362

誘導に従って考えていこう。

(イ)

ϕが大きくなると、$1-\cos\phi$は大きくなっていく。($\because$ $0 \leqq \phi \leqq 90°$)

よって、グラフから読みとると、ϕが増加すると$\Delta\lambda$も増加するとわかる。 //(イ)

(ロ)

光子のエネルギーは $E=h\nu \xrightarrow{v=f\lambda より} E=\frac{hc}{\lambda}$

電子のエネルギーは $K=\frac{1}{2}mv^2$

これで計算を行うと、エネルギーの保存の式は

前 後

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{hc}{\lambda'} \quad \cdots ①$$ //(ロ)

(ハ)(ニ)

光子の運動量は $p=\frac{E}{c} \xrightarrow{E=h\nu より} \frac{h\nu}{c} \xrightarrow{v=f\lambda より} \frac{h\frac{c}{\lambda}}{c} \to \frac{h}{\lambda}$

電子の運動量は $p=mv$

これで計算を行うと、運動量の保存の式は

前 後

入射方向: $\frac{h}{\lambda} = mv\cos\beta + \frac{h}{\lambda'}\cos\phi \quad \cdots ②$ //(ハ)

垂直方向: $0 = mv\sin\beta - \frac{h}{\lambda'}\sin\phi \quad \cdots ③$ //(ニ)

(ホ)

②式を変形して

$$mv\cos\beta = \frac{h}{\lambda} - \frac{h}{\lambda'}\cos\phi \quad \cdots ②'$$ //(ホ)

362 続き

(ヘ)

③式を変形して

$$m v \sin\beta = \frac{h}{\lambda'}\sin\phi \quad \cdots ③'$$

// (ヘ)

(ト)

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ を利用して、βを消去する。

$②'^2 + ③'^2$ をすると

$$(m v \cos\beta)^2 + (m v \sin\beta)^2 = \left(\frac{h}{\lambda} - \frac{h}{\lambda'}\cos\phi\right)^2 + \left(\frac{h}{\lambda'}\sin\phi\right)^2$$

$$m^2 v^2 (\cos^2\beta + \sin^2\beta) = \frac{h^2}{\lambda^2} - \frac{2h^2\cos\phi}{\lambda\lambda'} + \frac{h^2}{\lambda'^2}(\cos^2\phi + \sin^2\phi)$$

$$m^2 v^2 = \frac{h^2}{\lambda^2} - \frac{2h^2\cos\phi}{\lambda\lambda'} + \frac{h^2}{\lambda'^2} \quad \cdots ④$$

// (ト)

(チ)

①式 $\frac{hc}{\lambda} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{hc}{\lambda'}$ を m 倍して m^2v^2 の形を作ると

$$\frac{mhc}{\lambda} = \frac{1}{2}m^2v^2 + \frac{mhc}{\lambda'}$$

$$\Rightarrow m^2v^2 = 2mhc\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right)$$

// (チ)

※ これ以降の式変形も自分で追跡して

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\phi)$$

の結論まで導けるようになっておきたい。