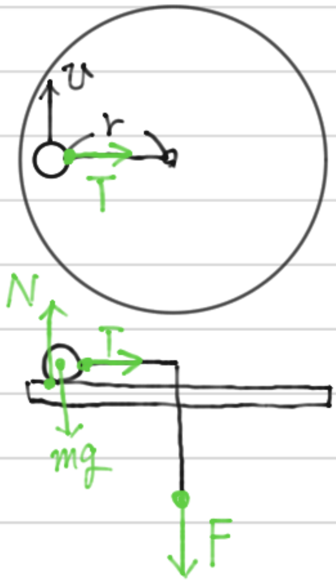
$\boxed{125}$ 図だと面が斜めに見えるが『水平面』と書いてあるので注意

(イ)

上から見る

横から見る



ここで、糸が軽いことから、

$T=F$

であり、Tがそのまま向心力となる。

円運動の運動方程式より

$$m\frac{v^2}{r}=F_{(=T)}\ _{\#}\ (イ)$$

(ロ)

運動エネルギーと仕事の関係より

$$\Delta K=W$$
$$=F\cdot\Delta r$$
$$=m\frac{v^2}{r}\cdot\Delta r$$

よって

$$\frac{\Delta K}{K}=\frac{m\frac{v^2}{r}\cdot\Delta r}{\frac{1}{2}mv^2}=\frac{2\Delta r}{r}\ _{\#}\ (ロ)$$

(ハ)

問題文の誘導より

$$\frac{\Delta K}{K}=-\frac{2\Delta r}{r}+\frac{2\Delta w}{w}$$

これと(ロ)の答えより

$$\frac{2\Delta r}{r}=-\frac{2\Delta r}{r}+\frac{2\Delta w}{w}$$

$$\therefore\ \frac{\Delta w}{w}=\frac{2\Delta r}{r}\ _{\#}$$

$\boxed{125}$ (ハ) 続き

※$\boxed{\text{補足}}$

誘導にある $\dfrac{\Delta K}{K} = -\dfrac{2\Delta r}{r} + \dfrac{2\Delta\omega}{\omega}$ を求めてみる.

$K = \frac{1}{2}mv^2$ であり, $v = r\omega$ なので

$$K = \frac{1}{2}mr^2\omega^2$$

よって

$$\Delta K = K' - K$$
$$= \frac{1}{2}m(r-\Delta r)^2(\omega+\Delta\omega)^2 - \frac{1}{2}mr^2\omega^2$$
$$= \frac{1}{2}mr^2\omega^2\left(1-\frac{\Delta r}{r}\right)^2\left(1+\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)^2 - \frac{1}{2}mr^2\omega^2$$

$(1+\alpha)^n \fallingdotseq 1+n\alpha$ と近似

$$\fallingdotseq \frac{1}{2}mr^2\omega^2\left(1-2\frac{\Delta r}{r}\right)\left(1+2\frac{\Delta\omega}{\omega}\right) - \frac{1}{2}mr^2\omega^2$$
$$= \frac{1}{2}mr^2\omega^2\left(1+\frac{2\Delta\omega}{\omega}-\frac{2\Delta r}{r}-\frac{4\Delta r\Delta\omega}{r\omega}\right) - \frac{1}{2}mr^2\omega^2$$

$\dfrac{\Delta r\Delta\omega}{r\omega} \fallingdotseq 0$ と近似

$$\fallingdotseq \frac{1}{2}mr^2\omega^2\left(\cancel{1}+\frac{2\Delta\omega}{\omega}-\frac{2\Delta r}{r}\right) - \cancel{\frac{1}{2}mr^2\omega^2}$$
$$= K\left(-\frac{2\Delta r}{r}+\frac{2\Delta\omega}{\omega}\right) \quad \left(\because K = \frac{1}{2}mr^2\omega^2\right)$$
$$\Rightarrow \frac{\Delta K}{K} = \left(-\frac{2\Delta r}{r}+\frac{2\Delta\omega}{\omega}\right)$$

この計算を自分でできる必要は無く、誘導にのって(ハ)の答えをだせれば OK である.

$\boxed{125}$ 続き

(ニ)

(ロ)、(ハ)より

$$\frac{\Delta k}{k} = \frac{\Delta w}{w}$$

このパーツがでてくるように $\dfrac{k+\Delta k}{w+\Delta w}$ を変形して

$$\frac{\Delta k}{k} = \frac{\Delta w}{w}$$

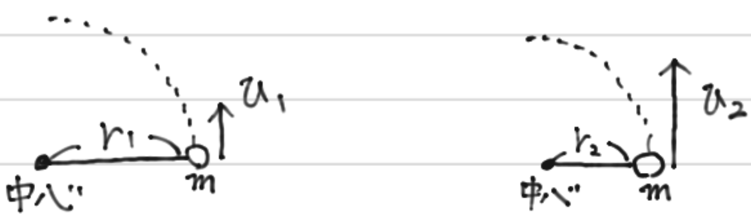
$$\frac{k+\Delta k}{w+\Delta w} = \frac{1+\frac{\Delta k}{k}}{1+\frac{\Delta w}{w}} \cdot \frac{k}{w}$$

$$= \frac{1+\frac{\Delta w}{w}}{1+\frac{\Delta w}{w}} \cdot \frac{k}{w} = \frac{k}{w}$$

$$\Rightarrow \frac{k+\Delta k}{w+\Delta w} = \frac{k}{w}$$ ← $\frac{k}{w}$ は変化しない、といえるのだ。

※ 角運動量の保存について

入試でも使う場面があるので頭の片隅に入れておこう。



$$m r_1 v_1 = m r_2 v_2$$

$$\Rightarrow r_1 v_1 = r_2 v_2$$ (中心方向の力のみがはたらくとき成立)

角運動量の保存は、面積速度一定の法則と同じことを示す。万有引力でたてている式だが、万有引力以外でもたまに使う。