§A:公式理解問題

1 ≪テーマ≫単振動をする条件・復元力

解答 イ

解説 単振動は、復元力 $-m\omega^2 x$ が働くときにおこる。復元力は、原点からの変位 x に比例し、変位の向きと逆向きに働く力である。噛み砕いて説明すると、『中心からずれたとき、ずれればずれるほど大きな力で、中心に引き戻そうとする力』が復元力である、これがはたらくときに単振動は発生する。それを説明しているのはイである。

2 ≪テーマ≫単振動の要素

解答

	0の点	正に最大の点	負に最大の点
速度	ア・オ	ウ	ウ
加速度	ウ	ア	オ
力	ウ	ア	オ

ポイント

単振動で大切なことは、実際にどんな運動をしているかをイメージできるか。ということである。運動のイメージがわかずに単振動は絶対できるようにならない。

単振動は、単物体の往復運動(振動)の事であり、**折り返し地点では、速度0、加速度最大**。振動の中心では、**速度最大、加速度0**の運動を行っている。**『折り返し点』**と**『振動中心』**がキーワードになるので頭に入れておこう。

解説 速度は単振動の変位最大の点(折り返し点)で0になり、振動の中心で最大となる。

加速度は、振動の中心で0、変位最大の点(折り返し点)で最大となる。また、加速度の原因は力であり、$ma = F$ の関係で示されるので、力も同じ解答となる。

ばねが最も縮むときは、押し返す力が最も大きく(正に最大)、ばねが最も伸びるときは、引き戻す力が最も大きい(負に最大)。

§B:概念理解問題

1 ≪テーマ≫つりあいの意味

解答　イ

解説　Aに関して：力がつりあっていても、加速度が0なだけで、初速度を持っていたら、等速直線運動をおこなう。

(例：摩擦のない氷の上を等速ですべる物体は、力がつりあっているのに運動している)

Bに関して：Aの説明で記した通り、運動していても力がつりあっている状況はあり得る。『力のつり合い ⇒ $a=0$』という関係なのだ。vは関係ない。単振動の中心では、力がつりあっているが、速度が最大となっている。

Cに関して：物体の速度が0でも力がつりあっていない状況はあり得る。単振動が例として挙げられる。単振動の折り返し点では、速度が0だが、働く力は最大になっている。

2 ≪テーマ≫ 単振動のグラフ

解答　変位：エ　　速度：ア　　加速度：ウ

解説

物体がどんな運動をしているのか、イメージをそのままグラフにしてしまおう。イメージするうえでのポイントは、『最初がどういう状態か』である。状態を見極め、グラフが、+sin型、－sin型、+cos型、－cos型のいずれになるかを考えよう。

変位は最初、負に最大の点からスタートしているので、－cos型。よってエ。
速度は最初、0から始まり、正の速度をしだいに得るので、+sin型。よってア。
加速度は最初、正に最大の点からスタートしているので、+cos型。よってウ。

単振動のグラフを書くときは、$t=0$の時の分析が鍵!!

3 ≪テーマ≫ 単振動の周期の活用

解答　(1) $\frac{1}{2}T$　(2) $\frac{1}{4}T$

解説　単振動での時間に関する問題は、『距離÷時間』では求めることができない。単振動の変位xのグラフと合わせてかんがえると、$\frac{1}{4}T$ごとに対称性のある運動を行っているとわかり、それを活用して、時間を考えることができる。$\frac{1}{8}T$の区切りは対称性のある形ではないので注意しよう。

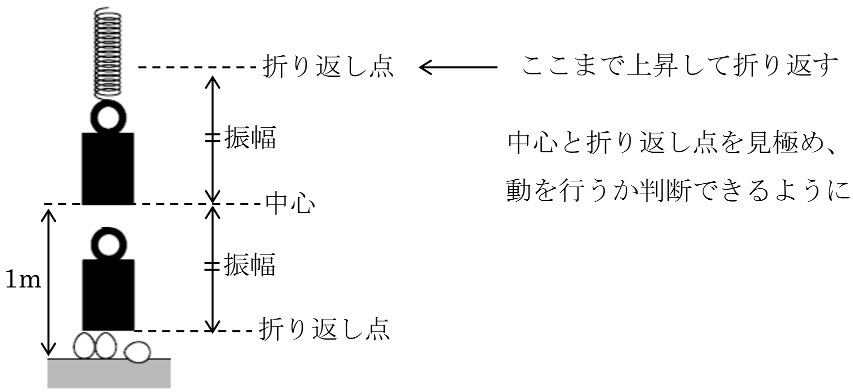
$\boxed{4}$ ≪テーマ≫ 単振動の折り返し点

$\boxed{\text{解答}}$ イ

解説

物体の運動をイメージするうえでポイントとなるのは、『振動の中心』と、『折り返し点』である。ここで、**『振動の中心』は『力がつりあう点』**であり、**『折り返し点』は『速度が 0 になる点』**である。そして、中心から折り返し点までが振幅となり、上下方向で振幅は同じになる。単振動で最重要ポイントなので、しっかりと頭にいれること。

卵のすぐ上で手を離すと、そこが単振動の折り返し点となる($v = 0$ なので)。つまり、手を離した位置までしか物体は落ちてこないので、卵のぎりぎりの高さまでは落ちてくるが、衝突はしない。よってイ。ちなみに最初に静止した、床から 1m の高さの点が振動の中心となる(力のつりあう点なので)。＊ばねの自然長の位置が振動の中心になっているわけではないので注意しよう。



中心と折り返し点を見極め、どんな単振動を行うか判断できるようになろう。

$\boxed{5}$ ≪テーマ≫ 単振動とエネルギー

$\boxed{\text{解答}}$ オ

単振動ではいろいろな式が出てくるので、どれを使っていいかわからなくなることがあるが、きちんと『振動中心』や『折り返し点』のことを整理できれば、たいていのことはエネルギー保存則で十分計算できてしまう。エネルギーに関する考察をしてみよう。

最初に静止していた点 x' は、力がつりあう点であり、そこは自然長であり振動の中心となる位置となる。そこでは弾性力による位置エネは 0 となる。そこから伸びや縮みがあると、

$U = \dfrac{1}{2}kx^2$ のエネルギーを持つので、エネルギーは、振動の中心から離れるほど、2 次的に増えていく。それを示したグラフはオ。

振動の中心で最も位置エネルギーが小さく、その分運動エネルギーが最大になっているというイメージを持っておこう。

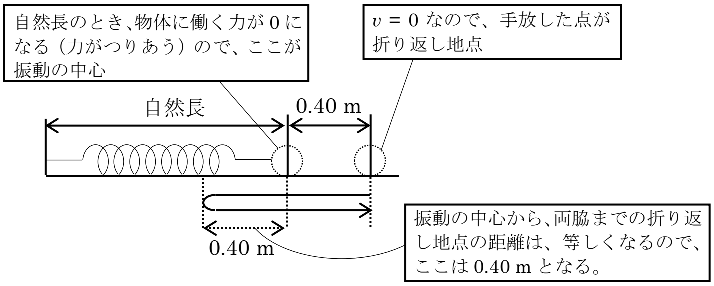
また、今回のように、軸の最下点が 0 でないグラフもあり得るので注意しておこう。

ちなみに、運動エネルギーを示すグラフはエ、力学的エネルギーを示すグラフはカとなる。

§C:実践問題

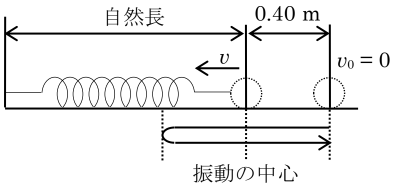
1 解答 (1) 0.40 m　(2) 2.0 m/s　(3) $\sqrt{3}$ m/s　(4) 10 m/s²　(5) 5.0 rad/s　(6) $\frac{2}{5}\pi$〔s〕　(7) $\frac{1}{10}\pi$〔s〕　(8) $\frac{1}{15}\pi$〔s〕

(1) どんな振動をするか絵にしてみると以下のようになる。(これが物理では最重要!!イメージを湧かせられるように!!)



図から、振幅は 0.40 m

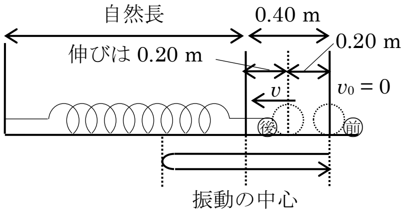
(2) v が最大となるのは、振動の中心を通過するときである。(単振動では必ずそうなる。) よって力学的エネルギー保存則の式を立てると、



$$\underbrace{\frac{1}{2}mv_0{}^2+\frac{1}{2}kx^2}_{\text{(折り返し点での力学エネ)}}=\underbrace{\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx'^2}_{\text{(振動の中心での力学エネ)}}$$

$$0+\frac{1}{2}\times5\times0.4^2=\frac{1}{2}\times0.2\times v^2+0$$
$$v^2=4$$
$$v=\pm2.0 \text{ m/s}$$

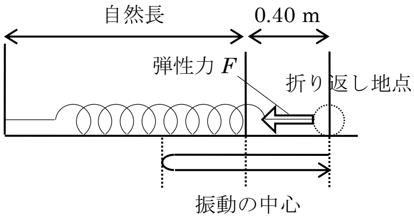
(3) 指定された位置での力学的エネルギー保存則を立てればよい。



$$\frac{1}{2}mv_0{}^2+\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx'^2$$
(前)　　　(後)

$$\frac{1}{2}\times5\times0.4^2=\frac{1}{2}\times0.2\times v^2+\frac{1}{2}\times5\times0.2^2$$
$$v^2=3$$
$$v=\pm\sqrt{3}$$

(4) 加速度が最大となるのは、折り返し地点だ。(単振動の特徴)
そこで働く力を見出し、運動方程式を立てればよい。
働く力は、弾性力のみである。(重力と垂直抗力はつりあって打ち消し)
フックの法則『弾性力 $F = kx$』より
弾性力 F = 5.0 N/m × 0.40 m = 2.0 N
よって、運動方程式を立てると、
$ma = F$
0.20 × a = 2.0　　a = 10 m/s²



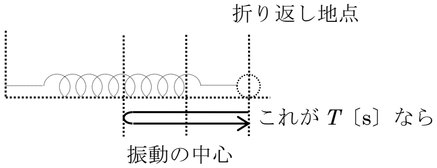
(5) ω を出すには、
i) 働く力が－○○x であることを見出し
ii)－○○x = －$m\omega^2x$ という式を立てる。
今回物体に働く力は、ばねの弾性力のみなので、働く力は、
－kx といえる。よって
－kx = －$m\omega^2x$ と立式できる。(これは『実際に働く力 $F = ma$』の運動方程式!!(*ﾟ—ﾟ))
これを解くと、

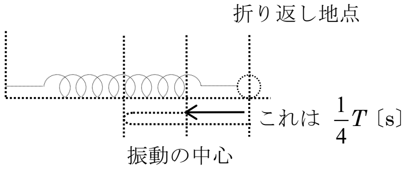
$$-5x=-0.2\times\omega^2\times x$$
$$\omega^2=25$$
$$\omega=5.0 \text{ rad/s}$$

(6) ω を出せれば、周期 T は

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{5}\text{〔s〕}$$ とだせる。

(7) 運動の対称性から

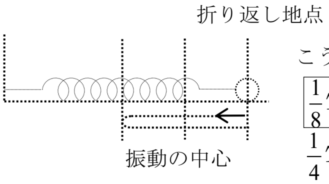




よって、初めて振動の中心を通過するまでの時間は

$$\frac{1}{4}T=\frac{1}{4}\times\frac{2\pi}{5}=\frac{\pi}{10}\text{〔s〕}$$

(8) この問題では注意してもらいたいことがある。

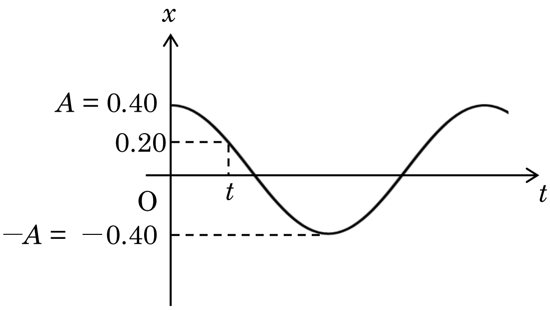


こういう状況だからといって、

$\boxed{\frac{1}{8}T\text{〔s〕となるわけではない!!}}$

$\frac{1}{4}T$ のときは、動きに対称性があったから成り立った。

中途半端な地点までの時間は、グラフを書いて考える。$x-t$ グラフを書くと、



左図のように、最大値 0.40 の+cos 型のグラフになる。
(*゜―゜)動きのイメージをそのまま絵にして!!

このグラフから、グラフの式は
$x=+0.4\cos 5t$ と出せる。
（グラフの式は $x=$ 最大値×グラフの型 ωt と立式できるよ(σ・ω・)σ）
ここで、$x=0.20$ となる時刻を聞かれているので、

$0.20=0.4\cos 5t$ となる t を求めればよい。
cos について解くと、

$$\cos 5t=\frac{1}{2}$$

となり、$\cos\theta=\frac{1}{2}$ となるのは、$\theta=\frac{1}{3}\pi$ の時なので

$$5t=\frac{1}{3}\pi$$

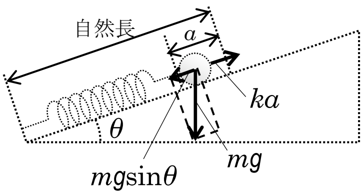
$$t=\frac{1}{15}\pi$$ となる。

2 解答 (1) $a=\dfrac{mg\sin\theta}{k}$ (2) (a) $-kx$ (b) $2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ (c) b (d) b (e) $\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,b$

解説　解説に入る前に、単振動の問題を解くときのコツを記しておく。**『自然長のわかるバネの絵』『振動の中心と、変位最大のところに物体があるときの絵』『適当な変位 x のときの物体の絵（このとき、なるべく x は正の位置で書くとわかりやすい）』の 3 つの絵を必ずかくこと**。面倒かもしれないがこの 3 つを書いておかないと、1 枚の絵に書き込む情報の量が多すぎて、図に書き込みきれなくなるのだ。

(1) この問題は物体のつりあう位置を直接聞いてくる問題である。つりあいを調べることで、振動の中心がどこか求められるので、単振動の問題では必ず通る道である。こうやって問題を用意してくれているのは親切な問題であり、問題が用意されていなくても、『振動の中心は、力のつりあう点』という理解から、自分からつりあう点を出すことができるように習慣づけしておこう。

力のつりあい自体はすごく簡単である。力を書き出し、斜面と平行方向の力でつりあいの式を立てよう。

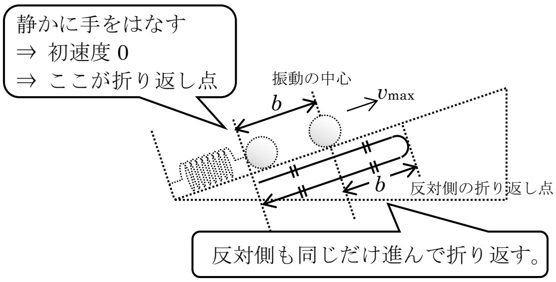


物体に働く力は、重力、垂直抗力、弾性力。の 3 つである。左図では、重力の斜面垂直成分と、垂直抗力はつりあっているので割愛した。斜面平行方向のつりあいを考えれば、

$ka=mg\sin\theta$

$a=\dfrac{mg\sin\theta}{k}$　と力がつりあうときの、ばねの縮みがだせる。

(2) (a)の問題を解く前に、この問題で行う単振動を絵にしてみよう。『振動の中心と、変位最大のところに物体があるときの絵』だ。振動の中心から b だけ引き下げて、静かに手をはなす。このことから次のような絵をかける。

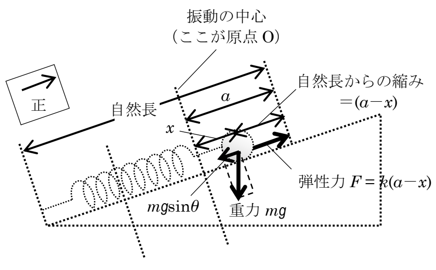


静かに手をはなしたところが折り返し点になり、そこから、反対側にどれくらい進んで折り返すかもわかるのだ。（このイメージが超重要）

そして、この絵に自然長を書き込んでいないことに気づいただろうか。実は単振動のイメージを湧かすとき、自然長はあまり重要ではないのだ
(*´ω`)書き込んでも図が見づらくなるだけ。

ではここまでイメージできたら、(a)の問題を見てみよう。

(a) 斜面上向きを正としたとき、働く力がいくらかを考える。これは、『力を見出し』⇒『運動方程式を立て』⇒『角振動数 ω を求める』という行程の 1 STEP 目である。『適当な変位 x のときの物体の絵』はこれを考えるときに使うのだ。ここでのコツは、変位 x を正の範囲にして絵を書くことだ。そうすると、正負がごちゃごちゃせずわかりやすくなる。



働く力を厳密に考えると、いつも通り、重力、垂直抗力、弾性力、である。これを書き出すと、

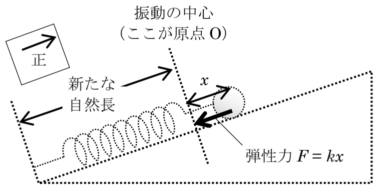
働く力は F は、重力の斜面下向き成分 $mg\sin\theta$ と弾性力 $F=k(a-x)$の差し引きになるので、

$F=k(a-x)\ -\ mg\sin\theta$　となる。これを展開し、
$F=ka-kx\ -\ mg\sin\theta$

これに、(1)で出した関係式、$ka=mg\sin\theta$ を代入すれば解答になる。

しかし、これはややこしい!!　裏ワザを使おう!!

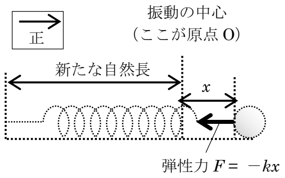
裏ワザとは、『振動の中心を新たなばねの自然長と考えれば、重力を考えなくてよくなる』というものだ。



左図と、すぐ前の上の図をしっかり見比べて、違いを比較してほしい。下の図は、振動の中心を新たなばねの自然長と考えているのだ。すると、ばねの伸びは、x と考えることができる。

このようにのびを考えると、重力を無視してよくなるのだ。
そして、働く力 $F = -kx$ というようにかける。簡単になったね(σ･ω･)σ
（向きが負の向きなので、－がつく。）

(b) 1 回この裏ワザを発動させれば、重力が消えるので、水平バネ振り子と見立てて問題を解いてよくなる。



そう、左図のように頭の中でこの問題を書き換えてよくなるのだ!!
さて、話を戻して、周期を出す問題である。周期を出す問題は、
必ず ω をだす必要がある。ω を出すには、『力を見出し、運動方程式を立てる。（－○○$x = -m\omega^2 x$ の立式のこと）』という手順になる。

今回、働いている力は、$-kx$ なので、$-kx = -m\omega^2 x$ となり、

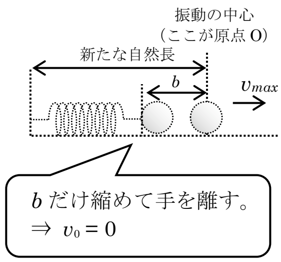
$\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ と ω をだせ、周期 $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ なので、

$T = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{k}{m}}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ と周期を求められる。

(c) この問題は、単振動で最も高い位置にあるときを聞かれているが、もっとも高い位置というのは、上側の折り返し地点である。前ページの一番上から 2 番目の図を見ると、それは振動の中心から b だけ上がった所だとわかる。この問題は、運動のイメージがわいていれば即答できるのだ。

(d) この問題も、結局聞いている部分は(c)と同じなので、b と即答できる。

(e) 速度を聞く系の問題は力学的エネルギー保存則で解いていくことになる。速度が最大になる点は、振動の中心を通過するとき、なので、そこで力学的エネルギー保存則を立てよう。



振動の中心を『新たな自然長』としたときは、重力が消えるので、左図のように水平バネ振り子と見立てて解くことができる。

力学的エネルギー保存の式を立てると、

$$\frac{1}{2}kb^2 = \frac{1}{2}mv_{\max}^2$$

(手を離した瞬間) = (中心を通過する瞬間)

となり、これを解くと、

$v_{\max} = \sqrt{\dfrac{k}{m}}\ b$

となる。