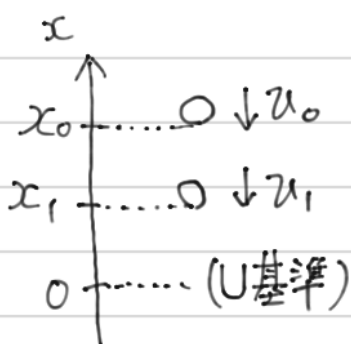


116

- 「位置エネルギーの基準」について.

位置エネルギーで大切なのは「差」であり、基準はど=にとってもよいのだ。



左図のようなモデルで、力学エネの保存の式を立てると

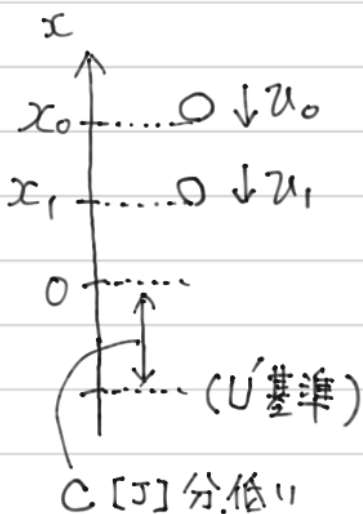
$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgx_0 = \frac{1}{2}mv_1^2 + mgx_1$$

となり、変形すると

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = mgx_0 - mgx_1$$

(運動エネルギーの変化) = (重力エネルギーの減少量)

という風に書けば、「重力エネルギーの差」がポイントなのかわかる。



これは、Cを定数として

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgx_0 + C = \frac{1}{2}mv_1^2 + mgx_1 + C$$

と書いても支障がない。これは、「 $mgx_0 + C$ 」や「 $mgx_1 + C$ 」が、基準がもとより低いときの位置エネルギーとして、低い分のエネルギー量をCとすると、

$$U' = mgx + C$$

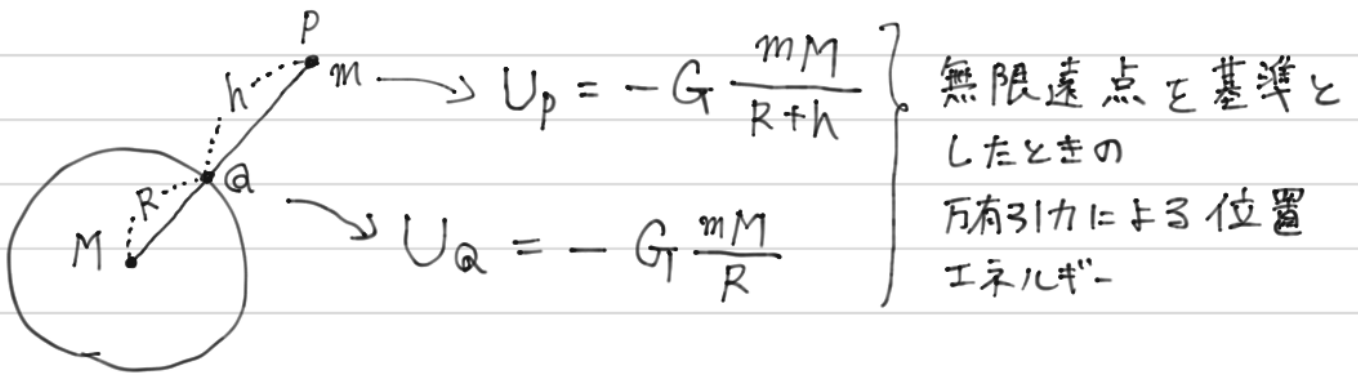
と重力エネルギーの式を書けるのだ。(左図参照)

さて、万有引力の位置エネルギーは、無限遠点を基準にすると。

$$U = -G \frac{mM}{x}$$

と計算できるけれど、基準をかえたらどう書けるか、というのが今回の問題である。

116 続き



ここで Q を基準としたとき、基準の差によるエネルギーの差を定数 C とおき、基準がちがうときのエネルギー U' を書くと

$$U'_Q = -G \frac{mM}{R} + C$$

となり、 $U'_Q = 0$ なので

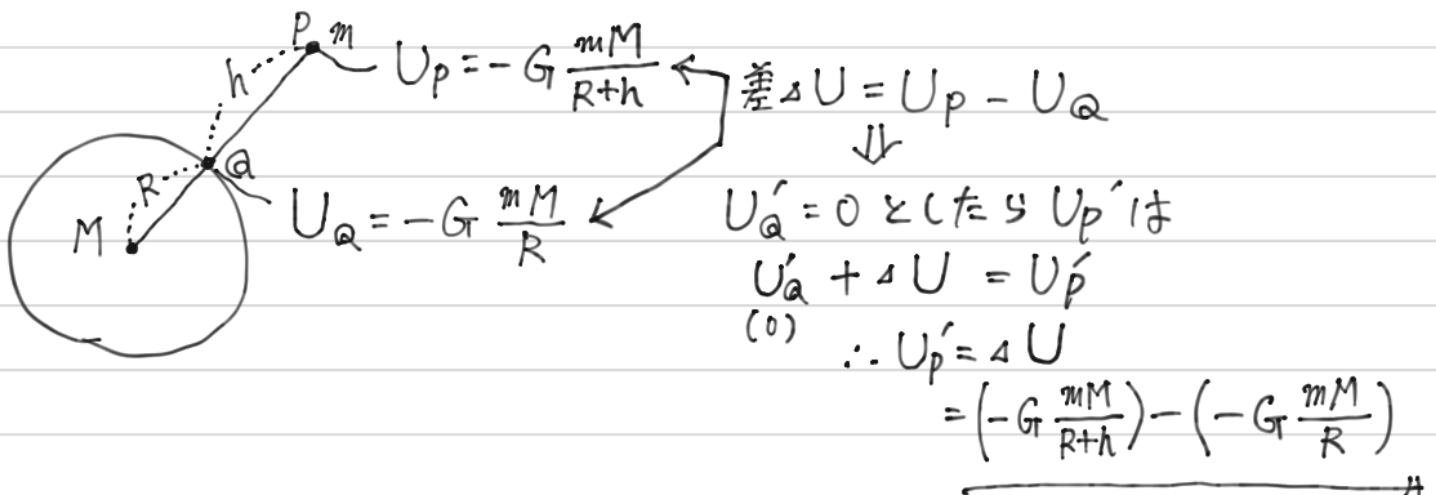
$$C = G \frac{mM}{R}$$

となる。すると U'_P は

$$U'_P = -G \frac{mM}{R+h} + C$$

$$= -G \frac{mM}{R+h} + G \frac{mM}{R} = \underline{GMm \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h} \right)} \#$$

※ もっとがみくだいて解釈してみる。



116 続き

(2) $(1+\alpha)^n \doteq 1+n\alpha$ の近似で指数を下げることを目指す。
 $\alpha \ll 1$ である必要があるので $\frac{h}{R}$ を作る。

$$\begin{aligned} U_p' &= GmM \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h} \right) \\ &= \frac{GmM}{R} \left(1 - \frac{R}{R+h} \right) \\ &= \frac{GmM}{R} \left\{ 1 - \left(\frac{R+h}{R} \right)^{-1} \right\} \\ &= \frac{GmM}{R} \left\{ 1 - \left(1 + \frac{h}{R} \right)^{-1} \right\} \\ &\doteq \frac{GmM}{R} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{h}{R} \right) \right\} \quad \left. \vphantom{\frac{GmM}{R}} \right\} \text{近似} \\ &= \frac{GmM}{R^2} h \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

ここで地表での万有引力と mg の関係から G を消去する。

$$G \frac{mM}{R^2} = mg$$

① に代入して

$$\underline{U_p' = mgh}$$

※ $U = mgh$ は、地表付近での重力エネルギー

$U = -G \frac{mM}{x}$ は、地表から離れたときの重力エネルギー

万有引力の問題で $U = mgh$ は使わないようにしよう。