解答 概念理解と思考力を高めるための問題集 ～仕事とエネルギー～

§A:公式理解問題

1 ≪テーマ≫ 仕事の正負

解答 $W_A = Fx$　$W_B = -Fx$　$W_C = 0$

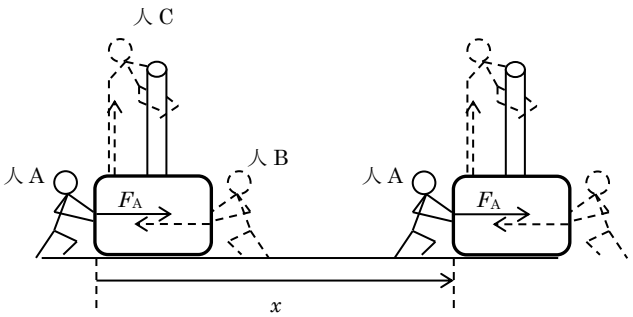
解説

仕事 W の定義は

仕事 ＝ 力 × (力の方向に)移動した距離　　単位は〔J〕ジュール

$$W = Fx$$

A の仕事について.



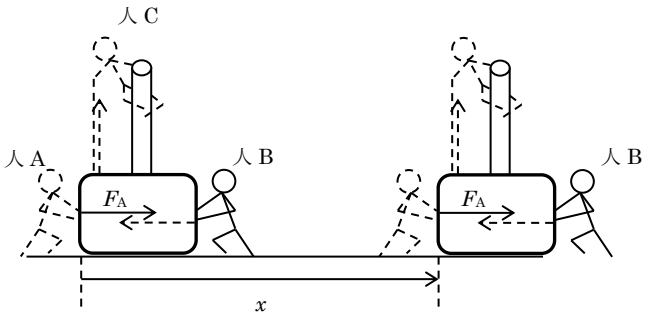
A が力を加えた向きに物体は動いている．このときの A のした仕事は正の仕事.

正の仕事は『**アクセル**』

のイメージ

$W_A = Fx$

B の仕事について.



B が力を加えた向きと逆に物体は動いている．このとき B のした仕事は負の仕事.

負の仕事は『**ブレーキ**』

のイメージ.

$W_B = -Fx$

C の仕事について.

C の加える力は，物体にアクセルの効果もブレーキの効果も与えていない.

（もし上に物体が移動を始めたとしたらアクセルの効果はある）

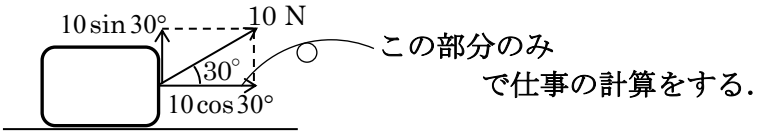
このように，進行方向と 90° の向きの力は仕事をしない．　$W_C = 0$

2 ≪テーマ≫ 斜めの仕事

解答　$20\sqrt{3}$ J

解説

ななめの力は，移動に貢献している成分だけで仕事の計算をおこなおう．



このときの仕事量は，$W = F \times x = 10\cos 30° \times 4.0 = 40\cos 30° = 20\sqrt{3}$〔J〕

3 ≪テーマ≫ 保存力による仕事

解答　$mg(h-h')$

解説

保存力による仕事は，経路に依らず，位置エネルギーの減少量(㊊－㊋)となる特徴がある．

例えば重力による位置エネルギーが 100 J 減る場合，重力は 100 J の仕事をするといえる．

最下点を基準面にしたとき，A 地点での重力による位置エネはエネは mgh，B 地点での重力による位置エネは mgh'．ここから重力による位置エネの減少量を計算すると，

㊊－㊋

減少量 ＝ mgh － mgh'

＝ $mg(h-h')$　　これがそのまま，『重力がした仕事』となるのだ．

＊ 保存力なら仕事を『力×距離』以外の出し方で計算できることを意識しておこう．
保存力は『重力』と『弾性力』の 2 種類．非保存力は，重力と弾性力以外の力すべて．という認識でいまのところは OK.

＊ 『変化量』と言われれば㊋－㊊，であり，これは物理では超頻出の計算である．しかしエネルギーのこの部分だけ『減少量』を用いる．減少量は㊊－㊋で計算する．注意．

4 ≪テーマ≫ 運動エネルギーと仕事①

解答　イ

解説

仕事と運動エネルギーの関係は，

前の運動エネルギー　＋　仕事　＝　後の運動エネルギー

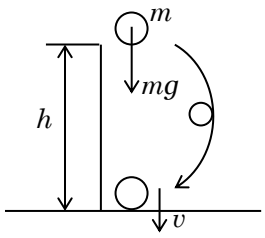
$$\frac{1}{2}mv_0^2 \quad + \quad W \quad = \quad \frac{1}{2}mv^2$$

となる．**『仕事をされた分運動エネルギーが増える』**のだ．

銀行の口座に 10 万円あり，給料が 5 万円入ると，口座には 15 万円入っている．というイメージと同じである．給料が仕事なのだ．後々でてくる，運動量と力積の関係と似ている．

教科書では，運動エネルギーの変化量（後－前）＝仕事　とされているが，この式を変形しただけなので，気にしないこと．

ビルの高さを h，軽い石の質量を m とする．重力がする仕事を計算すると，



出し方①　$W = Fx$ より，$W = mg \times h = mgh$

出し方②　重力による位置エネの減少量を計算すると，

$U_{(前)} = mgh$　　$U_{(後)} = 0$　なので，mgh 減っている．

よって重力のした仕事は mgh

運動エネルギーは，された仕事の量だけ増えるので，それを立式すると，

前運動エネ		仕事		後運動エネ
0	＋	mgh	＝	$\frac{1}{2}mv^2$

となる．よって地面にぶつかる直前の運動エネルギーの大きさ $\frac{1}{2}mv^2$ の大きさは mgh といえる．

(これを v について解く問題が物理では頻出ですね

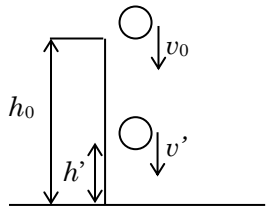
さて，地面にぶつかる直前の運動エネルギーの大きさは mgh といえるので，質量が 2 倍になったら，運動エネルギーの大きさも 2 倍になるといえる．よって解答はイ．

＊もし，『速度を比べろ』といわれたら，どちらも $v = \sqrt{2gh}$ になるので，速度は等しくなる．

＊実はこの立式は力学的エネルギー保存の式と同じになっている．この問題は，**重力による位置エネがすべて運動エネに変わる物理現象**なのだ（下記参照）．なので，運動エネルギーの大きさを比べるには，最初に持っている重力による位置エネを比べるだけでよい．

必読!! 運動エネルギーと仕事の式，と，力学的エネルギー保存則のつながり

モデル　高さ h_0 の点から速度 v_0 で投げ下された物体が，高さ h' を通過するとき速度 v' だった．



このとき，重力のする仕事 W は，$W = mg(h-h')$

(力×距離 でだしてもいいし，位置エネの減少量，で出してもよい)

運動エネルギーと仕事の式をたてると，

(前)運動エネ　＋　仕事　＝　(後)運動エネ

$\frac{1}{2}mv_0^2 + mg(h-h') = \frac{1}{2}mv'^2$　となる．

これを変形すると，

$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgh = \frac{1}{2}mv'^2 + mgh'$　となる．これは力学的エネルギー保存の式となる．

(前)力学的エネ　＝　(後)力学エネ

力学的エネルギー保存の式は，『保存力』の作用を『仕事』としてではなく，『位置エネ』として扱った立式といえるのだ．

結局どの式を問題で使えばいいのかわからない．という質問をよく受けます．
つきつめると，
『運動エネルギー』が『保存力の仕事』分増えている，という立式をするのか，
『保存力の仕事』という部分を，『位置エネ』という考え方で立式するのか，の 2 択です．
自分がいまどちらの考え方で保存力を捉えているのかを意識して問題を解いてみましょう．

5　≪テーマ≫ 弾性力による位置エネルギー

解答　(1) 0.20 J　(2) U_2 : 0.80 J　　W : 0.60 J

解説　(1) 弾性エネルギーの公式 $\frac{1}{2}kx^2$ より

$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}\times 10\times 0.20^2 = 0.20$ J

(2) のびが 0.40 m になったときの弾性エネルギーの大きさを求めると，

$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}\times 10\times 0.40^2 = 0.80$ J

前問(1)のときより，0.60 J エネルギーが増えていることから，ばねを伸ばすのに要した仕事は，0.60 J とわかる．

6 ≪テーマ≫ 弾性力による位置エネルギー

解答　(1) $\frac{1}{2}kx^2$　(2) $x\sqrt{\frac{k}{m}}$

解説

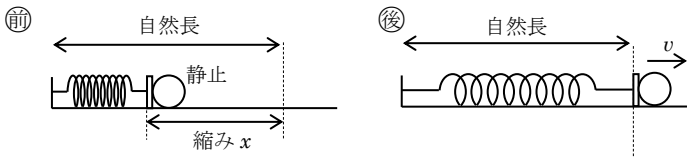
弾性力による位置エネルギーは $\frac{1}{2}kx^2$ で計算できる．これを用いて考える．

(1) 物体が板から離れるとき ⇒ ばねが自然長になったとき　は大事なことなのでしっかりとおさえておこう．さて，ばねがした仕事は，単純に $W=Fx$ で求めることはできない．

(F がばねの縮み具合で時間変化してしまうため．)

ばねの仕事は保存力の性質を使って考える．『位置エネの減少量が保存力のした仕事』である．

㊟と㊦で弾性力による位置エネ U を計算すると，



$U=\frac{1}{2}kx^2$　　$U=0$　　位置エネは$\frac{1}{2}kx^2$ 減っている．

よって，ばねによる仕事は $\frac{1}{2}kx^2$

(2) された仕事分，運動エネルギーが増えるという式を立てると，

前運動エネ	＋	仕事	＝	後運動エネ
0	＋	$\frac{1}{2}kx^2$	＝	$\frac{1}{2}mv^2$

これを v について解くと，$v=x\sqrt{\frac{k}{m}}$

＊力学的エネルギー保存の式を立てても同じ計算結果が得られる．やってみよう．

7 解答 **問 1** オ　**問 2** エ

解説

問 1 力学的エネルギー保存則より計算する.

（力学的エネ = 運動エネ＋重力エネ＋弾性エネ で計算. 重力エネの基準面を点 Q の高さとする.）

点 P での力学的エネルギーは

$0 + 50\times10\ \times1.0 + 0$

点 Q での速さを v とすると，点 Q での力学的エネルギーは,

$\frac{1}{2}\times50\times v^2 + 0 + 0$

力学的エネルギー保存則より，点 P での力学エネ＝点 Q での力学エネ，なので

$0 + 50\times10\times1.0 + 0 = \frac{1}{2}\times50\times v^2 + 0 + 0$

$v^2 = 20$

$v = 2\sqrt{5} = 4.47 \fallingdotseq 4.8$ m/s

選択肢に適切なものはないのでオ

問 2 糸が長くなっても，点 Q から点 P までの高さが変化していないので，変化しない.

解答はエ

§B:概念理解問題

1 ≪テーマ≫ 保存力による仕事

解答　ウ

解説

§A 3 では『位置エネが減るとき』を分析したが，今度は『位置エネが増えるとき』に着目してみる．位置エネが増えているときは『保存力に逆らう力』が仕事をした分，位置エネが増えている．重力に逆らって仕事した分だけ，物体に重力による位置エネが溜まっていくイメージ!!

さて，このポイントを使って力 F を出してみよう．

① 物体を上まで運ぶ仕事量を求める．

ひとまず，このときボールの位置エネがどれくらい増えたかを計算すると，

重力による位置エネ＝mgh　より

$5.0_{\,\mathrm{kg}} \times 10_{\,\mathrm{m/s^2}} \times 0.50_{\,\mathrm{m}} = 25_{\,\mathrm{J}}$

② 力 F のした仕事が①で求めた仕事量と等しいことを利用し，F を求める．

さて，この問題の F は**重力に逆らって物体を持ち上げる力**であり，**この力がする仕事の分だけ位置エネが増えている**のだ．力 F は 1.0 m の距離だけ球を動かしているので，

$W = Fx$ より仕事の量は

$W = F_{\,[\mathrm{N}]} \times 1.0_{\,\mathrm{m}}$　　これが 25 J の仕事といえるので，

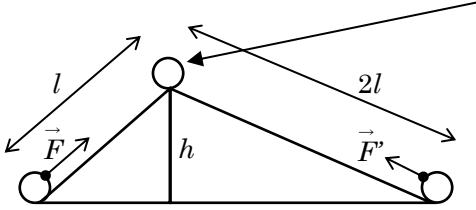
$25 = F \times 1.0_{\,\mathrm{m}}$　　と立式でき，F は 25 J と計算できる．よって解答はウ．

2 ≪テーマ≫ 保存力による仕事

解答 ウ

解説 重力は保存力であり，保存力に関する仕事は，経路によらない．

重力による位置エネルギーは経路によらず，高さだけで仕事やエネルギーの量が決まる．



ここで持つエネルギーは同じ．
⇒ 坂道を上るときにされる
仕事量も同じ

傾きが違う坂道でも，同じ高さまで上がるなら，必要になる仕事量は同じなので，
(急な坂道での仕事) ＝ (緩やかな坂道での仕事) という式が成り立ち

$$Fl = 2F'l$$

と立式できる．ここから $F' = \frac{1}{2}F$ となる．

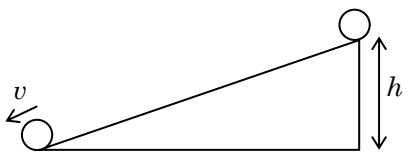
よってウ．　　坂が緩やかだと力が楽になる分，距離で損をするのだ．

3 ≪テーマ≫運動エネルギーと仕事②

解答　エ

解説

速度が v から $2v$ になったとき，運動エネルギーの大きさが何倍になっているか考えよう．
その運動エネルギーを得るのに，斜面の高さがどれくらい必要か考える．



下端到達時，速度が v なら斜面を下る過程で得ている運動エネルギーは $\frac{1}{2}mv^2$

速度が $2v$ なら，斜面を下る過程で得ている運動エネルギーは $\frac{1}{2}m(2v)^2 = 2mv^2$

実に 4 倍のエネルギーを得ている．

さて，今回，最下点で持っている運動エネルギーは，最初にもっている位置エネルギーに等しい．そして，位置エネルギーは mgh で計算できるので，エネルギーを 4 倍にするためには高さは 4 倍あればいいとわかる．よって解答はエ．

4 ≪テーマ≫ 力学的エネルギーの保存

解答 オ

解説 ばねの縮みを x, 最も球が跳ね上がった時の高さを h として，力学的エネルギー保存の式を立てると

$\frac{1}{2}kx^2 = mgh$ といえ，h について解くと，

$h = \frac{k}{2mg}x^2$ となる．

この式より x が半分になった場合，h は$\frac{1}{4}$になるとわかる．

よって，24 m の$\frac{1}{4}$である 6.0 m が答え．

5 ≪テーマ≫ 運動エネルギーと仕事の関係

解答 (1) 加速度：－　仕事：－　(2) 加速度：－　仕事：＋　(3) 運動エネルギーの変化：＋

解説 解説をみながら自分で作図をすると理解が深まります．必ず作図しながら読みましょう．

(1) 初速度の向きを正とするので，右向きを正の向きとして考える．

力が左向きなので，加速度の向きも左向き．よって加速度は負．

仕事の正の向きは座標の正の向きなどとは関係がないのだ．

進行方向と逆向きの力だと，負の仕事になるので，仕事は負．と考える．

$\vec{F}$によりブレーキがかかっている（運動エネを減らしている）ので，仕事は負，と考えてもよい．

(2) U ターンした後も，力は左向きにはたらくので，加速度は左向きである．よって加速度は負．

U ターンした後は，進行方向と力の向きが同じになるので，正の仕事になる．仕事は正．

U ターン後は$\vec{F}$はアクセルの役割をしている（運動エネを増やしている）ので，仕事は正，と考えてもよい．

(3) U ターン後は正の仕事をされ，運動エネルギーは増えていくので，運動エネルギーの変化は正．

＊負の向きの速度が増えても，運動エネルギーがマイナスになったりはしない．運動エネルギーは常に正の大きさを持つのだ．

＊スタートから U ターンまでの間は，運動エネルギーが減っていくので，運動エネルギーの変化は負，といえる．

6　解答 **(1)** (a) オ (b)イ (c) エ (d) オ (e) ア　**(2)** ウ

解説

グラフの問題は，しっかりと現象をイメージし，そのイメージをグラフに書き起こす技術が必要．グラフをみて動画をイメージできるように訓練しよう．また，1 次式なのか，2 次式なのか，分数関数なのか，なども意識するとイメージをサポートしやすい．慣れよう．

(1)

(a) y 座標

この自由落下の y 座標は，

$y = h - \frac{1}{2}gt^2$　で示される．

上に凸の 2 次式である．

これを示すのはオ．

(b) 速さ v

速度は負の向きだが，速さ，には向きがないので絶対値で考える．この自由落下の速さは，

$v = gt$　で示される．

これは 1 次式なので直線になる．

これを示すのはイ．

(c) 運動エネルギーK

運動エネルギーK は

$K = \frac{1}{2}mv^2$ で示される．ここで v は(b)で求めた $v = gt$ なので，代入すると，

$K = \frac{1}{2}m(gt)^2$

$K = \frac{1}{2}mg^2t^2$

これは下に凸の 2 次式なので，エ．

(1)続き

(d) 位置エネルギーU

位置エネルギーU は

$U = mgy$　で示される．ここで y は(a)で求めた $y = h - \frac{1}{2}gt^2$ なので代入すると，

$U = mg(h - \frac{1}{2}gt^2)$

$U = mgh - \frac{1}{2}mg^2t^2$

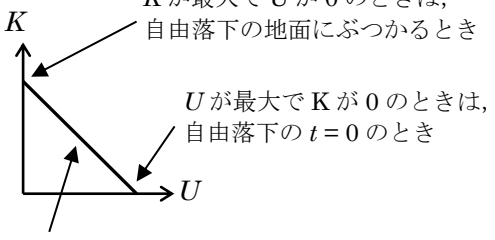
となる．これは上に凸の 2 次式なのでオ．

(e) 力学的エネルギーE

力学的エネルギーは落下の前後で保存している．つまり一定なのだ．よってア．

(2) 自由落下中のエネルギーの変化を分析すると，位置エネルギーU を失い，失った分運動エネルギーK に変わっている，といえる．

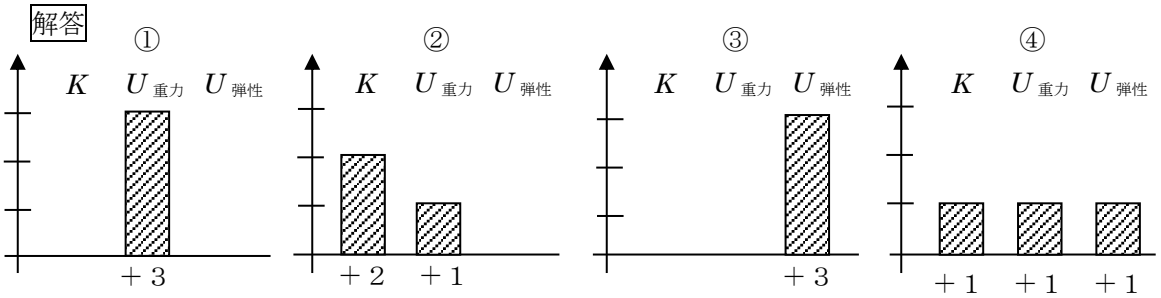
U の変化分だけ K に変わっているグラフはウ．



グラフを右から左に見ると時間の流れとあう．
U が減っていった分 K が増える．
10 J へったら 10 J 増える．傾き 1 の直線となる．

4 ≪テーマ≫力学的エネルギーの保存と，エネルギーダイアグラム

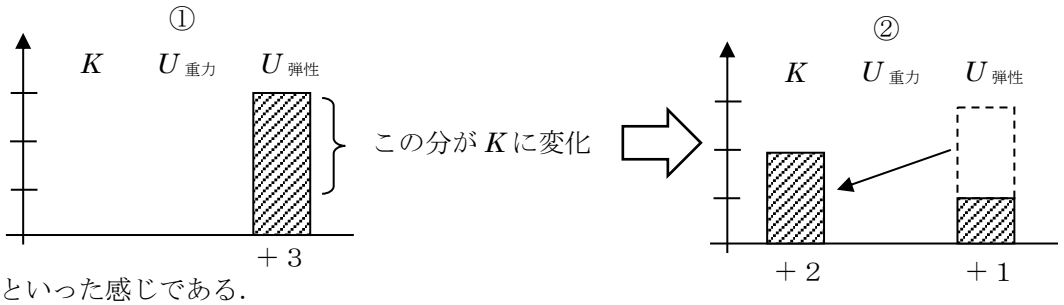
解答



＊（＋1　＋2でもよい）

解説 エネルギーダイアグラムで，エネルギーの変換のイメージを湧かせよう．

たとえば，問題文に出ていたモデルの，ばねで物体を押し出す場合のエネルギー変化は，

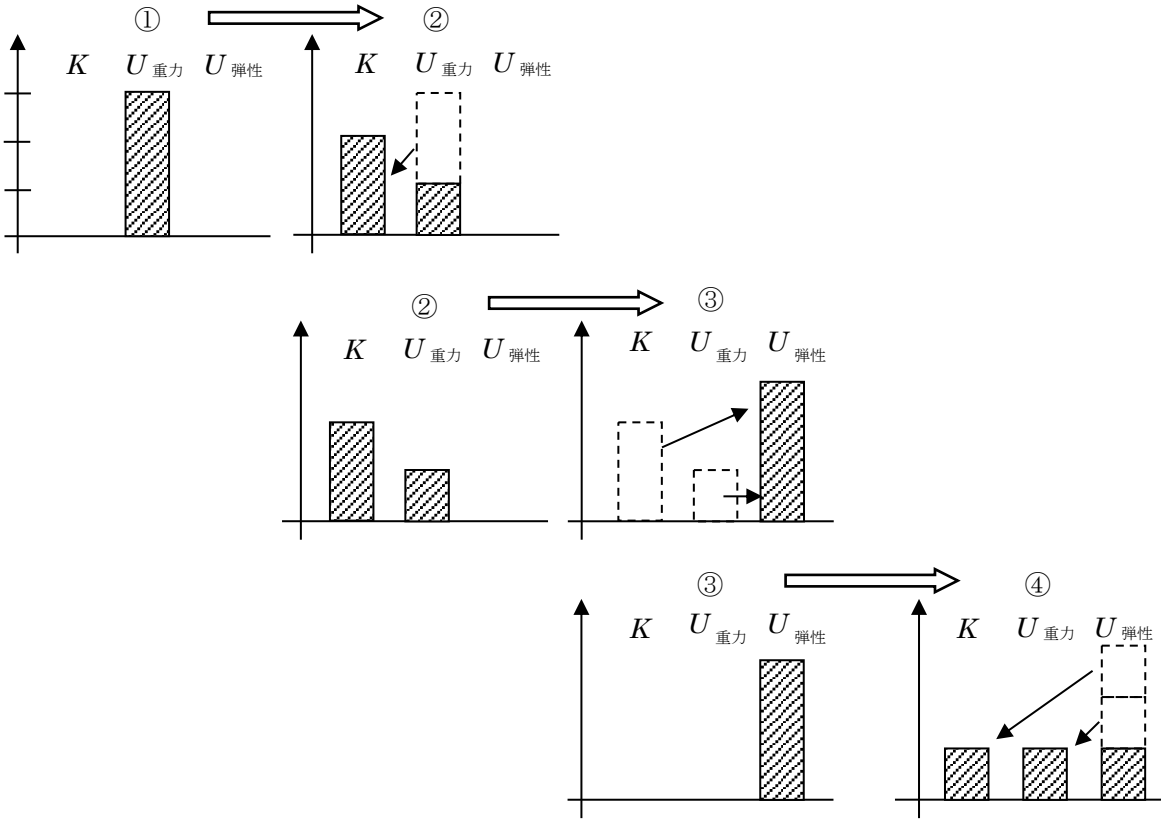


といった感じである．

問の場合，最初は，$U_{重力}$としてもっていたエネルギーが運動エネルギーKに変換され，③のときには$U_{弾性}$にも変わっていき，④では全種類のエネルギーを少しずつもっている状態になる．

＊基準面より上なので，②のときも$U_{重力}$が少しあることに注意が必要だ．

①→②のとき，②→③のとき，③→④のとき，それぞれのエネルギーの変換を下図に示したので，自分でも意識できるようにしよう．



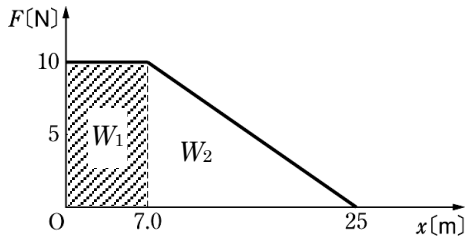
§C:実践問題

1 解答 **(1)** 70 J **(2)** 8.0 m/s **(3)** 90 J **(4)** 10 m/s

解説

$F-x$ グラフの面積は仕事.
(仕事)=(力)×(距離) であり，F－x グラフの面積は，縦(力)×横(距離) の掛け算なので，力を示す．正の部分の面積は正の仕事，負の部分の仕事は負の仕事をする．

(1)



$0 < x < 7.0$ の面積部分が物体のされた仕事 W_1 となる.

$W_1 = 10 \times 7.0 = 70$ J

(2)

$$\frac{1}{2}mv_0^2 \quad + \quad W \quad = \quad \frac{1}{2}mv^2$$

㊊運動エネ ＋ 仕事 ＝ ㊋運動エネ より

$x = 0$ のとき速さが 6.0 m/s，された仕事が $W_1 = 70$ J，$x = 7.0$ m のときの速さを v_1 とすると，

$$\frac{1}{2}\times 5.0\times 6.0^2 + 70 = \frac{1}{2}\times 5.0\times v_1^2$$

と立式できる.

v_1 について解いて，$v_1 = 8.0$ m/s

(3) グラフの面積より，$7.0 < x < 25$ の間に物体がされる仕事 W_2 は,

$$W_2 = (25-7.0)\times 10\times\frac{1}{2}$$

$W_2 = 90$ J

(4) $x = 7.0$ のとき速度が $v_1 = 8.0$ m/s であり，そこから $x = 20$ に移動するまでに 90 J の仕事をされているので，(2)と同様に運動エネルギーと仕事の式を立式すると，

$$\frac{1}{2}\times 5.0\times 8.0^2 + 90 = \frac{1}{2}\times 5.0\times v_2^2$$

$$\frac{1}{2}\times 5.0\times 8.0^2 + 90 = \frac{1}{2}\times 5.0\times v_2^2$$

と立式できる．v_2 について解いて，

$v_2 = 10$ m/s

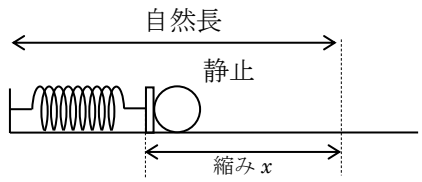
$\boxed{2}$ 解答　**(1)** $\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,x$　**(2)** $\dfrac{kx^2}{2mg}$　**(3)** $\sqrt{\dfrac{2mgh}{k}}$

解説

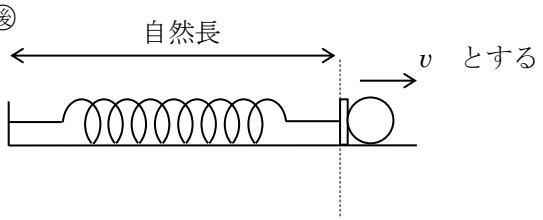
力学的エネルギーの保存を計算するときは，前　と　後　をしっかりと作図することが大切．どことどこを比べているのかをはっきりさせて立式しよう．

(1) 同じ問題を，問題 $\boxed{7}$ でやっている．そちらでは，『運動エネルギー』と『保存力による仕事』の関係で解いている．こっちの問題では力学的エネルギーの保存で解いてみよう．

前



後



前 の力学エネを計算すると，

運 ＋ 重 ＋ 弾

$0 \quad + 0 \quad + \dfrac{1}{2}kx^2$

後の力学エネを計算すると，

運 ＋ 重 ＋ 弾

$\dfrac{1}{2}mv^2 + \ 0 + 0$

力学的エネルギー保存則の立式　前 ＝ 後 をすると，

前　＝　後

$\dfrac{1}{2}kx^2 \quad = \quad \dfrac{1}{2}mv^2$

聞かれている v について解いて，

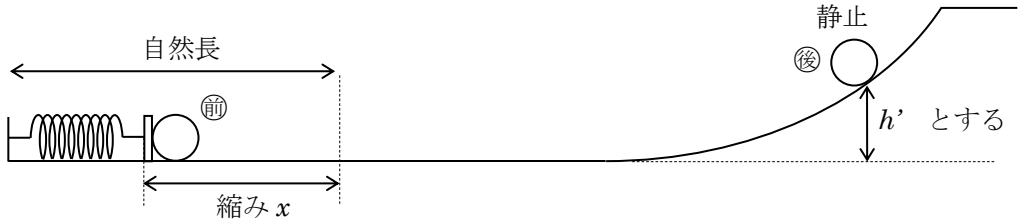
$$v = \sqrt{\frac{k}{m}}\,x$$

運動エネルギーと仕事の式　と
力学的エネルギー保存の式
で考えるときの違いをしっかりと理解しておこう．
どちらの考え方でも問題は解けます．

(2) この問題では，どこを㊊とおき，どこを㊋とおくか，がポイントとなる．

㊋は，物体が坂の最高点に達する(途中で静止してしまう)瞬間，でよいだろう．

㊊はとりあえず一番最初の，ばねが縮んでいるときにでもしてみよう．



㊊の力学的エネルギーは　$0+0+\frac{1}{2}kx^2$

㊋の力学的エネルギーは　$0+mgh'+0$

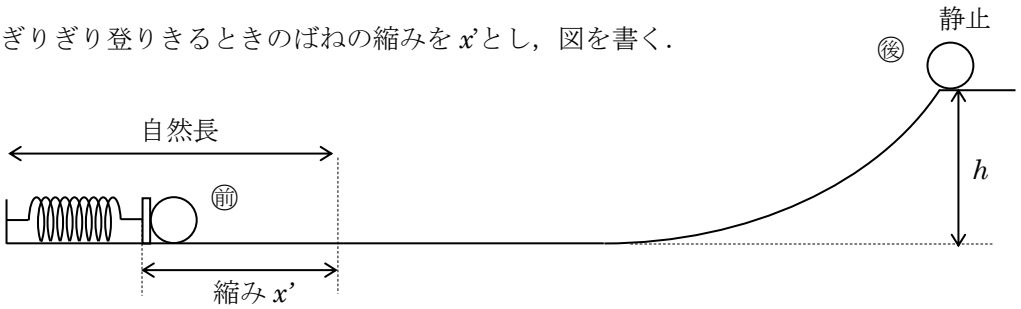
よって，㊊ = ㊋の式を立てると，$\frac{1}{2}kx^2=mgh'$

問われている h'について解いて，$h'=\frac{kx^2}{2mg}$

＊別解　たとえば，物体がばねから離れた瞬間を(2)の㊊と設定してもよい．
同じ結果になるはずだ．

(3) 問題で何を聞かれているかを読み取れるかがポイントである．この問題は，『登りきるのにどれだけ縮めればいいか』と聞いてきているが，『ギリギリ登りきるときのばねの縮みはいくらか』という問題と同じなのだ．このような物理特有の読み取り方を頑張って身に着けよう．

ぎりぎり登りきるときのばねの縮みを x'とし，図を書く．



㊊の力学エネは　$0+0+\frac{1}{2}kx^2$　　㊋の力学エネは $0+mgh+0$

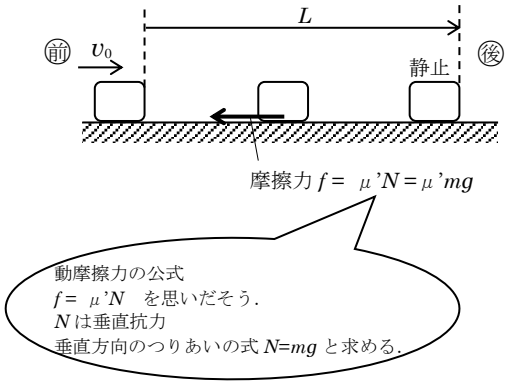
よって，㊊ = ㊋の式を立てると，$\frac{1}{2}kx^2=mgh$　　問われている x'について解いて，$\sqrt{\frac{2mgh}{k}}$

3 解答 **(1)** $\dfrac{{v_0}^2}{2\mu' g}$ **(2)** $\dfrac{{v_0}^2}{2g(\sin\theta+\mu'\cos\theta)}$ **(3)** $\sqrt{\dfrac{ka^2}{m}-2\mu' ga}$

解説

非保存力が仕事をするときは，力学的エネルギーは保存しない．仕事された分増えたり減ったりする．この問題では負の仕事(ブレーキ)をされているので，エネルギーが減る．きちんと(前)と(後)と仕事を整理して計算していこう．**(前)力学エネ $+W_{非保存力}$ = (後)力学エネ** となる．

力学的エネルギーを(運)エネ＋(重)エネ＋(弾)エネで計算し，仕事は力×距離で計算する．



(前)力学エネは $\dfrac{1}{2}mv_0^2 + 0 + 0$

(後)力学エネは $0 + 0 + 0$

$W_{非保存力}$ は $\quad -\mu' mg \times L = -\mu' mgL$

(進行方向と逆向きの力なので負の仕事)

さて，エネルギーと仕事の式を立てると

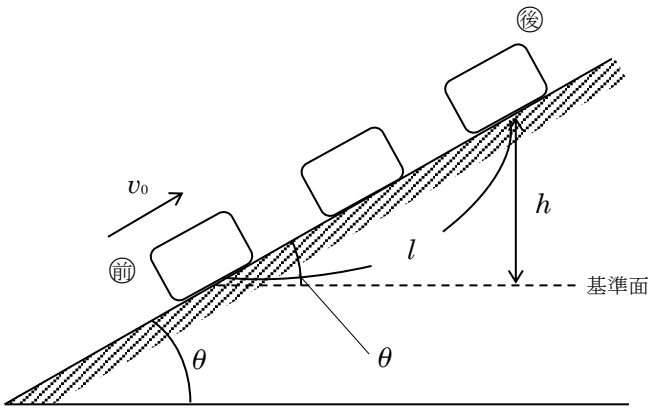
(前) ＋ $W_{非保存力}$ ＝ (後)

$$\frac{1}{2}mv_0^2 \quad -\mu' mgL \quad = \quad 0$$

問われている L について解いて，$L = \dfrac{{v_0}^2}{2\mu' g}$

(2) (1)の問題に，重力による位置エネを加味した問題である．また，摩擦を考えるときに垂直抗力 N が mg にならないことに注意せよ．

最初の高さを基準面とし，『最高点に達する(つまり)⇒物体が静止する』ところを(後)とし，そのときの高さを h と置く．



図から，h は $l\sin\theta$ であることがわかり，

(前) $+ W_{非保存力}$ ＝ (後) の立式をすると，

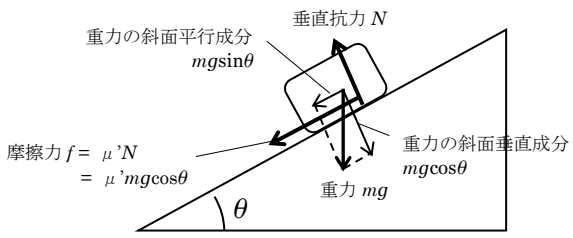
$$\frac{1}{2}mv_0^2 \quad + (-\mu' mgl\cos\theta) = mgl\sin\theta$$

と立式できる．$W_{非保存力}$を考えるときに，摩擦力の大きさを計算する必要があるが，計算の仕方は下記参照．

問われている l について解いて，

$l = \dfrac{{v_0}^2}{2g(\sin\theta+\mu'\cos\theta)}$

＊摩擦力について



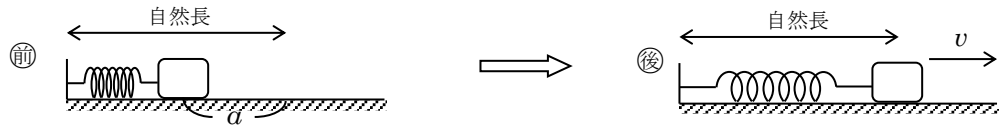
動摩擦力の公式は $f = \mu' N$ である．

そして，今回 N は mg ではないことに注意が必要．

垂直方向のつり合いの式から，$N = mg\cos\theta$ となる．

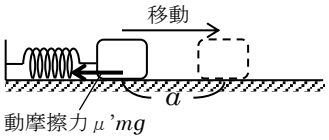
よって動摩擦力は，$f = \mu' mg\cos\theta$ となる．

(3) やはり，㊟と㊦，をしっかりと図に書き，エネルギーの式を立てよう．



力学的エネルギーを計算すると，㊟ $\frac{1}{2}ka^2$ ㊦ $\frac{1}{2}mv^2$ となる．

そして，今回は，動摩擦力という非保存力が働くので，非保存力による仕事は，



$W_{\text{非保存力}} = -\mu' mg \times a$ となる．

エネルギーの式を立てると，

$$\underbrace{\text{㊟}}_{} + \underbrace{W_{\text{非保存力}}}_{} = \underbrace{\text{㊦}}_{}$$

$$\frac{1}{2}ka^2 + (-\mu' mga) = \frac{1}{2}mv^2$$

問われている v についてといて $v = \sqrt{\dfrac{ka^2}{m} - 2\mu' ga}$