発生する X 線の最短波長 λ_1 はいくらか。

(3) 加速電圧を増大していくと、図中の波長 λ_1、λ_2、λ_3 はそれぞれどう変化するか。

変化する、変化しない、で答え、その理由を簡潔に述べよ。

(4) X 線の性質について知るところを 3 つ述べよ。

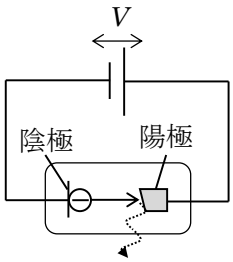


図 1

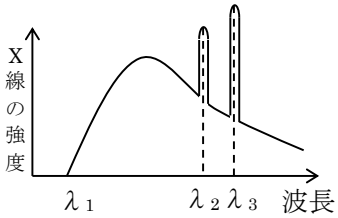


図 2

問題 7 解答 (1) $E = eV$ 、$v = \sqrt{\dfrac{2eV}{m}}$　(2) $\lambda_1 = \dfrac{hc}{eV}$

(3) λ_1: 短くなる　λ_2: 変化しない。　λ_3: 変化しない。(4) 解説参照

問題 7 解説

(1) 電位差 V の区間を電子が移動すると、公式 $W = qV$ の仕事をされることから考える。

(前運動エネ) ＋ (された仕事) = (後運動エネ)　というエネルギーの関係式を立てると、

$$0 \quad + \quad eV \quad = \quad E$$

よって、$\underline{E = eV}$

ここで $E = \dfrac{1}{2}mv^2$ なので、

$$\frac{1}{2}mv^2 = eV$$

v について解いて、$v = \sqrt{\dfrac{2eV}{m}}$

問題 7 解説続き

(2) 最短波長を出す際は、前問(1)で出した電子の持つエネルギーeVが全て X 線に変化していると考える。X 線の持つエネルギーは公式 $E=h\nu$ で示されるので、最短波長λ_1の時の振動数をν_1とすると、以下のように立式できる。

$$eV=h\nu_1 \quad \cdots ①$$

波の式 $v=f\lambda$ より、

$$c=\nu_1\lambda_1$$

よって、$\nu_1=\dfrac{c}{\lambda_1}$

これを、①式に代入して、

$$eV=h\frac{c}{\lambda_1}$$

λ_1について解いて、

$$\lambda_1=\frac{hc}{eV}$$

(3) λ_1: 短くなる　λ_2: 変化しない。　λ_3: 変化しない。

λ_1は、陽極に向かう電子のエネルギーによって発生する X 線（連続 X 線）なので、加速電圧を大きくすると変化する。λ_2、λ_3は、電子軌道を移動する電子から発生する X 線（固有 X 線）なので変化しない。（前ページのモデル参照）

(4) ここまでのプリント内で解説していないことなので、この機会に頭に入れておこう。

・物質への透過力が強い。　・写真フィルムを感光させる。

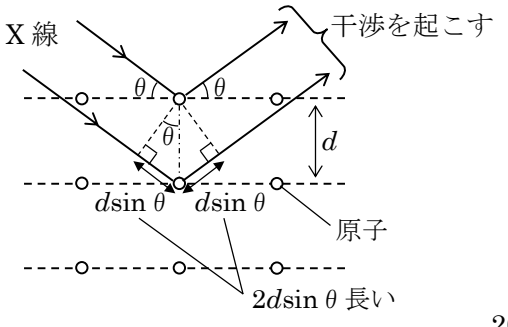
・蛍光物質に蛍光を発生させる。　などの特徴があります。

テーマ 7　ブラッグ反射

X 線を使った実験にブラッグ反射と呼ばれるものがある。（Bragg はイギリスの物理学者）

《ブラッグ反射》(X 線の波動性の観察)

結晶に X 線を当てると、各原子配列面(間隔を d とする)で反射した光が干渉し、入射させる角度によって、強い X 線が観察できる。これにより、結晶格子面の間隔 d を求めることができたりする。



経路差は $2d\sin\theta$

（θ の場所に注意）

干渉の条件式は

強め合う条件　$2d\sin\theta=\dfrac{\lambda}{2}\times 2n$

$(n=0、1、2\cdots)$

テーマ 8　物質波（ド・ブロイ波）

物理学者のド・ブロイは、光が波動性と粒子性を持つなら、通常の粒子も波動性を持つと考えた。これを物質波といい、ド・ブロイは以下のように、運動量 p で動いている物質は波長を持つと予言し、ブラッグ反射などでその事実が確かめられた。特に、電子を打ち出した際の物質波を電子波と言ったりもする。

物質波の波長(ド・ブロイ波長)　$\lambda = \dfrac{h}{p} = \dfrac{h}{mv}$

この式は、理屈なく丸暗記となる。しかし、ただ丸暗記しても記憶に残りづらいので、以下のように関連づけよう。

光子の持つエネルギー $E = h\nu$　← これはすでに暗記している式

↓

エネルギーの次元は(質量)×(速度)^2 、速度で割れば運動量の次元(質量)×(速度)になる

↓

よって、光子の持つ運動量 p は $p = \dfrac{E}{c} = \dfrac{h\nu}{c}$

波の式 $v = f\lambda$ （$c = \nu\lambda$）から、さらに発展させて、$p = \dfrac{E}{c} = \dfrac{h\nu}{c} = \dfrac{h}{\lambda}$

↓

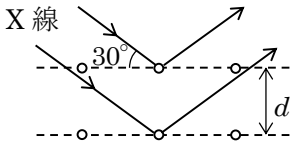
$p = \dfrac{h}{\lambda}$ を変形して、$\lambda = \dfrac{h}{p}$ → 粒子の運動量は mv なので、$\lambda = \dfrac{h}{mv}$

$E = h\nu$ から λ の式を書き出す練習は、何回もやっておこう。

ブラッグ反射で X 線を入射させたように、電子を結晶にぶつけると、この式で求められる λ に従い、干渉が起きたのだ。粒子も波動として振る舞うことがわかった。

問題 8　ブラッグ反射と物質波（ド・ブロイ波）

波長 5.0×10^{-9} m の X 線を結晶面に対して 30° の角度で当てたら、1 次 (n=1) の反射 X 線が強めあった。プランク定数を h とする。



(1) 結晶面の間隔 d は何 m か。

真空中に置いた質量 m、電荷 $-e$、初速度 0 の電子を、加速電圧 V で加速させた。

(2) このとき電子がもつ運動量 p はいくらか。

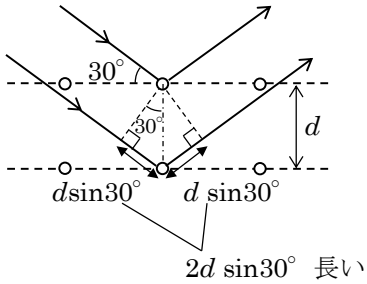
(3) このとき電子の物質波(電子波)の波長 λ はいくらか。

(4) この電子を間隔が d の結晶面に 30° の角度で当てる。加速電圧を 0 から少しずつ大きくしていったとき、反射電子線の強度が初めて極大となるのは、加速電圧がいくらのときか。

問題８解答 (1) 5.0×10^{-9} m　(2) $\sqrt{2emV}$　(3)$\lambda=\dfrac{h}{\sqrt{2emV}}$　(4) $V=\dfrac{h^2}{2emd^2}$

問題８解説

(1) 右図のように作図でき、経路差が $2d\sin30^\circ$ とわかる。



強め合う条件式を立てると、

$$2d\sin30^\circ = \frac{\lambda}{2}\times 2n \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

波長 λ が 5.0×10^{-9} m、$\theta=30^\circ$ で１次($n=1$)の強め合いであることから、

$$2d\sin30^\circ = \frac{5.0\times10^{-9}}{2}\times 2$$

d について解いて

$$d=5.0\times10^{-9}\ \text{m}$$

(2) 加速電圧によってされる仕事は、公式 $W=qV$ より

$$W=eV$$

運動エネルギーと仕事の関係より、

（前運エネ）＋（仕事）＝（後運エネ）

$$0 + eV = \frac{1}{2}mv^2$$

v について解いて

$$v=\sqrt{\frac{2eV}{m}}\ \text{〔m/s〕}$$

運動量 $p=mv$ なので、

$$p=m\times\sqrt{\frac{2eV}{m}}=\sqrt{2emV}$$

(3) ドブロイ波の公式　$\lambda=\dfrac{h}{p}=\dfrac{h}{mv}$　に前問(2)の結果を代入して

$$\lambda=\frac{h}{\sqrt{2emV}}$$

(4)　干渉の条件式は、前問(1)と同様に、$2d\sin\theta=\dfrac{\lambda}{2}\times 2n$　($n=0,1,2,\cdots$)である。波長 λ をドブロイ波の形にすると、以下のように書き直せる。

$$2d\sin\theta=\frac{\frac{h}{\sqrt{2emV}}}{2}\times 2n$$

$\theta=30^\circ$、$n=1$ を代入し、V について解くと、

$$d=\frac{h}{\sqrt{2emV}}$$

$$V=\frac{h^2}{2emd^2}$$

テーマ９　コンプトン効果

X 線(光)を電子にぶつけると、あたかも粒子同士の衝突のように振る舞う、というのがコンプトン効果である。(X 線の粒子性の観察)

《準備》光子の運動量の公式

準備として、以下の公式を暗記しておこう

光子の持つ運動量　$p = \dfrac{h}{\lambda}$

これは

テーマ８で示した、ドブロイ波の波長を導く流れの中でもでてくる式である。重要なので、再度示す。

光子の持つエネルギー $E = h\nu$　← これはすでに暗記している式

↓

エネルギーの次元は(質量)×(速度)^2 、速度で割れば運動量の次元(質量)×(速度)になる

↓

よって、光子の持つ運動量 p は $p = \dfrac{E}{c} = \dfrac{h\nu}{c}$

波の式 $v = f\lambda$ （$c = \nu\lambda$）から、さらに発展させて、$p = \dfrac{E}{c} = \dfrac{h\nu}{c} = \dfrac{h}{\lambda}$

↑今回使用する式はコレ

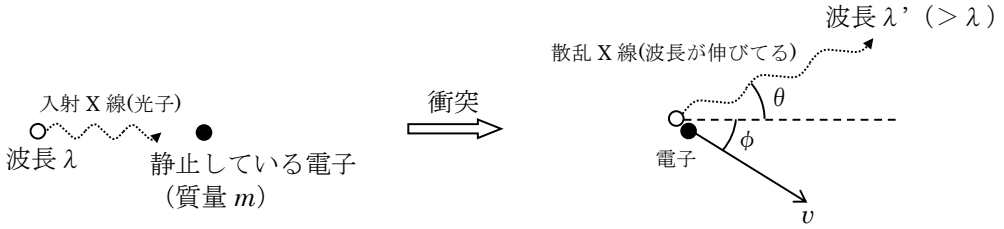
↓

ドブロイ波の公式を導く際はさらにここから変形

$p = \dfrac{h}{\lambda}$ を変形して、$\lambda = \dfrac{h}{p}$ → 粒子の運動量は mv なので、$\lambda = \dfrac{h}{mv}$

《モデル》コンプトン効果　(X 線の粒子性の観察)

電子に X 線を当てると、X 線の波長が長くなり、かつ電子も速度を得る。このことは、2 次元の弾性衝突をしたときと同じ関係式を立式することで説明ができる。



X 線に注目したとき、波長が伸びる変化が起きている。これは振動数 ν が小さくなっていることを示し、エネルギー $E = h\nu$ や、運動量 $p = \dfrac{E}{c} = \dfrac{h\nu}{c} = \dfrac{h}{\lambda}$ が小さくなっていることを示している。電子に分け与えているのだ。

問題 9　コンプトン効果での保存則

X 線を静止電子に衝突させたところ、前ページの図のような散乱を起こした。図中の記号を用いて、以下の問いに答えよ。ただし、光速を c、プランク定数を h とする。

(1) この現象を、光子と電子の衝突と考える。これが弾性衝突であったら、エネルギーが保存するといえるが、その際のエネルギー保存則を立式せよ。

(2) X 線の入射方向(x 方向)と、これに垂直な方向(y 方向)での運動量保存則をそれぞれ立式せよ。

(3) 前問(2)の結果より、ϕ を消去して、$(mv)^2$ を求めよ。ただし、$\Delta\lambda=\lambda'-\lambda$ が、λ や λ' と比べて、十分に小さいとし、$\frac{\lambda'}{\lambda}+\frac{\lambda}{\lambda'} \fallingdotseq 2$ の近似式を用いてもよい。

(4) 前問(1) (3)の結果を利用して、X 線の波長の変化 $\lambda'-\lambda$ を m、c、h、θ を用いてあらわせ。

問題 9 解答　(1) $h\frac{c}{\lambda}=h\frac{c}{\lambda'}+\frac{1}{2}mv^2$

(2) x 方向：$\frac{h}{\lambda}=\frac{h}{\lambda'}\cos\theta+mv\cos\phi$　　y 方向：$0=\frac{h}{\lambda'}\sin\theta-mv\sin\phi$

(3) $(mv)^2=\frac{2h^2}{\lambda\lambda'}(1-\cos\theta)$　(4) $\lambda'-\lambda=\frac{h}{mc}(1-\cos\theta)$

問題 9 解説

(1) 光子のエネルギーの公式 $E=h\nu$ と運動エネルギーの公式 $\frac{1}{2}mv^2$ を用いて立式する。

$E=h\nu$ の式を、波の式 $c=\nu\lambda$（$v=f\lambda$）を用いて変形すると、$E=h\frac{c}{\lambda}$ であるので、

前光子エネ　＋　前電子エネ　＝　後光子エネ　＋　後電子エネ

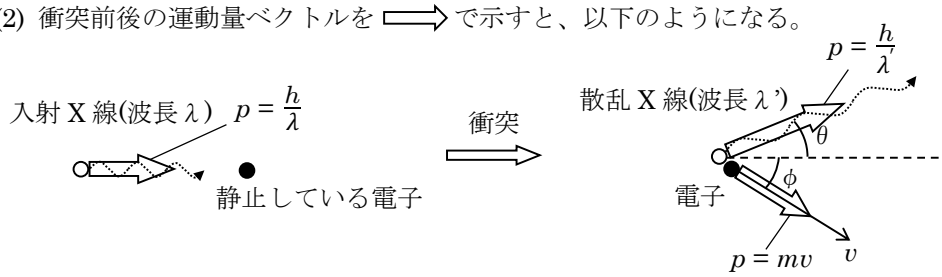
$$h\frac{c}{\lambda} \quad + \quad 0 \quad = \quad h\frac{c}{\lambda'} \quad + \quad \frac{1}{2}mv^2$$

整理して、

$h\frac{c}{\lambda}=h\frac{c}{\lambda'}+\frac{1}{2}mv^2$　・・・(1)の解答　①式とする。

問題 9 解説続き

(2) 衝突前後の運動量ベクトルを ⟹ で示すと、以下のようになる。



各方向に分けて運動量保存の式を立てると、

x 方向

前光子運動量	＋	前電子運動量	＝	後光子運動量	＋	後電子運動量
$\frac{h}{\lambda}$	+	0	=	$\frac{h}{\lambda'}\cos\theta$	+	$mv\cos\phi$

整理して

$$\frac{h}{\lambda} = \frac{h}{\lambda'}\cos\theta + mv\cos\phi$$ ・・・(2)の解答　②式とする

y 方向

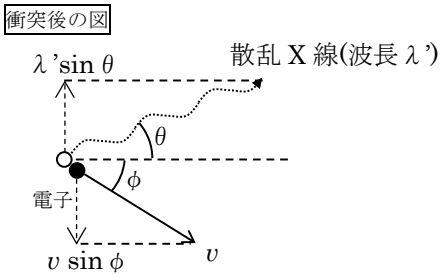
前光子運動量	＋	前電子運動量	＝	後光子運動量	＋	後電子運動量
0	+	0	=	$\frac{h}{\lambda'}\sin\theta$	−	$mv\sin\phi$

整理して

$$0 = \frac{h}{\lambda'}\sin\theta - mv\sin\phi$$ ・・・(2)の解答　③式とする

間違えやすいポイント

ここで、下記のように間違える生徒が非常に多い！！



y 方向の運動量保存を立てるときに、先に λ と v を y 方向に分解して、後の運動量を

$$\frac{h}{\lambda'\sin\theta} - mv\sin\phi$$

と計算してしまう間違いだ。正解は、

$$\frac{h}{\lambda'}\sin\theta - mv\sin\phi$$

である。何が違うのだろうか。

大切なのは、v はベクトルだが、λ はベクトルではない、ということだ。

v はベクトルなので分解可能、先に分解しても正しい結果になる。

λ はベクトルではないので分解は不可、先に分解すると誤った結果になる。

運動量はベクトルなので、光子の運動量である $\frac{h}{\lambda'}$ なら分解ができるようになるのだ。

コンプトン効果の計算では、**先に運動量ベクトルにすること**、を肝に銘じておこう。

問題９解説続き

(3) 角度ϕを消去するために、三角関数の公式 $\sin^2\phi+\cos^2\phi=1$ を利用する。

②式　$\frac{h}{\lambda}=\frac{h}{\lambda'}\cos\theta+mv\cos\phi$　を変形して　$\cos\phi=\frac{h}{mv}\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda'}\cos\theta\right)$

③式　$0=\frac{h}{\lambda'}\sin\theta-mv\sin\phi$　を変形して　$\sin\phi=\frac{h}{mv\lambda'}\sin\theta$

三角関数の公式 $\sin^2\phi+\cos^2\phi=1$ にこれらを代入する。

$$\left\{\left(\frac{h}{mv\lambda'}\sin\theta\right)^2\right\}+\left\{\frac{h}{mv}\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda'}\cos\theta\right)\right\}^2=1$$

これでϕを消すことができた。$(mv)^2$を作るように変形していくと

$$\frac{h^2}{(mv)^2\lambda'^2}\sin^2\theta+\frac{h^2}{(mv)^2}\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda'}\cos\theta\right)^2=1$$

$(mv)^2$を移項

$$(mv)^2=\frac{h^2}{\lambda'^2}\sin^2\theta+h^2\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda'}\cos\theta\right)^2$$

2乗を処理

$$(mv)^2=\frac{h^2}{\lambda'^2}\sin^2\theta+h^2\left(\frac{1}{\lambda^2}-\frac{2}{\lambda\lambda'}\cos\theta+\frac{1}{\lambda'^2}\cos^2\theta\right)$$

h^2でくくる

$$(mv)^2=h^2\left(\frac{1}{\lambda'^2}\sin^2\theta+\frac{1}{\lambda^2}-\frac{2}{\lambda\lambda'}\cos\theta+\frac{1}{\lambda'^2}\cos^2\theta\right)$$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ を適用

$$(mv)^2=h^2\left(\frac{1}{\lambda^2}-\frac{2}{\lambda\lambda'}\cos\theta+\frac{1}{\lambda'^2}\right)$$

$\frac{1}{\lambda\lambda'}$でくくると$\frac{\lambda'}{\lambda}+\frac{\lambda}{\lambda'}\fallingdotseq 2$ の近似式が作れる

$$(mv)^2=\frac{h^2}{\lambda\lambda'}\left(\frac{\lambda'}{\lambda}-2\cos\theta+\frac{\lambda}{\lambda'}\right)$$

$\frac{\lambda'}{\lambda}+\frac{\lambda}{\lambda'}\fallingdotseq 2$ の近似式を適用

$$(mv)^2=\frac{h^2}{\lambda\lambda'}(2-2\cos\theta)$$

2でくくる

$$(mv)^2=\frac{2h^2}{\lambda\lambda'}(1-\cos\theta)$$

(4) ①式 $h\frac{c}{\lambda}=h\frac{c}{\lambda'}+\frac{1}{2}mv^2$ からvを消去するため、$(mv)^2=\frac{2h^2}{\lambda\lambda'}(1-\cos\theta)$を変形。

$mv^2=\frac{2h^2}{m\lambda\lambda'}(1-\cos\theta)$　として、①式に代入

$$h\frac{c}{\lambda}=h\frac{c}{\lambda'}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2h^2}{m\lambda\lambda'}(1-\cos\theta)$$

全体に$\lambda\lambda'$をかける

$$\lambda' hc=\lambda hc+\frac{h^2}{m}(1-\cos\theta)$$

$\lambda'-\lambda$を作れるように移項

$$\lambda' hc-\lambda hc=\frac{h^2}{m}(1-\cos\theta)$$

$$\lambda'-\lambda=\frac{h}{mc}(1-\cos\theta)$$

この実験で波長の変化$\lambda'-\lambda$と散乱角度θを測定したところ、この式の通りになり、X線が粒子として振る舞っていることがが証明できたのだ。

（vやϕは測定が困難なため式に入らないように消去するのだ。）

ブラッグ反射とコンプトン効果により、X線に波動性と粒子性の両方の性質を持つことがわかったのである。それぞれの実験の歴史的意義とともに覚えておこう。