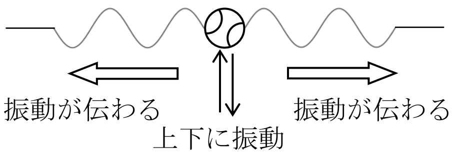
§ 波動　波の式

テーマ１　（復習）$y-x$ グラフと $y-t$ グラフ

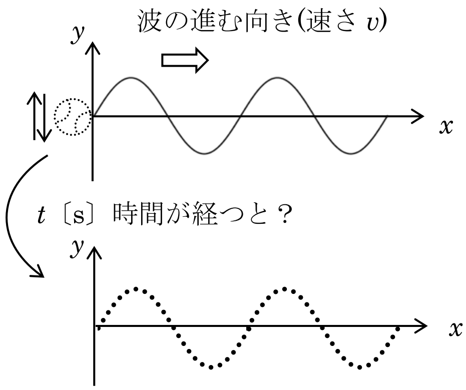
波のグラフには $y-x$ グラフと $y-t$ グラフの 2 種類がある。それぞれ示しているものが違う。しっかりと区別しよう。

モデル　水面上でのボールの振動が水に伝わる。



たとえば水面の上にボールを浮かばせ、上下に揺らす(振動させる)と、水面はゆらゆらする。ボールの上下の振動が水面に広がっていっているのだ。このような振動の伝わりの事を波という。

$y-x$ グラフ・・・波の波形を示す。（波の写真を撮っている）

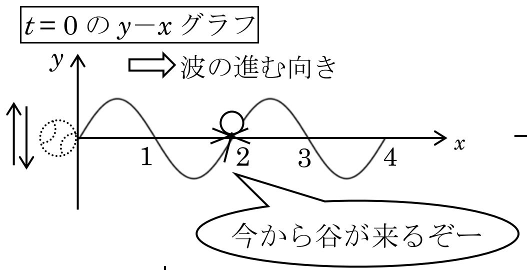


実際にできている波の写真を撮っているのが $y-x$ グラフ
（谷から谷は波長 λ を示す）

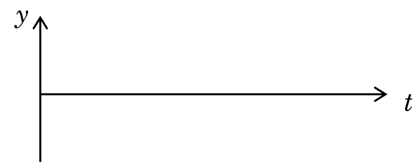
時間の指定が必ず必要!!

波は vt〔m〕進む

$y-t$ グラフ・・・媒質の動きを示す。(浮かべた人形の動きを示す。)



$x = 2$ の媒質の動きをグラフにすると？



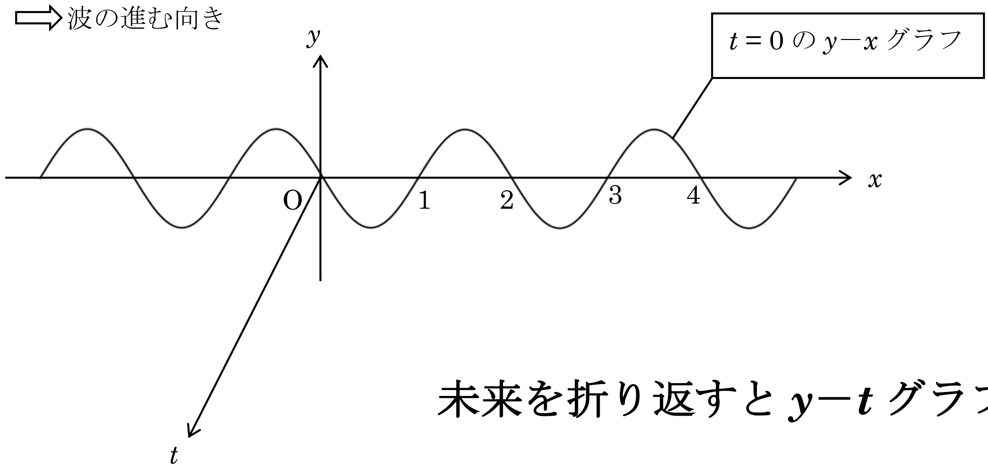
$x = 1.5$ の媒質の動きをグラフにすると？

人形の動きを示しているのが $y-t$ グラフ
（谷から谷は周期 T を示す）

x 座標の指定が必ず必要!!

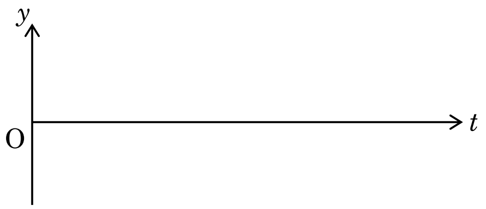
テーマ 2　（復習）yーxーt 立体グラフ

波のグラフ 2 種類を別々の場所に書くと、2 つのグラフの関連性が見えてこない。そこで習得してもらいたいのが、『yーxーt 立体グラフ』である。



未来を折り返すと yーt グラフ!!

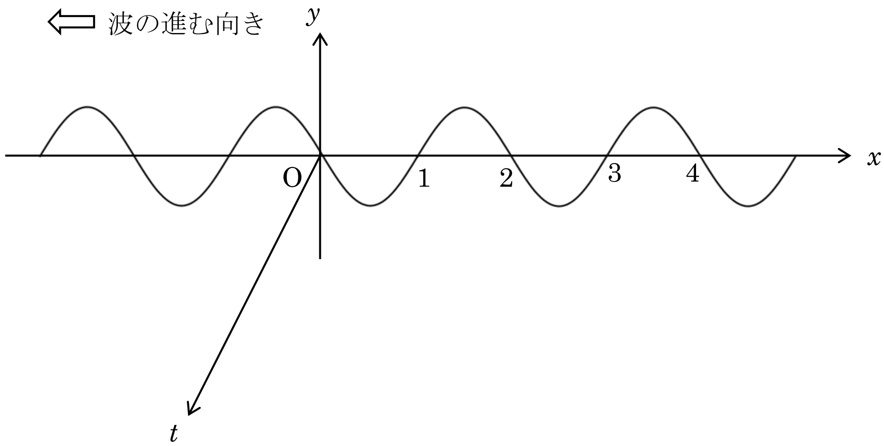
$x=0$ の yーt グラフは



となる。

＊ 上の yーxーt 立体グラフに、x = 3.2 ぐらいの位置での yーt グラフを書き込んでみよう。

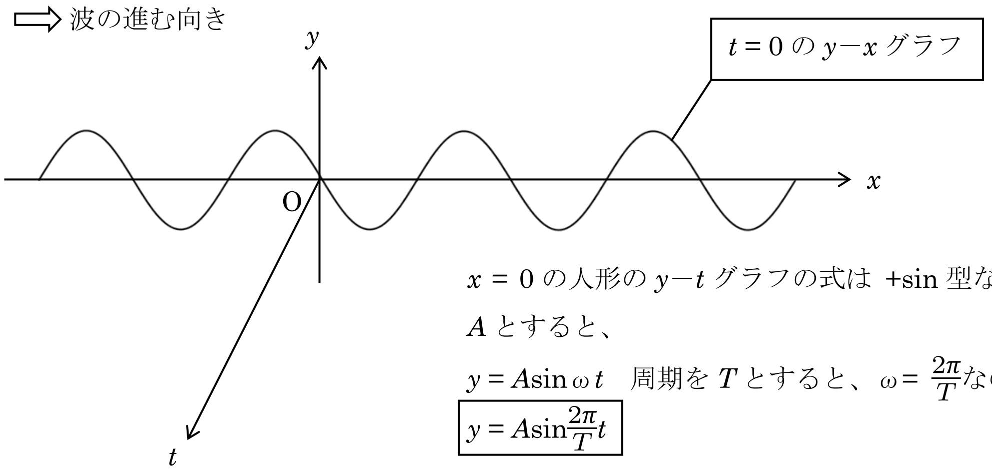
例題 以下の yーxーt 立体グラフの $x=2$ の位置での yーt グラフを書き込め。



テーマ 3　正弦波の式

いよいよ『正弦波の式』というテーマに入るが、これは『場所 x の人形の時刻 t における高さを一発の計算で出したい』という目的の式であると認識しよう。

STEP①　$x = 0$ の人形の y−t グラフの式を出す。



$x = 0$ の人形の y−t グラフの式は +sin 型なので振幅を A とすると、

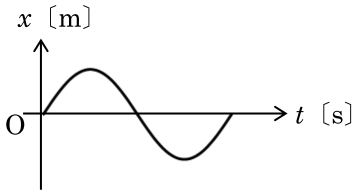
$y = A\sin\omega t$　周期を T とすると、$\omega = \frac{2\pi}{T}$なので、

$\boxed{y = A\sin\frac{2\pi}{T}t}$

＊三角関数の式頻出 4 パターン

単振動でも紹介されるが、入試に出る波の式の形は 90 パーセント以下の 4 つのどれか。

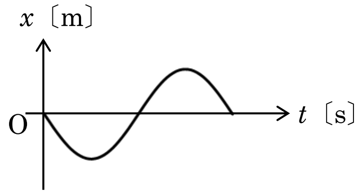
① ＋sin 型



原点スタートで最初に正に向かうパターン

グラフの式は $x = A\sin\omega t$ となる

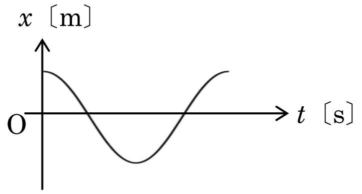
② −sin 型



原点スタートで最初に負に向かうパターン

このグラフの式は、$x = -A\sin\omega t$ となる。

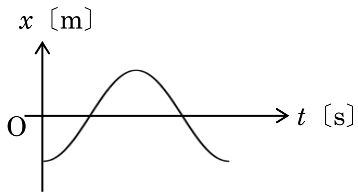
③ ＋cos 型



変位が正に最大の点から始まるパターン

グラフの式は $x = A\cos\omega t$　となる。

④ −cos 型

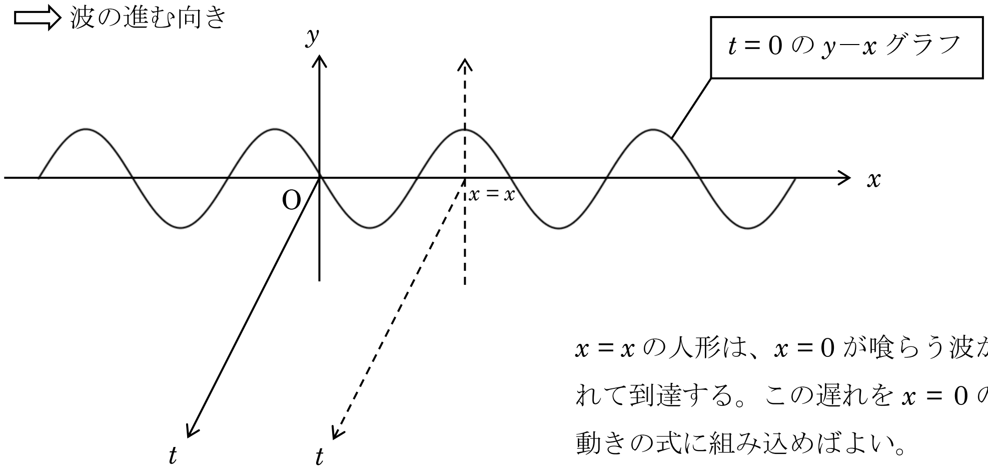


変位が負に最大の点から始まるパターン

グラフの式は $x = -A\cos\omega t$　となる。

STEP② 場所の違いによる時間のずれを式に組み込む。

場所 x における人形は $x=0$ の動きと時間がずれる。立体グラフを書いて考えてみよう。



$x=x$ の人形は、$x=0$ が喰らう波が少し遅れて到達する。この遅れを $x=0$ の人形の動きの式に組み込めばよい。

どれくらい遅れるかというと、距離が x 離れているので、波の速さを v とすると、

$t=\dfrac{x}{v}$〔s〕だけ遅れる。これを $x=0$ の人形の動きの式 $y=A\sin\dfrac{2\pi}{T}t$ に組み込むと、

$\boxed{y=A\sin\dfrac{2\pi}{T}(t-\dfrac{x}{v})}$ となる。遅れているので時刻 t からマイナスする!!これで波の式は完成。

座標 x における人形の時刻 t のときの高さを知りたければ、この式にそれぞれ値を代入すればいいのだ。変数が 2 つある関数であるので $y_{(x,t)}=A\sin\dfrac{2\pi}{T}(t-\dfrac{x}{v})$ と書いたりもする。

遅れているので時刻からマイナスする、についての補足

$y_{(x=0,t)}=A\sin\dfrac{2\pi}{T}t$ ⇒ $t=0$ で受ける波は $y_{(x=0,t=0)}=A\sin(\dfrac{2\pi}{T}\cdot 0)=0$

$y_{(x=x,t)}=A\sin\dfrac{2\pi}{T}(t-\dfrac{x}{v})$ ⇒ $t=\dfrac{x}{v}$ で受ける波は $y_{(x=x,t=\frac{x}{v})}=A\sin\dfrac{2\pi}{T}(\dfrac{x}{v}-\dfrac{x}{v})=0$

$x=0$ の人形と $x=x$ の人形が受ける波の t の関数を並べるとこうなる。

$x=0$ の人形が $t=0$ のときに受ける波と $x=x$ の人形が $t=\dfrac{x}{v}$ のときに受ける波が一致していることを確かめられる

こういった辻褄合わせで，遅れて受けるときは，t から時間差分を引き算するのだ.

逆に $x=0$ よりも早く波を受ける場合は、$y_{(x=x,t)}=A\sin\dfrac{2\pi}{T}(t+\dfrac{x}{v})$となる。

$\boxed{\text{STEP③}}$ 波の式の変形

STEP②の形を、以下のように変形するときがある。

$y_{(x\,,\,t)} = A\sin\frac{2\pi}{T}(t - \frac{x}{v})$

T を中に入れて

$y_{(x\,,\,t)} = A\sin 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{Tv})$

波の式 $v = f\lambda$ に $f = \frac{1}{T}$ を代入して $v = \frac{\lambda}{T}$

さらに変形して $Tv = \lambda$　　これを代入して

$y_{(x\,,\,t)} = A\sin 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda})$

ここまで変形できるようになっておきましょう。

波の式の作り方まとめ

① $x = 0$ の媒質の動きの式を求める。($y_{(x=0\,,\,t)}$ の式を作る。$x = 0$ の y―t グラフを作る。)

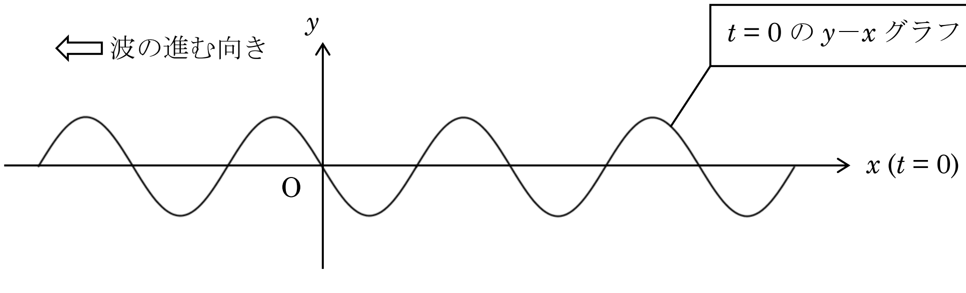
② 正の向きに進む波(進行波)　⇒　t を$(t - \frac{x}{v})$ にする。遅れているのでマイナス。

負の向きに進む波(後退波)　⇒　t を$(t + \frac{x}{v})$ にする。早まっているのでプラス。

③ T を(　)の中に入れて $v = f\lambda$ を用いて変形する。

$\boxed{\text{問題 1}}$ 波の式

以下の波形の波の式 $y_{(x\,,\,t)}$を示せ。ただし、波の周期を T、波長を λ、振幅を A とする。



$\boxed{\text{問題 2}}$ 波の式の読み取り

位置 x〔m〕の変位 y〔m〕の関係が次の形で示される波がある。

$y(x\,,\,t) = 3\sin 20\pi(t - 0.01x)$

t は時刻で、単位は秒であるとして、次の各値を求めよ。

(1) 振幅 A〔m〕 (2) 周期 T〔s〕 (3) 振動数 f〔Hz〕 (4) 速さ v〔m/s〕 (5) 波長 λ〔m〕

$\boxed{\text{問題１解答}}$ $y_{(x,t)} = -A\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right)$

$\boxed{\text{問題１解説}}$ 波の進む向きが負の向きであることに気を付ける。

<u>STEP①</u> $x = 0$ での $y - t$ グラフを考える

y 軸より右側にある波が $x = 0$ の人形に襲いかかるので、$x = 0$ での $y - t$ グラフは $\boxed{-\sin\text{型}}$のグラフとわかる。

$$y_{(x=0,t)} = -A\sin\omega t = -A\sin\frac{2\pi}{T}t$$

<u>STEP②</u> 場所の違いによる時間のずれを式に組み込む

$x = x$ の人形は、$x = 0$ の人形より、$t = \frac{x}{v}$〔s〕だけ早く波に襲われている。よって、

$$y_{(x,t)} = -A\sin\frac{2\pi}{T}\left(t + \frac{x}{v}\right)$$

<u>STEP③</u> v ではなく、λ を使用した形に直す

$$y_{(x,t)} = -A\sin\frac{2\pi}{T}\left(t + \frac{x}{v}\right)$$

$$\Rightarrow y_{(x,t)} = -A\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{Tv}\right)$$

$$\Rightarrow y_{(x,t)} = -A\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right)$$

$\boxed{\text{問題２解答}}$ (1) 3.0 m　(2) 0.10 s　(3) 10 Hz　(4) 100 m/s　(5) 10 m

$\boxed{\text{問題２解説}}$ まずは、問題文の波の式が $y = A\sin\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{v}\right)$ という形で書いてあるのか、

$y = A\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$ という形で書いてあるのか、を見極める。

今回は、π の係数が 2 ではないこと、式の（　　）内の左側が、『t』ということ、から

$y = A\sin\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{v}\right)$ の形の式であることがわかる。この式と問題文の式を比べるといい。

$$y = \boxed{3}\sin\boxed{20\pi}\left(t - \boxed{0.01}x\right)$$

$$y = \boxed{A}\sin\boxed{\frac{2\pi}{T}}\left(t - \frac{x}{\boxed{v}}\right)$$

$A = 3.0$ 、 $20\pi = \frac{2\pi}{T}$ 、 $0.01 = \frac{1}{v}$ と立式できる。

これらの式より (1) $A = 3.0$ m　(2) $T = 0.10$ s　(4) $v = 100$ m/s

$f = \frac{1}{T}$ より (3) $f = \frac{1}{0.1} = 10$ Hz

$v = f\lambda$ より (5) $\lambda = \frac{v}{f} = \frac{100}{10} = 10$ m

Point

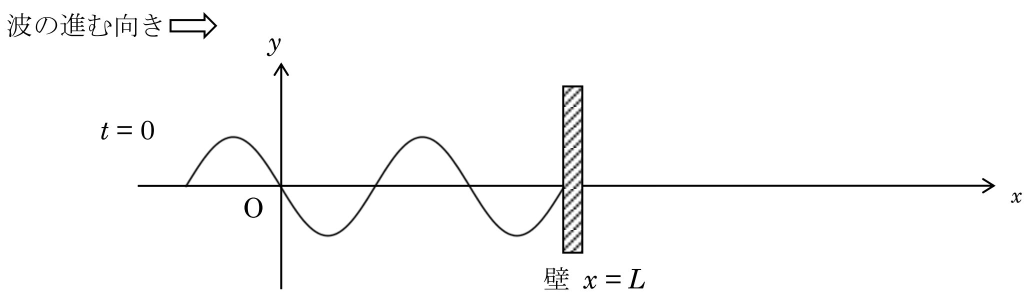
どちらの式で示されているかの見極めを!!

テーマ 4　反射波の波の式

最後に応用問題。『反射波の波の式』を考える。

反射には自由端、固定端がある。最初は自由端で考える。

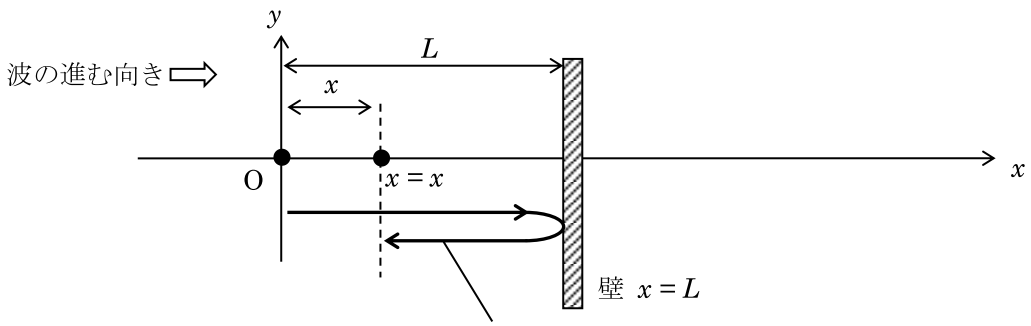
まずは反射波を書いてみよう。



反射波は透過波を書いた後、壁でひっくり返して作図ができる。

ここに注目!!

反射した波が座標 x の点に到達するとき、波は波源 O からどれだけ進んでるか考えてみよう



波の式を考えるときの手順で今回の波を考察すると、

① $x = 0$ の点の $y-t$ グラフは、$y = A\sin\frac{2\pi}{T}t$

② 反射波は、波源から $2L-x$ 離れているといえるので、$x = 0$ の点より $t = \frac{2L-x}{v}$ 遅れる。

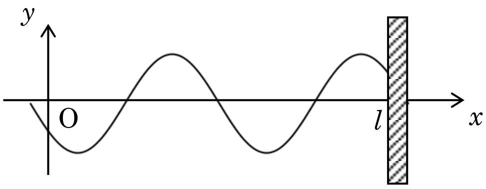
③ この遅れを考慮すると、$y = A\sin\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{2L-x}{v}\right)$　と波の式が完成する!!

＊ 反射波が後退波に見えるので、時間をプラスにするミスが多い。しかし、$x = 0$ より遅れている振動なので時間の補正はマイナスです。

固定端反射のときは、壁でひっくりかえすときに上下をひっくり返す動作が入るので、自由端反射の波の式と上下を逆にするために**−1 をかければよい**。$y = -A\sin\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{2L-x}{v}\right)$

問題３ 反射波の式

x 軸に沿って＋x 向きに伝わっている振幅 A、周期 T、波長 λ の正弦波が、$x = l$（> 0）に置かれた壁で反射する場合について考える。入射波の時刻 t における座標 x での変位 y は、



$$y = A\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

と表されるものとする。（図は適当な時刻での波の様子である。）

(1) 壁が自由端反射の場合について、反射波の時刻 t における座標 x での変位 y'を表す式を求めよ。

(2) 壁が自由端反射の場合について、入射波と反射波の重ね合わせで生じる定常波の腹の位置の x 座標を 0 以上の整数 m(m = 0、1、2、…)を用いて表せ。

(3) 壁が固定端反射の場合について、反射波の、時刻 t における座標 x での変位 y''を表す式を求めよ。

(4) 壁が固定端反射の場合について、入射波と反射波の重ね合わせで生じる定常波の腹の位置の x 座標を 0 以上の整数 m(m = 0、1、2、…)を用いて表せ。

問題３解答 (1) $y' = A\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{2l-x}{\lambda}\right)$ (2) $x = l - \frac{\lambda}{2}m$

(3) $y'' = -A\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{2l-x}{\lambda}\right)$ (4) $x = l - \frac{\lambda}{4} - \frac{\lambda}{2}m$ または $x = l - \frac{\lambda}{2}\left(m + \frac{1}{2}\right)$

問題３解説

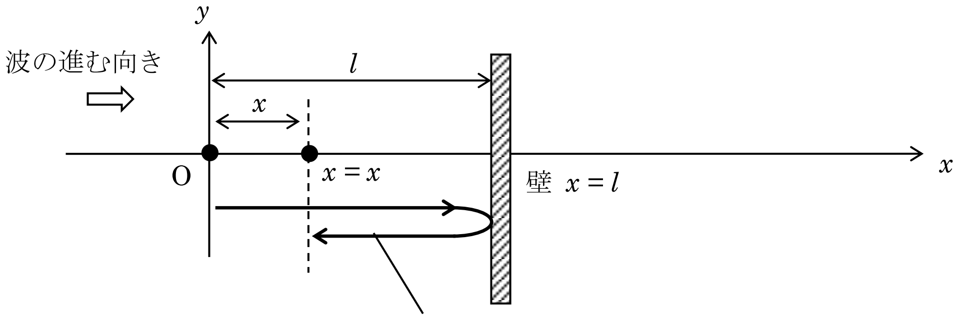
(1) 波の式を作るときは、ひとまず $x = 0$ での $y - t$ グラフの式、$y_{(x=0,\,t)}$を書き出すことを目指そう。

与えられた式 $y = A\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$の x に $x = 0$ を代入すれば、$y_{(x=0,\,t)}$の式になる。よって、

$$y_{(x=0,\,t)} = A\sin\frac{2\pi}{T}\,t$$

問題 3 解説 (1)続き

反射した波が座標 x の点に到達するとき、下図より、波は $2l-x$ だけ進んでいることがわかる。



反射波は $2l-x$ だけ進んで、座標 x に到着!!

座標 x での反射波は、$y_{(x=0,\,t)} = A\sin\frac{2\pi}{T}\,t$ よりも $\frac{2l-x}{v}$〔s〕だけ遅れているといえるので

y'は以下のようになる。

$$y' = A\sin\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{2l-x}{v}\right) = A\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{2l-x}{Tv}\right) = A\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{2l-x}{\lambda}\right)$$

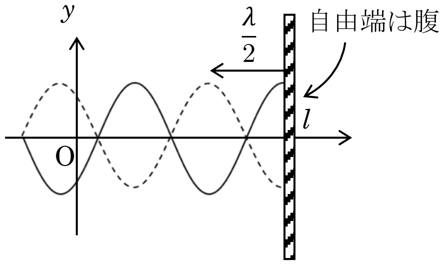
＊元の式の x に、$2l-x$ を代入して求めてもよい。

(2) 自由端での反射では、反射する点が腹となる。

また、腹から腹までの距離は$\frac{\lambda}{2}$であることから、

$x = l$ の点から負の向きに$\frac{\lambda}{2}$ごとに腹があることを示せばよく、

$$x = l - \frac{\lambda}{2}m \quad \text{となる。}$$



(3) 前問(1)と同様の手順で考える。固定端では、反射の際に上下を 1 回ひっくり返しているので、y 座標を逆転させるために－1 をかける。よって

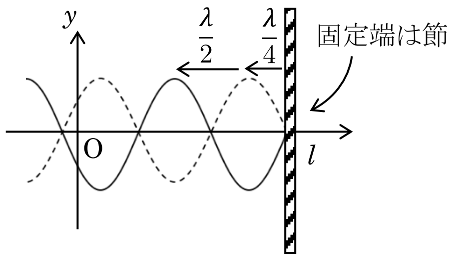
(1)の解答 $y' = A\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{2l-x}{\lambda}\right)$ $\xrightarrow{-1\text{をかける}}$ $y'' = -A\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{2l-x}{\lambda}\right)$

(4) 固定端での反射では、反射する点が節になる。

また、節から腹までの距離は$\frac{\lambda}{4}$であることから、

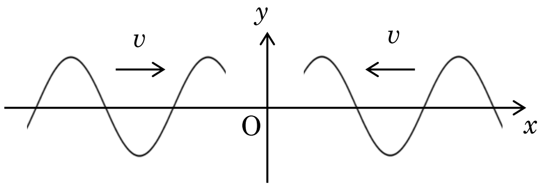
$x = l - \frac{\lambda}{4}$ の座標に腹があり、そこから$\frac{\lambda}{2}$ごとに腹がある。これを式で示すと、

$$x = l - \frac{\lambda}{4} - \frac{\lambda}{2}m \quad \left(= l - \frac{\lambda}{2}\left(m + \frac{1}{2}\right)\right)$$



問題 4[難] 合成波の式

x 軸に沿って速さ v で伝わる振幅 A、周期 T、波長 λ の正弦波による原点 O での変位 y が、時刻 t の関数として



$$y = A\sin\frac{2\pi}{T}\ t \quad \cdots \text{①}$$

と表されるとき、$+x$ 軸向きに伝わる波について、座標 x の位置での時刻 t の瞬間の変位 y_1 は、次のように表される。

$$y_1 = A\sin\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{v}\right) = A\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

(1) 原点での変位①で表される波が、$-x$ 向きに伝わるときについて、座標 x の位置での時刻 t の瞬間の変位 y_2 を表す式を、v を含まない形で表せ。

(2) x 軸上で y_1 と y_2 の重ね合わせが起こると定常波が生じる。$Y = y_1 + y_2$ として、Y を表す式を求めよ。必要ならば、$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ を用いて、t を含む部分と x を含む部分の積の形で表すこと。

(3) 前問(2)で考えた定常波における各位置での振幅は、x の関数として表される。このことを踏まえて、振幅の大きさが最大の位置(腹)の座標を、整数 m(m=0、±1、±2 ⋯)を用いて表せ。

$\boxed{\text{問題 4 解答}}$ (1) $y_2 = A\sin 2\pi(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda})$　(2) $Y = 2A\sin\frac{2\pi}{T}t \times \cos\frac{2\pi}{\lambda}x$　(3) $x = \frac{m\lambda}{2}$

$\boxed{\text{問題 4 解説}}$ 問題文の読み取りが難しいが、右に進む波と、左に進む波の 2 種類があり、どちらの波も、$x = 0$ では、$y = A\sin\frac{2\pi}{T}\,t$　の振動をしている、という風に読み取ろう。原点が波源となっているわけではないのだ。

(1) 負の向きに伝わる波において、座標 x の振動は、$x = 0$ の振動 $y = A\sin\frac{2\pi}{T}\,t$ に比べて、$\frac{x}{v}$〔s〕だけ早いタイミングであるといえる。これを式に組み込む。

$$y_2 = A\sin\frac{2\pi}{T}(t + \frac{x}{v}) = A\sin 2\pi(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda})$$

(2) 与えられた公式を用いて、y_1 と y_2 を合成する。$Y = y_1 + y_2$ という式を立てると

$$Y = A\sin\underbrace{2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda})}_{\alpha\text{とする}} + A\sin\underbrace{2\pi(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda})}_{\beta\text{とする}}$$

$$Y = A\sin\alpha + A\sin\beta$$

$$Y = 2A\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$Y = 2A\sin\frac{2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}) + 2\pi(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda})}{2}\cos\frac{2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) - 2\pi(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda})}{2}$$

$$Y = 2A\sin\frac{2\pi}{T}t \times \cos(-\frac{2\pi}{\lambda}x)$$

＊与えられた公式を使わずに、加法定理を用いて分離しても、同じ結果が得られる。

$$= 2A\sin\frac{2\pi}{T}t \times \cos\frac{2\pi}{\lambda}x$$

＊$\cos(-\theta) = \cos\theta$　を用いて最後に変形した。

(3) 前問(2)の解答を、任意の位置 x での媒質の動きを示す y–t グラフの式として見やすくすると、以下のようになる。

$$Y = 2A\sin\frac{2\pi}{T}t \times \cos\frac{2\pi}{\lambda}x$$

$$Y = \underbrace{2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x}_{\boxed{\text{ここが振幅}A}} \times \sin\frac{2\pi}{T}t$$

並び替えて、$y = A\sin\omega t$ の形にする

振幅 A が x の関数になっているのである。

合成波 Y が腹になる点は、この式の振幅 $2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x$ が最大となる x 座標なので、

$$\cos\frac{2\pi}{\lambda}x = \pm 1$$

となる点である。x について解いて、

$$\frac{2\pi}{\lambda}x = m\pi$$

$$x = \frac{m\lambda}{2}$$

＊定常波の波の式は、このように x と t が分離した形になる。