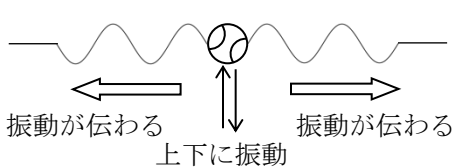


§ 波動 波の式

テーマ1 (復習) $y-x$ グラフと $y-t$ グラフ

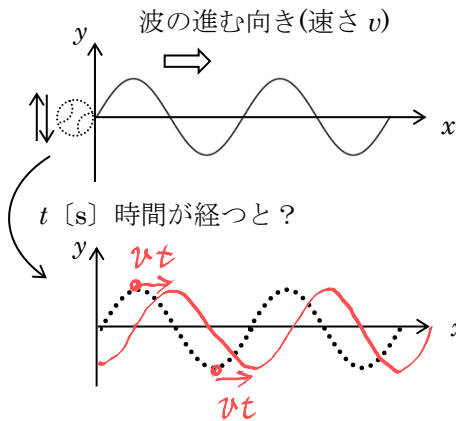
波のグラフには $y-x$ グラフと $y-t$ グラフの 2 種類がある。それぞれ示しているものが違う。しっかりと区別しよう。

モデル 水面上でのボールの振動が水に伝わる。



たとえば水面上にボールを浮かばせ、上下に揺らす(振動させる)と、水面はゆらゆらする。ボールの上下の振動が水面に広がっていつているのだ。このような振動の伝わりを波という。

$y-x$ グラフ・・・波の波形を示す。(波の写真を撮っている)

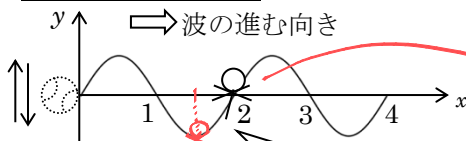


実際にできている波の写真を撮っているのが $y-x$ グラフ
(谷から谷は波長 λ を示す)

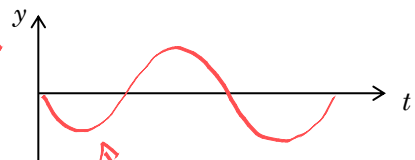
時間の指定が必ず必要!!

$y-t$ グラフ・・・媒質の動きを示す。(浮かべた人形の動きを示す。)

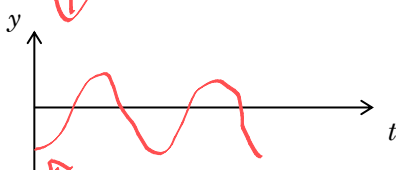
$t=0$ の $y-x$ グラフ



$x=2$ の媒質の動きをグラフにすると?



$x=1.5$ の媒質の動きをグラフにすると?

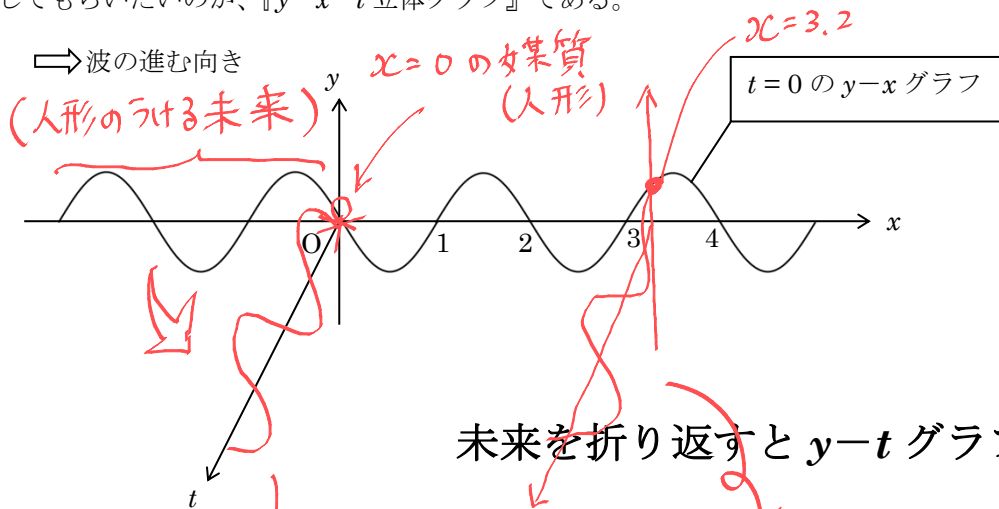


人形の動きを示しているのが $y-t$ グラフ
(谷から谷は周期 T を示す)

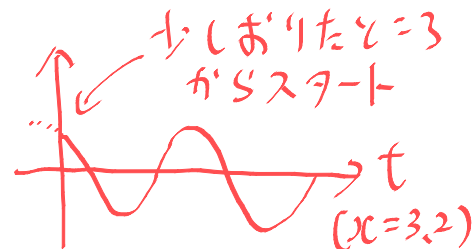
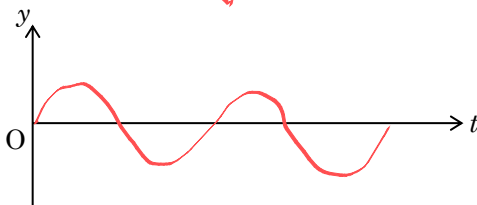
x 座標の指定が必ず必要!!

テーマ2 (復習) $y-x-t$ 立体グラフ

波のグラフ2種類を別々の場所を書くとき、2つのグラフの関連性が見えてこない。そこで習得してもらいたいのが、『 $y-x-t$ 立体グラフ』である。



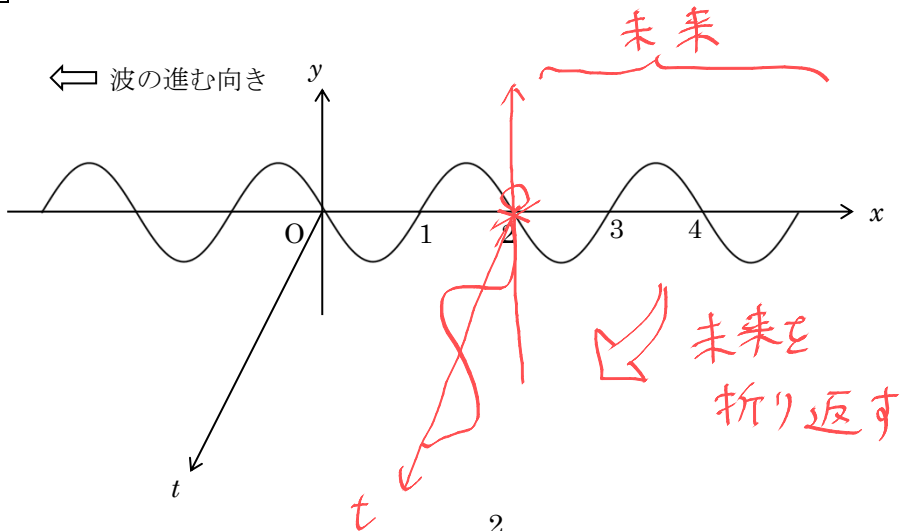
$x=0$ の $y-t$ グラフは



となる。

* 上の $y-x-t$ 立体グラフに、 $x=3.2$ ぐらいの位置での $y-t$ グラフを書き込んでみよう。

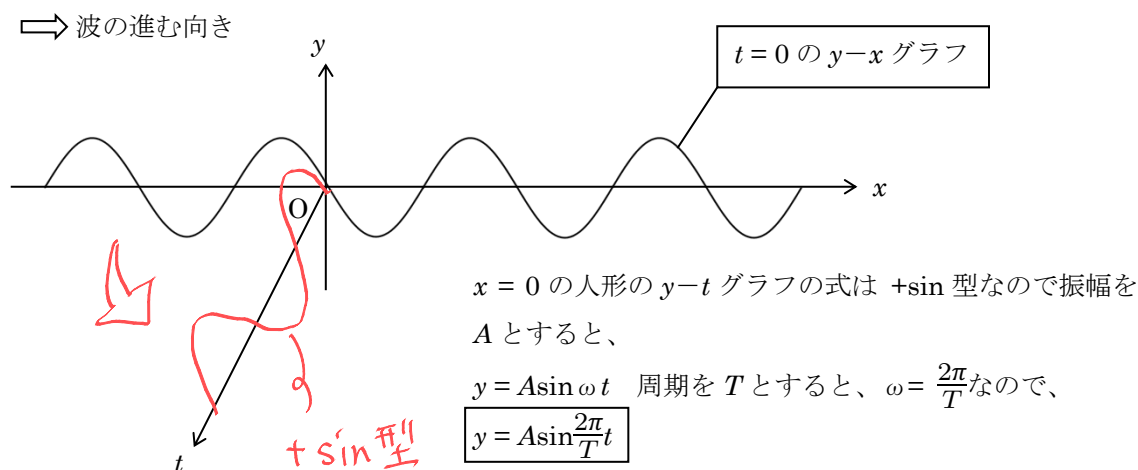
例題 以下の $y-x-t$ 立体グラフの $x=2$ の位置での $y-t$ グラフを書き込め。



テーマ3 正弦波の式

いよいよ『正弦波の式』というテーマに入るが、これは『場所 x の人形の時刻 t における高さを一発の計算で出したい』という目的の式であると認識しよう。

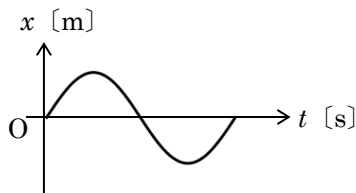
STEP① $x = 0$ の人形の $y-t$ グラフの式を出す。



* 三角関数の式頻出 4 パターン

単振動でも紹介されるが、入試に出る波の式の形は 90 パーセント以下の 4 つのどれか。

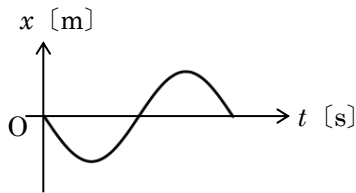
① $+\sin$ 型



原点スタートで最初に正に向かうパターン

グラフの式は $x = A \sin \omega t$ となる

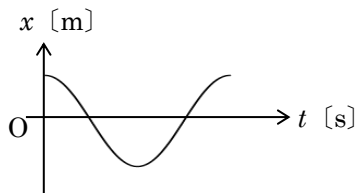
② $-\sin$ 型



原点スタートで最初に負に向かうパターン

このグラフの式は、 $x = -A \sin \omega t$ となる。

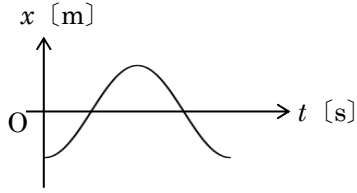
③ $+\cos$ 型



変位が正に最大の点から始まるパターン

グラフの式は $x = A \cos \omega t$ となる。

④ $-\cos$ 型

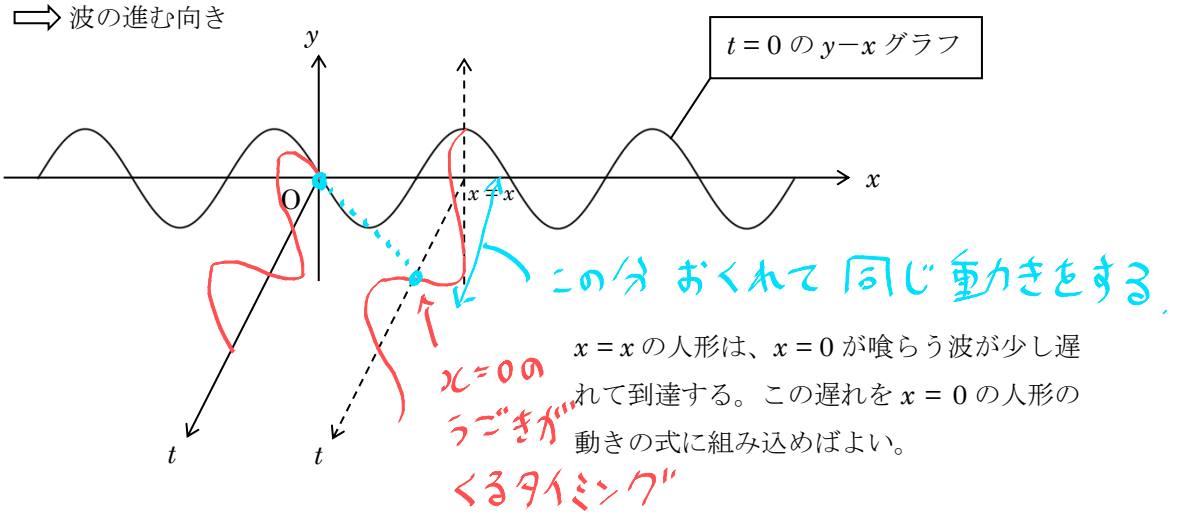


変位が負に最大の点から始まるパターン

グラフの式は $x = -A \cos \omega t$ となる。

STEP② 場所の違いによる時間のずれを式に組み込む。

場所 x における人形は $x=0$ の動きと時間がずれる。立体グラフを書いて考えてみよう。



どれくらい遅れるかという、距離が x 離れているので、波の速さを v とすると、

$t = \frac{x}{v}$ [s] だけ遅れる。これを $x=0$ の人形の動きの式 $y = A \sin \frac{2\pi}{T} t$ に組み込むと、

$y = A \sin \frac{2\pi}{T} (t - \frac{x}{v})$ となる。遅れているので時刻 t からマイナスする!!これで波の式は完成。

座標 x における人形の時刻 t のときの高さを知りたければ、この式にそれぞれ値を代入すればいいのだ。変数が2つある関数であるので $y(x, t) = A \sin \frac{2\pi}{T} (t - \frac{x}{v})$ と書いたりもする。

遅れているので時刻からマイナスする、についての補足

$$y(x=0, t) = A \sin \frac{2\pi}{T} t \quad \Rightarrow \quad t=0 \text{ で受ける波は } y(x=0, t=0) = A \sin \left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0 \right) = 0$$

$$y(x=x, t) = A \sin \frac{2\pi}{T} (t - \frac{x}{v}) \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{v} \text{ で受ける波は } y(x=x, t = \frac{x}{v}) = A \sin \frac{2\pi}{T} (\frac{x}{v} - \frac{x}{v}) = 0$$

$x=0$ の人形と $x=x$ の人形が受ける波の t の関数を並べるとこうなる。

$x=0$ の人形が $t=0$ のときに受ける波と $x=x$ の人形が $t = \frac{x}{v}$ のときに受ける波が一致していることを確かめられる

こういった辻褃合わせで、遅れて受けるときは、 t から時間差分を引き算するのだ。

逆に $x=0$ よりも早く波を受ける場合は、 $y(x=x, t) = A \sin \frac{2\pi}{T} (t + \frac{x}{v})$ となる。

↑ 早いときはプラス (問題1参照)

STEP③ 波の式の変形

STEP②の形を、以下のように変形するときがある。

$$y(x, t) = A \sin \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{v} \right)$$

$$y(x, t) = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{Tv} \right)$$

$$y(x, t) = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

T を中に入れて

波の式 $v = f\lambda$ に $f = \frac{1}{T}$ を代入して $v = \frac{\lambda}{T}$
さらに変形して $Tv = \lambda$ これを代入して

ここまで変形できるようになっておきましょう。

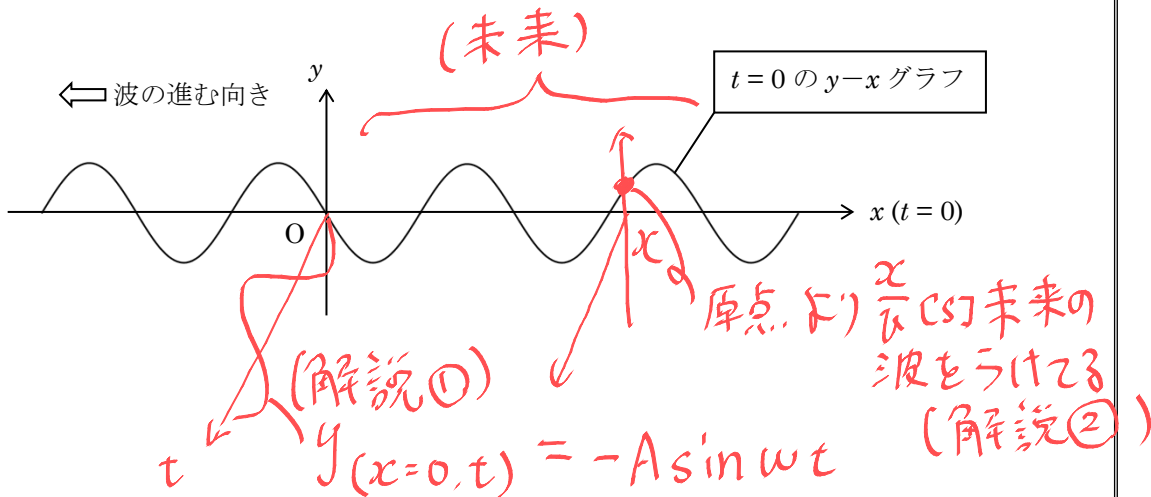
波の式の作りまとめ

- ① $x = 0$ の媒質の動きの式を求める。($y(x=0, t)$ の式を作る。 $x = 0$ の $y-t$ グラフを作る。)
- ② 正の向きに進む波(進行波) $\Rightarrow t$ を $(t - \frac{x}{v})$ にする。遅れているのでマイナス。
負の向きに進む波(後退波) $\Rightarrow t$ を $(t + \frac{x}{v})$ にする。早まっているのでプラス。
- ③ T を () の中に入れて $v = f\lambda$ を用いて変形する。

→ 問題1 参照

問題1 波の式

以下の波形の波の式 $y(x, t)$ を示せ。ただし、波の周期を T 、波長を λ 、振幅を A とする。



問題2 波の式の読み取り

位置 x [m] の変位 y [m] の関係が次の形で示される波がある。

$$y(x, t) = 3 \sin 20\pi (t - 0.01x)$$

t は時刻で、単位は秒であるとして、次の各値を求めよ。

- (1) 振幅 A [m] (2) 周期 T [s] (3) 振動数 f [Hz] (4) 速さ v [m/s] (5) 波長 λ [m]

問題 1 解答 $y(x, t) = -A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right)$

問題 1 解説 波の進む向きが負の向きであることに気を付ける。

STEP① $x=0$ での $y-t$ グラフを考える

y 軸より右側にある波が $x=0$ の人形に襲いかかるので、 $x=0$ での $y-t$ グラフは

-sin 型 のグラフとわかる。

$$y(x=0, t) = -A \sin \omega t = -A \sin \frac{2\pi}{T} t$$

STEP② 場所の違いによる時間のずれを式に組み込む

$x=x$ の人形は、 $x=0$ の人形より、 $t = \frac{x}{v}$ [s] だけ早く波に襲われている。よって、

$$y(x, t) = -A \sin \frac{2\pi}{T} \left(t + \frac{x}{v} \right)$$

← $\frac{x}{v}$ は t と同じ

STEP③ v ではなく、 λ を使用した形に直す

$$y(x, t) = -A \sin \frac{2\pi}{T} \left(t + \frac{x}{v} \right)$$

$$\Rightarrow y(x, t) = -A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{Tv} \right)$$

$$\Rightarrow y(x, t) = -A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right)$$

問題 2 解答 (1) 3.0 m (2) 0.10 s (3) 10 Hz (4) 100 m/s (5) 10 m

問題 2 解説 まずは、問題文の波の式が $y = A \sin \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{v} \right)$ という形で書いてあるのか、

$y = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$ という形で書いてあるのか、を見極める。

今回は、 π の係数が 2 ではないこと、式の () 内の左側が、『 t 』ということ、から

$y = A \sin \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{v} \right)$ の形の式であることがわかる。この式と問題文の式を比べるといい。

$$y = \boxed{3} \sin \boxed{20\pi} \left(t - \boxed{0.01} x \right)$$

$$y = \boxed{A} \sin \boxed{\frac{2\pi}{T}} \left(t - \frac{x}{\boxed{v}} \right) \quad A = 3.0, \quad 20\pi = \frac{2\pi}{T}, \quad 0.01 = \frac{1}{v} \quad \text{と立式できる。}$$

これらの式より (1) $A = 3.0$ m (2) $T = 0.10$ s (4) $v = 100$ m/s

$$f = \frac{1}{T} \text{より (3) } f = \frac{1}{0.1} = 10 \text{ Hz}$$

$$v = f\lambda \text{より (5) } \lambda = \frac{v}{f} = \frac{100}{10} = 10 \text{ m}$$

Point

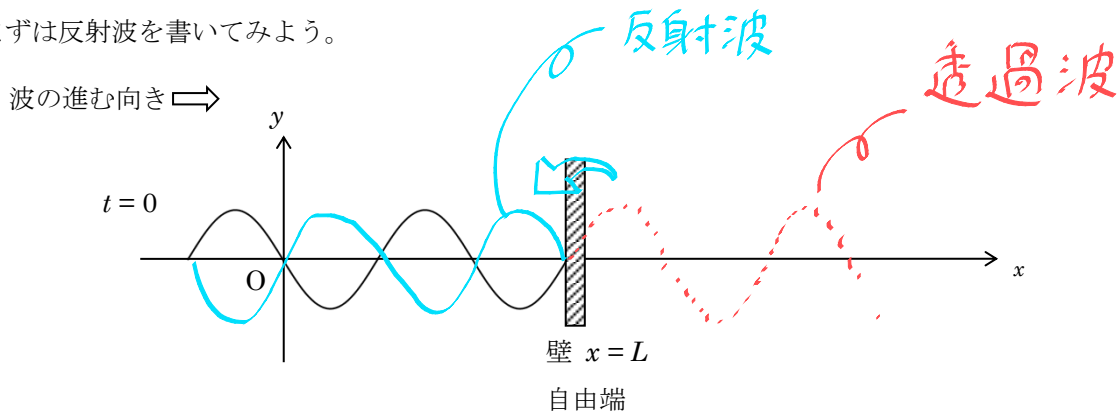
どちらの式で示されているかを見極めを!!

テーマ4 反射波の波の式

最後に応用問題。『反射波の波の式』を考える。

反射には自由端、固定端がある。最初は自由端で考える。

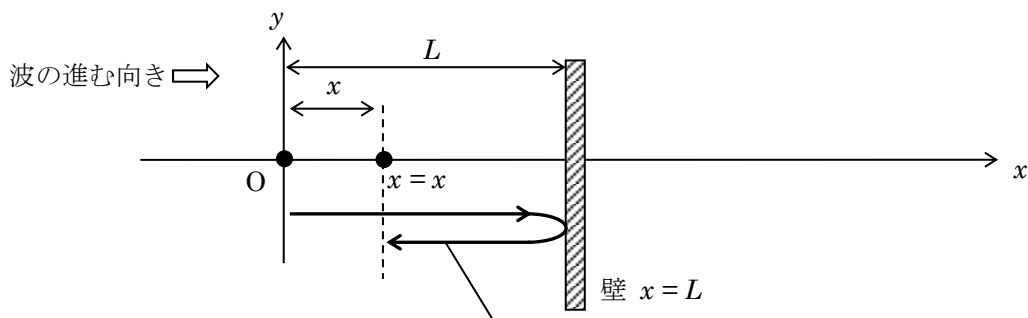
まずは反射波を書いてみよう。



反射波は透過波を書いた後、壁でひっくり返して作図ができる。

ここに注目!!

反射した波が座標 x の点に到達するとき、波は波源 O からどれだけ進んでるか考えてみよう



反射波は $2L-x$ だけ進んで、座標 x に到着!!

波の式を考えるときの手順で今回の波を考察すると、

- ① $x=0$ の点の $y-t$ グラフは、 $y = A\sin\frac{2\pi}{T}t$
- ② 反射波は、波源から $2L-x$ 離れているといえるので、 $x=0$ の点より $t = \frac{2L-x}{v}$ 遅れる。
- ③ この遅れを考慮すると、 $y = A\sin\frac{2\pi}{T}(t - \frac{2L-x}{v})$ と波の式が完成する!!

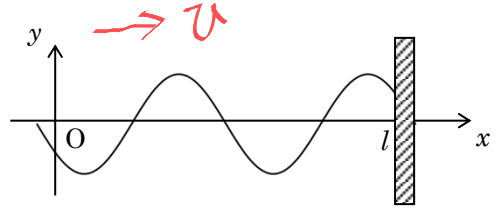
* 反射波が後退波に見えるので、時間をプラスにするミスが多い。しかし、 $x=0$ より遅れている振動なので時間の補正はマイナスです。

固定端反射のときは、壁でひっくりかえすときに上下をひっくり返す動作が入るので、自由

端反射の波の式と上下を逆にするために -1 をかければよい。 $y = -A\sin\frac{2\pi}{T}(t - \frac{2L-x}{v})$

問題 3 反射波の式

x 軸に沿って $+x$ 向きに伝わっている振幅 A 、周期 T 、波長 λ の正弦波が、 $x = l (> 0)$ に置かれた壁で反射する場合について考える。入射波の時刻 t における座標 x での変位 y は、



$$y = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

と表されるものとする。(図は適当な時刻での波の様子である。)

- (1) 壁が自由端反射の場合について、反射波の時刻 t における座標 x での変位 y' を表す式を求めよ。
- (2) 壁が自由端反射の場合について、入射波と反射波の重ね合わせで生じる定常波の腹の位置の x 座標を 0 以上の整数 $m (m = 0, 1, 2, \dots)$ を用いて表せ。
- (3) 壁が固定端反射の場合について、反射波の、時刻 t における座標 x での変位 y'' を表す式を求めよ。
- (4) 壁が固定端反射の場合について、入射波と反射波の重ね合わせで生じる定常波の腹の位置の x 座標を 0 以上の整数 $m (m = 0, 1, 2, \dots)$ を用いて表せ。

問題 3 解答 (1) $y' = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{2l-x}{\lambda} \right)$ (2) $x = l - \frac{\lambda}{2}m$

(3) $y'' = -A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{2l-x}{\lambda} \right)$ (4) $x = l - \frac{\lambda}{4} - \frac{\lambda}{2}m$ または $x = l - \frac{\lambda}{2} \left(m + \frac{1}{2} \right)$

問題 3 解説

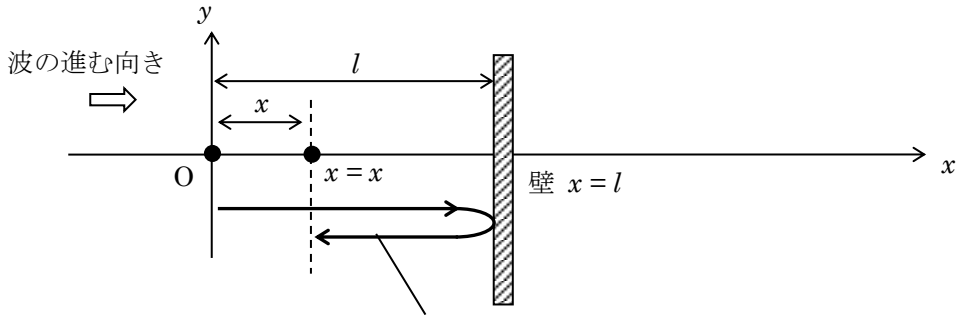
(1) 波の式を作るときは、ひとまず $x = 0$ での $y - t$ グラフの式、 $y_{(x=0, t)}$ を書き出すことを目指そう。

与えられた式 $y = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$ の x に $x = 0$ を代入すれば、 $y_{(x=0, t)}$ の式になる。よって、

$$y_{(x=0, t)} = A \sin \frac{2\pi}{T} t$$

問題3解説 (1)続き

反射した波が座標 x の点に到達するとき、下図より、波は $2l-x$ だけ進んでいることがわかる。



反射波は $2l-x$ だけ進んで、座標 x に到着!!

座標 x での反射波は、 $y_{(x=0,t)} = A \sin \frac{2\pi}{T} t$ よりも $\frac{2l-x}{v}$ [s] だけ遅れているといえるので

y' は以下のようなになる。

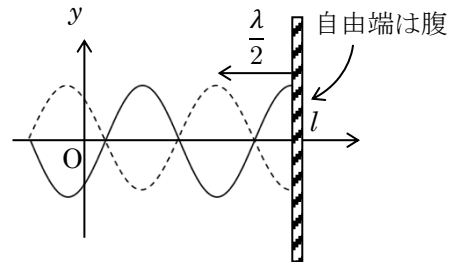
$$y' = A \sin \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{2l-x}{v} \right) = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{2l-x}{Tv} \right) = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{2l-x}{\lambda} \right)$$

*元の式の x に、 $2l-x$ を代入して求めてもよい。

(2) 自由端での反射では、反射する点が腹となる。

また、腹から腹までの距離は $\frac{\lambda}{2}$ であることから、 $x=l$ の点から負の向きに $\frac{\lambda}{2}$ ごとに腹があることを示せばよく、

$$x = l - \frac{\lambda}{2} m \quad \text{となる。}$$



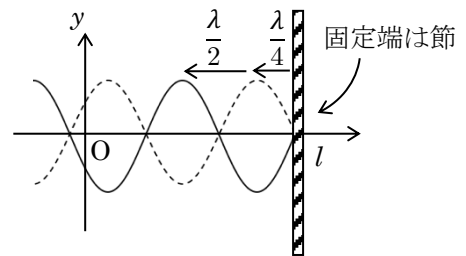
(3) 前問(1)と同様の手順で考える。固定端では、反射の際に上下を1回ひっくり返しているため、 y 座標を逆転させるために -1 をかける。よって

$$(1) \text{の解答 } y' = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{2l-x}{\lambda} \right) \quad \begin{array}{l} -1 \text{ をかける} \\ \Rightarrow \end{array} \quad y'' = -A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{2l-x}{\lambda} \right)$$

(4) 固定端での反射では、反射する点が節になる。

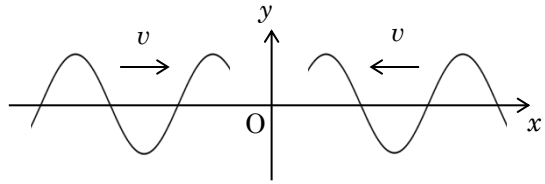
また、節から腹までの距離は $\frac{\lambda}{4}$ であることから、 $x = l - \frac{\lambda}{4}$ の座標に腹があり、そこから $\frac{\lambda}{2}$ ごとに腹がある。これを式で示すと、

$$x = l - \frac{\lambda}{4} - \frac{\lambda}{2} m \quad \left(= l - \frac{\lambda}{2} \left(m + \frac{1}{2} \right) \right)$$



問題 4 合成波の式

x 軸に沿って速さ v で伝わる振幅 A 、周期 T 、波長 λ の正弦波による原点 O での変位 y が、時刻 t の関数として



$$y = A \sin \frac{2\pi}{T} t \quad \cdots \textcircled{1}$$

と表されるとき、 $+x$ 軸向きに伝わる波について、座標 x の位置での時刻 t の瞬間の変位 y_1 は、次のように表される。

$$y_1 = A \sin \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{v} \right) = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

- (1) 原点での変位①で表される波が、 $-x$ 向きに伝わるときについて、座標 x の位置での時刻 t の瞬間の変位 y_2 を表す式を、 v を含まない形で表せ。
- (2) x 軸上で y_1 と y_2 の重ね合わせが起こると定常波が生じる。 $Y = y_1 + y_2$ として、 Y を表す式を求めよ。必要ならば、 $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ を用いて、 t を含む部分と x を含む部分の積の形で表すこと。
- (3) 前問(2)で考えた定常波における各位置での振幅は、 x の関数として表される。このことを踏まえて、振幅の大きさが最大の位置(腹)の座標を、整数 $m(m=0, \pm 1, \pm 2 \cdots)$ を用いて表せ。

問題 4 解答 (1) $y_2 = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right)$ (2) $Y = 2A \sin \frac{2\pi}{T} t \times \cos \frac{2\pi}{\lambda} x$ (3) $x = \frac{m\lambda}{2}$

問題 4 解説 問題文の読み取りが難しいが、右に進む波と、左に進む波の 2 種類があり、どちらの波も、 $x=0$ では、 $y = A \sin \frac{2\pi}{T} t$ の振動をしている、という風に読み取ろう。原点が波源となっているわけではないのだ。

(1) 負の向きに伝わる波において、座標 x の振動は、 $x=0$ の振動 $y = A \sin \frac{2\pi}{T} t$ に比べて、 $\frac{x}{v}$ [s] だけ早いタイミングであるといえる。これを式に組み込む。

$$y_2 = A \sin \frac{2\pi}{T} \left(t + \frac{x}{v} \right) = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right)$$

(2) 与えられた公式を用いて、 y_1 と y_2 を合成する。 $Y = y_1 + y_2$ という式を立てると

$$Y = A \sin 2\pi \underbrace{\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)}_{\alpha \text{ とする}} + A \sin 2\pi \underbrace{\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right)}_{\beta \text{ とする}}$$

$$Y = A \sin \alpha + A \sin \beta$$

$$Y = 2A \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$Y = 2A \sin \frac{2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) + 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right)}{2} \cos \frac{2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) - 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right)}{2}$$

$$Y = 2A \sin \frac{2\pi}{T} t \times \cos \left(-\frac{2\pi}{\lambda} x \right)$$

* 与えられた公式を使わずに、加法定理を用いて分離しても、同じ結果が得られる。

$$= 2A \sin \frac{2\pi}{T} t \times \cos \frac{2\pi}{\lambda} x$$

* $\cos(-\theta) = \cos \theta$ を用いて最後に変形した。

(3) 前問(2)の解答を、任意の位置 x での媒質の動きを示す $y-t$ グラフの式として見やすくすると、以下ようになる。

$$\begin{aligned} Y &= 2A \sin \frac{2\pi}{T} t \times \cos \frac{2\pi}{\lambda} x \\ Y &= 2A \cos \frac{2\pi}{\lambda} x \times \sin \frac{2\pi}{T} t \end{aligned} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{並び替えて、} y = A \sin \omega t \text{ の形にする}$$

ここが振幅 A 振幅 A が x の関数になっているのである。

合成波が腹になる点は、この式の振幅 $2A \cos \frac{2\pi}{\lambda} x$ が最大となる x 座標なので、

$$\cos \frac{2\pi}{\lambda} x = \pm 1$$

となる点である。 x について解いて、

$$\frac{2\pi}{\lambda} x = m\pi$$

$$x = \frac{m\lambda}{2}$$

* 定常波の波の式は、このように x と t が分離した形になる。