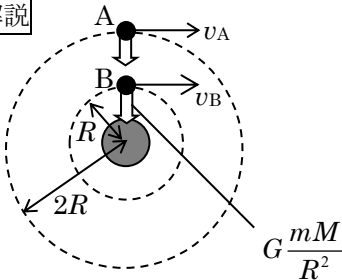


§ A: 公式理解問題

1 《テーマ》 万有引力と円運動

解答 エ

解説



衛星 B について考察する。

地球の中心から衛星 B までの距離を R 、衛星の質量を m 、地球の質量を M と置く。すると、 $G \frac{mM}{R^2}$ の力を地球から受け、これを向心力として円運動を行っているといえる。よって衛星 B の速さ v_B は、

$$m \frac{v_B^2}{R} = G \frac{mM}{R^2} \quad (\leftarrow \text{円運動の運動方程式 } ma = F \text{ だね!!})$$

$$v_B = \sqrt{\frac{GM}{R}} \quad \text{といえる。}$$

同様に A に関しても計算して、 v_A を求める。 $(R \rightarrow 2R, m \rightarrow m)$

$$v_A = \sqrt{\frac{GM}{2R}} \quad \text{となる。これは、} v_B \text{ の } \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ 倍である。よって解答はエ。}$$

質量が同じなら、遠いほどゆっくりとしか運動できないのだ。速すぎると、万有引力が足りなくて円軌道を外れて遠くに飛んで行ってしまふ。

この問題のポイント

この問題では、『質量が同じ』『等速円運動』『半径の比』しか問題で与えられていない。考察に必要な文字をどんどん置いていって、解析をできるようになろう。

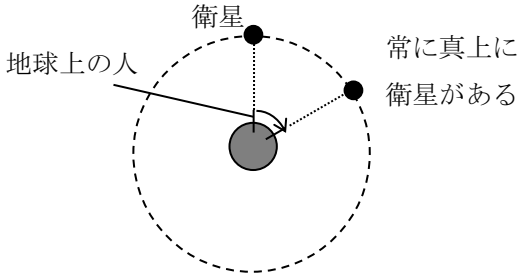
等速円運動をするということは、向心力の大きさが $m \frac{v^2}{r}$ になる。という発想を持てるようになっておこう。

2 《テーマ》 静止衛星

解答 ウ

解説

静止衛星とは、地球の自転と同じ角速度で回る衛星のことである。



地球の自転の角速度を ω とすると、1日1回転なので、 $\omega = 2\pi$ [rad/日] といえる。

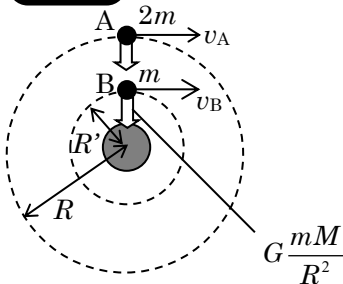
A と B がどちらも静止衛星であるなら、どちらも角速度は ω のはずである。

よって角速度は同じとわかり、解答はウ

3 《テーマ》 静止衛星

解答 ウ

解説



左図のように衛星 A の質量を $2m$ 、半径を R 、衛星 B の質量を m 、半径を R' として考察してみる。

静止衛星なので、A も B も同じ角速度 ω であることを考え、運動方程式 $mR\omega^2 = G \frac{mM}{R^2}$ を立てる。

(ω が情報として出てきているので、 v を使わない方の式を試してみる)

A について

$$2mR\omega^2 = G \frac{2mM}{R^2}$$

B について

$$mR'\omega^2 = G \frac{mM}{R'^2}$$

2式から、 R 、 R' を求めると、

$$R = R' = \sqrt[3]{\frac{GM}{\omega^2}}$$

なんと同じ半径になる。静止衛星は、質量によらず同じ半径になってしまうのだ。静止衛星の軌道には大小様々な静止衛星が飛んでおり、ゴミゴミしている。

また、 $v = r\omega$ の式より、 r と ω が同じなので、静止衛星は全て同じ速度であるということもわかる。

§ B: 概念理解問題

1 《テーマ》 天体の運動

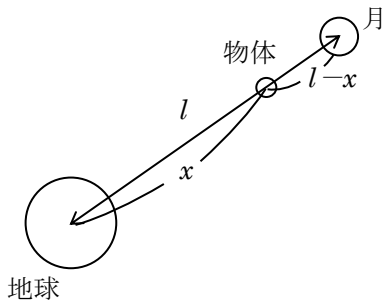
解答 オ

解説 月は、地球の万有引力により、地球の向きへの加速度を確かに得ている。なので、ア、イ、ウのように、月に引力が働いていないから、という系統の答えはすべて違う。衛星と同じように、月も地球に向かう加速度を持って等速円運動をしているだけなのだ。

2 《テーマ》 万有引力の大きさ

解答 オ

解説 地球から適当に置いた物体 m までの距離を x とおくと、物体から月までの距離は $l-x$ となる。これを用いて、力を計算し、つり合いの式を立てると、



地球が物体を引っ張る力

$$F_{\text{地球}} = G \frac{mM}{x^2}$$

つりあいの式は

$$G \frac{mM}{x^2} = G \frac{m \frac{M}{81}}{(l-x)^2}$$

月が物体を引っ張る力

$$F_{\text{月}} = G \frac{m \frac{M}{81}}{(l-x)^2}$$

整理して

$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{81(l-x)^2}$$

$$81(l-x)^2 = x^2 \quad \text{全体で平方根をとって、}$$

$$9(l-x) = x \quad \text{x について解いて}$$

$$x = \frac{9}{10} l$$

計算の仕方はいろいろな工夫があるので、好き好きでよいです。

3 《地表での重力加速度 g 》

解答 イ

解説 地表での重力加速度と万有引力の式を立てると、

$$mg = G \frac{mM}{R^2} \cdots \text{①}$$

この関係式をもとに、 g を半分にするための R を考えると、 R は $\sqrt{2}$ 倍になればよい。
よって解答はイ。

*丁寧にやると、 g が半分になるところの半径を x とおくと、

$$m \frac{g}{2} = G \frac{mM}{x^2} \quad \text{と立式でき、} x \text{ について解くと、}$$

$$x = \sqrt{\frac{2GM}{g}} \quad \text{①式を変形し、} R = \sqrt{\frac{GM}{g}} \text{ となり、これを代入すると}$$

$$x = \sqrt{2}R \quad \text{となる。}$$