§A: 公式理解問題

1 ≪テーマ≫ 語句の理解

解答　(1) $2\pi r = n\lambda$　(2) $m\frac{v^2}{r} = k_0\frac{e^2}{r^2}$

(3) 電子が一番内側の軌道にあり、最も安定している状態

(4) 電子が遷移せず、いずれかの電子軌道に電子があり続ける状態

(5) $n = 2$ 以上の軌道に電子が遷移している状態　（基底状態ではない状態ともいえる）

(6) 電子が遷移するとき、エネルギー準位の差分のエネルギーを持つ光が放出されるので、出てくる光の振動数には規則性があること。式にすると、$h\nu = E_{n'(後)} - E_{n(前)}$　となる。

解説

(1) 量子条件は、電子軌道の長さが、ぴったり波長の整数倍である、という部分である。それを式にすると、$2\pi r = n\lambda$

(2) 電子の加速度は、円運動の公式より $a = \frac{v^2}{r}$、受ける力 F は、クーロン力 $k_0\frac{e^2}{r^2}$である。よって、運動方程式は $m\frac{v^2}{r} = k_0\frac{e^2}{r^2}$

2 ≪テーマ≫ リュードベリ定数

解答 (1) $\Delta E = E_{n'} - E_n = -\frac{2\pi^2 {k_0}^2 me^4}{h^2}\left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2}\right)$

(2) $\frac{1}{\lambda} = \frac{2\pi^2 {k_0}^2 me^4}{ch^3}\left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2}\right)$

解説

(1) 変化と言えば後−前。よって、$\Delta E = E_{n'} - E_n = -\boxed{\frac{2\pi^2 {k_0}^2 me^4}{h^2}\left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2}\right)}$

$n > n'$という関係から、ΔE は負の値であるといえる。

(2) (光のエネルギー$h\nu$) = (電子の失ったエネルギー分)、なので前問の ΔE のマイナスをとり

$$h\nu = \frac{2\pi^2 {k_0}^2 me^4}{h^2}\left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

波の式 $v = f\lambda$ より $c = \nu\lambda$　⇒　$\nu = \frac{c}{\lambda}$

これを代入し、

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{2\pi^2 {k_0}^2 me^4}{h^2}\left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

整理して

$$\frac{1}{\lambda} = \boxed{\frac{2\pi^2 {k_0}^2 me^4}{ch^3}\left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2}\right)}$$

＊ このときの$\frac{2\pi^2 {k_0}^2 me^4}{ch^3}$をリュードベリ定数 R と呼び、$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2}\right)$と書く。

$\boxed{3}$ ≪テーマ≫ 核反応式と α 、β 、γ 崩壊

解答

(1) (ア) ${}^{9}_{4}\mathrm{Be} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \to {}^{12}_{6}\mathrm{C} + {}^{1}_{0}\mathrm{n}$ (核融合)　(イ) ${}^{235}_{92}\mathrm{U} + {}^{1}_{0}\mathrm{n} \to {}^{93}_{38}\mathrm{Sr} + {}^{140}_{54}\mathrm{Xe} + 3 \times {}^{1}_{0}\mathrm{n}$(核分裂)

(ウ) ${}^{14}_{6}\mathrm{C} \to {}^{14}_{7}\mathrm{N} + {}^{0}_{-1}e$ (β崩壊)

(2) ${}^{208}_{82}\mathrm{Pb}$　　α 崩壊：6 回　　β 崩壊：4 回

解説

(1) **核反応式は『質量数の和』と、『原子番号の和』が、両辺で同じになる。**

和 13 ⇐ 和 13

(ア) $\underbrace{{}^{\square}_{4}\mathrm{Be} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}}_{和\,6} \to \underbrace{{}^{12}_{\square}\square + {}^{1}_{0}\mathrm{n}}_{和\,6}$

和 6 ⇒ 和 6

和 236 ⇒ 和 236

(イ) $\underbrace{{}^{235}_{92}\mathrm{U} + {}^{1}_{0}\mathrm{n}}_{和\,92} \to \underbrace{{}^{93}_{\square}\mathrm{Sr} + {}^{\square}_{54}\mathrm{Xe} + 3 \times {}^{1}_{0}\mathrm{n}}_{和\,92}$

和 92 ⇒ 和 92

和 14 ⇒ 和 14

(ウ) ${}^{14}_{6}\mathrm{C} \to {}^{\square}_{\square}\square + {}^{0}_{-1}e$($\beta$線)

和 6 ⇒ 和 6

(2) α 崩壊は、${}^{A}_{Z}\mathrm{X} \to {}^{A-4}_{Z-2}\mathrm{X'} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}$　　β 崩壊は${}^{A}_{Z}\mathrm{X} \to {}^{A}_{Z+1}\mathrm{X'} + {}^{0}_{-1}\mathrm{e}$　という変化を起こすが、注目したいのは、『質量数 A を変えられるのは α 崩壊だけであること』である。

よって、方針としては、

① まずは質量数をヒントに α 崩壊の回数を確定させる

その後、

② 原子番号 Z を合わせるように、β 崩壊の回数を確定させる　　という手順で行う。

${}^{232}_{90}\mathrm{Th} \to {}^{\square}_{82}\mathrm{Pb}$

α 崩壊により質量数は 4 ずつ減っていくので、

1 回	2 回	3 回	4 回	5 回	6 回	7 回
228 →	224 →	220 →	216 →	212 →	208 →	204

と変化していき、選択肢にあるのは、${}^{208}_{82}\mathrm{Pb}$ のみ。

よって、どの Pb になるかは、${}^{208}_{82}\mathrm{Pb}$で確定し、α 崩壊は 6 回となる。

次に 6 回 α 崩壊をした後を考えて、β 崩壊の回数を確定させる。

$${}^{232}_{90}\mathrm{Th} \xrightarrow[]{6\,回\ \alpha\,崩壊} {}^{232-(4\times 6\,回)}_{90-(2\times 6\,回)}\square \xrightarrow{計算} {}^{208}_{78}\square \xrightarrow{?\,回\ \beta\,崩壊} {}^{208}_{82}\mathrm{Pb}$$

原子番号 Z は 4 増えないといけない。

β 崩壊 1 回で原子番号 Z は 1 増えるので、

β 崩壊の回数は 4 回で確定となる。

$\boxed{4}$ ≪テーマ≫ 半減期

解答 (1) $\dfrac{7}{8}$　　(2) (a) 4 分　(b) 3.1 %　(c) 2.4 分

解説

(1) 半減期が 1 時間ということは、3 時間では 3 回 $\dfrac{1}{2}$倍になる、ということである。よって、$\dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{8}$ の量になる。これは、崩壊せずに残っている量なので、崩壊した量は、全体の$\dfrac{7}{8}$といえる。

＊ この問題に公式を適用してみると、以下のようになる。
残った量を N、最初の量を N_0 として、

$$N = N_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} \quad \Rightarrow \quad N = N_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{1}} \quad \Rightarrow \quad N = N_0 \times \frac{1}{8}$$

この式を見て、残った量が最初の$\dfrac{1}{8}$であることを示している、と読めるようになっておこう。

(2)

(a) 12 分で$\dfrac{7}{8}$の量が他の物質に変わったということは、残っていたのは$\dfrac{1}{8}$であり、

公式 $N = N_0 \times \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}}$ この部分が$\dfrac{1}{8}$ということである。

半減期を T として、このことを立式すると、

$$\frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{12}{T}}$$

となる。$\dfrac{12}{T}$ =3 と言えるので T = 4 分

(b) 半減期が 4 分で、20 分経過しているので、半分になるのが $\dfrac{t}{T} = \dfrac{20}{4} = 5$ 回、起きているということである。よって、$\left(\dfrac{1}{2}\right)^5 = \dfrac{1}{32} \fallingdotseq 3.1$ % 残っているといえる。

(c)　これまでの問題のように、半減期 T と経過時間 t がぴったりした数なら、暗算でも処理できるが、(c)のように中途半端な時間だと、指数・対数計算をしないと処理できない。

全体が $\dfrac{2}{3}$ になるということは、

$\boxed{\text{公式}}$ $N = N_0 \times \underbrace{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}}$

この部分が$\dfrac{2}{3}$ということである。

よって、経過時間を t 分とすると、$\dfrac{2}{3} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{4}}$

両辺の対数をとると、

$$\log_{10}\frac{2}{3} = \log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{4}}$$

$$\log_{10}2 - \log_{10}3 = \log_{10}1^{\frac{t}{4}} - \log_{10}2^{\frac{t}{4}}$$

$$\log_{10}2 - \log_{10}3 = 0 - \frac{t}{4}\log_{10}2$$

$$0.30 - 0.48 = -\frac{t}{4} \times 0.30$$

よって、

$$t = \frac{4 \times 0.18}{0.30} = 2.4\ \text{分}$$

§B:概念理解問題

$\boxed{1}$ ≪テーマ≫ 単位

$\boxed{\text{解答}}$ イ

$\boxed{\text{解説}}$ 電子ボルトはエネルギーの単位．電気素量を $e=1.6\times10^{-19}$〔C〕とすると，

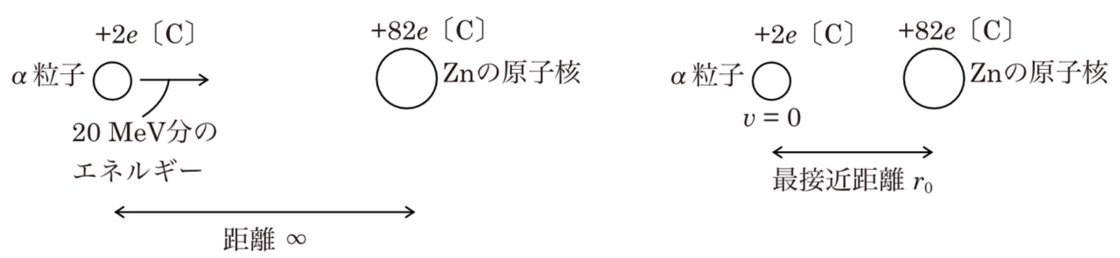
1.6×10^{-19}〔J〕＝1〔電子ボルト〕

電子ボルトは〔eV〕とも書く．

$\boxed{2}$ ≪テーマ≫ 粒子の運動と静電気力による位置エネルギー

$\boxed{\text{解答}}$ 1.2×10^{-14}〔m〕

$\boxed{\text{解説}}$ 前と後でエネルギー保存則を立てる．



《作図のポイント》

・ α粒子はヘリウムの原子核なので，陽子を2つ持つ． → 電荷は $2e$〔C〕

・亜鉛の原子核は Z = 82 なので，陽子を 82 個持つ． → 電荷は $82e$〔C〕

・はじめのα粒子のエネルギー20MeV は運動エネルギーとして持っている．

・はじめの粒子間の距離は無限大である．

・亜鉛粒子が静止し続けているとすれば，両者の速度が0になったときが最接近の瞬間である．

（質量数の差が大きいので，亜鉛は静止したままでよいという設定にしている．質量数が近いもの同士だったら，このような近似はできない．その際は運動量保存の式を立てて連立する．）

《エネルギー保存の式》

前　＝　後

$$\underbrace{20_{[\mathrm{MeV}]}+0}_{\text{α粒子，亜鉛の原子核の運動エネルギー}}\ \underbrace{+\,k\frac{2e\cdot 82e}{\infty}}_{\text{静電気力による位置エネルギー}} = \underbrace{0+0}_{\text{運動エネ}}\ \underbrace{+\,k\frac{2e\cdot 82e}{r_0}}_{\text{静電気力による位置エネルギー}}$$

20〔MeV〕の単位を〔J〕に直すと，

$20\times10^6\cdot e$〔J〕（∵ M(メガ) = 10^6，1〔eV〕= e〔J〕）

前の静電気力による位置エネルギー

$$k\frac{2e\cdot 82e}{\infty}=0$$

ということに注意して整理すると，

$$20\times10^6\cdot e=k\frac{164e^2}{r_0}$$

r_0について解いて

$$r_0=k\frac{164e}{20\times10^6}$$

k，eの値を代入して，

$$r_0=9.0\times10^9\cdot\frac{164\cdot1.6\times10^{-19}}{20\times10^6}$$

$$=118.08\times10^{-16}$$

$$\fallingdotseq 1.2\times10^{-14}\text{〔m〕}$$

＊ 静電気力による位置エネルギーを，α粒子の分と，亜鉛の原子核の分で2つ式に入れてしまう人がいるが，それは誤り．空間が持つエネルギーと考えよう．

2物体をバネでつないだときの，弾性力による位置エネルギーも同様にバネが持つエネルギーなので，物体それぞれが弾性エネルギーを持つとしたら誤りなのである．

3 ≪テーマ≫エネルギー準位

解答 (1) 6.0 eV　(2) 基底状態：$n=1$の状態　励起状態：$n=1$以外の状態

(3) 放出できない．

$n=1$のときが最もエネルギーが小さく，それよりも低い状態に遷移できないから．

解説

(1) イオン化エネルギーは$n=1$から$n=\infty$（イオン化限界）に電子が遷移する際のエネルギーである．よって 6.0 eV

(2) エネルギー準位が最も低いときを基底状態という．

(3) 光子を放出するのは，エネルギー準位が高いところから低いところへ落ちるときである．失う分のエネルギーが光子になっているイメージである．n=1だと，そこからエネルギーが低い位置への遷移は起きないので，光子は放出されない．

§C:概念理解問題

$\boxed{1}$ ≪テーマ≫ 質量の持つエネルギーとアインシュタインの式

$\boxed{\text{解答}}$

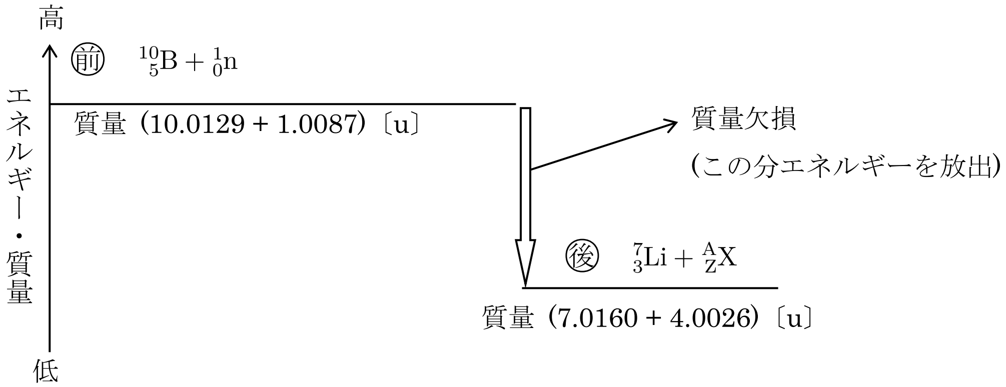
(1) ${}^{4}_{2}\mathrm{He}$　(2) 2.79 MeV　　(3) Li : 1.01 MeV　X : 1.78 MeV

$\boxed{\text{解説}}$

(1) ${}^{10}_{5}\mathrm{B} + {}^{1}_{0}\mathrm{n} \to {}^{7}_{3}\mathrm{Li} + {}^{A}_{Z}\mathrm{X}$ の核反応式を完成させると、A が 4、Z が 2 となる。
よって、X は ${}^{4}_{2}\mathrm{He}$

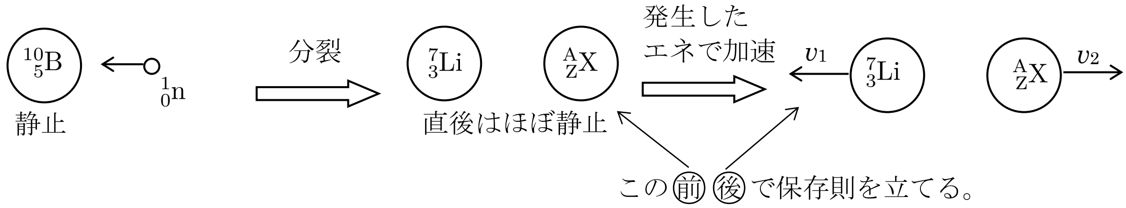
(2) 質量の持つエネルギーは $E = mc^2$ で計算できるが、この式の m には単位〔kg〕での質量が入る。今回は単位〔u〕で出題されているので、この式は使えないのだ。代わりに『1 u の質量は 9.3×10^2 MeV のエネルギー』という説明がある。これは、$E = mc^2$ を用いて
1 u を kg に直して計算したエネルギーを示しており、これを元に考えていけばよいのだ。

エネルギー・質量図を書いて、質量欠損を考えてみる。



前と後で、質量欠損を計算すると 0.003 u とわかり、問題文より発生するエネルギーE は 1 u あたり 9.3×10^2 MeV なので、発生するエネルギーE は
$E = 0.003 \times 9.3 \times 10^2$ MeV $= 2.79$〔MeV〕

(3) この反応は核分裂反応で、以下のような動き方をしている。



質量欠損によって生じたエネルギーが爆発して、分裂した原子が互いに逆向きに飛ばすのだ。爆発による力は、原子同士の内力といえるので、運動量は保存するのである。

質量数で質量比を考えることができ、Li の質量を $7m$、He の質量を $4m$ と文字でおくことができる。これを用いて立式をする。

運動量保存

$0 = -7mv_1 + 4mv_2$ … ①式

エネルギーの式

前の運動エネ ＋ 発生したエネ E ＝ 後の運動エネ(2 つの合計)

$0 + 2.79$〔Mev〕 $= \frac{1}{2}\cdot 7mv_1{}^2 + \frac{1}{2}\cdot 4mv_2{}^2$ … ②式

さて、Li の運動エネルギーは②式の $\frac{1}{2}\cdot 7mv_1{}^2$ の部分であり、その大きさを求めたい。

①式を変形して、

$v_2 = \frac{7}{4}v_1$

これを②式に代入して v_2 を消去

$2.79 = \frac{1}{2}\cdot 7mv_1{}^2 + \frac{1}{2}\cdot 4m(\frac{7}{4}v_1)^2$

整理して、

$2.79 = \frac{1}{2}\cdot 7mv_1{}^2 + \frac{1}{2}\cdot \frac{49}{4}mv_1{}^2$

$2.79 = \frac{1}{2}\cdot \frac{77}{4}mv_1{}^2$

Li の運動エネルギー $\frac{1}{2}\cdot 7mv_1{}^2$ の大きさを知りたいので、両辺に $\frac{4}{77}\times 7$ をかけて

$2.79\times\frac{4}{77}\times 7 = \frac{1}{2}\cdot\frac{77}{4}mv_1{}^2\times\frac{4}{77}\times 7$

$2.79\times\frac{4}{11} = \frac{1}{2}\cdot 7mv_1{}^2$

$\therefore \frac{1}{2}\cdot 7mv_1{}^2 = 2.79\times\frac{4}{11} = 1.014\cdots \fallingdotseq 1.01$ MeV …Li の運動エネルギー

②式にこれを代入し、

$2.79 = 1.014 + \frac{1}{2}\cdot 4mv_2{}^2$

$\therefore \frac{1}{2}\cdot 4mv_2{}^2 = 1.776 \fallingdotseq 1.78$ MeV …X の運動エネルギー