365

(原子の持つエネルギーの減少量) = (でてくる光子のエネルギー)
という式は、光子を含んだ際のエネルギーの保存の式といえる。

$$E_2 - E_1 = h\nu$$

$$\Rightarrow \underbrace{E_2}_{前} = \underbrace{E_1 + h\nu}_{後}$$

これを使って考えてみる。

図1より E_2, E_1, ν_0 の関係式を作っておくと

$$E_2 - E_1 = h\nu_0 \quad \cdots ①$$

図2においては、運動量保存と、エネルギーの保存の式がたてられる。

運動量の保存

$$Mv = Mv' + \frac{h\nu'}{c} \quad \cdots ②$$

エネルギーの保存

$$\underbrace{E_2 + \frac{1}{2}Mv^2}_{前} = \underbrace{E_1 + \frac{1}{2}Mv'^2 + h\nu'}_{後} \quad \cdots ③$$

②より

$$v' = v - \frac{h\nu'}{Mc} \quad \cdots ②'$$

①、②' を用いて③式から v', E_1, E_2 を消去する。

$$E_2 + \frac{1}{2}Mv^2 = E_1 + \frac{1}{2}Mv'^2 + h\nu'$$

$$\Rightarrow (E_2 - E_1) = \frac{1}{2}M(v'^2 - v^2) + h\nu'$$

①より

$$\Rightarrow h\nu_0 = \frac{1}{2}M(v'^2 - v^2) + h\nu'$$

$\boxed{365}$ 続き

$$\Rightarrow h\nu_0 = \frac{1}{2}M(v'+v)(v'-v) + h\nu'$$

$$\Rightarrow h\nu' = h\nu_0 - \frac{1}{2}M(v'+v)(v'-v)$$

②より

$$\Rightarrow h\nu' = h\nu_0 - \frac{1}{2}M(v'+v)\left(v-\frac{h\nu'}{Mc}-v\right)$$

$$= h\nu_0 - \frac{1}{2}M(v'+v)\left(-\frac{h\nu'}{Mc}\right)$$

ここで

$v'-v \ll v$ という条件より、近似式 $\dfrac{v'+v}{2} \fallingdotseq v$ が成り立ち

$$h\nu' \fallingdotseq h\nu_0 - \frac{1}{2}M\cdot 2v\left(-\frac{h\nu'}{Mc}\right)$$

$$= h\nu_0 + Mv\left(\frac{h\nu'}{Mc}\right)$$

$$= h\nu_0 + \frac{vh\nu'}{c}$$

$$\Rightarrow \nu'\left(1-\frac{v}{c}\right) = \nu_0$$

$$\therefore \nu' = \frac{\nu_0}{1-\frac{v}{c}} = \underline{\frac{c}{c-v}\nu_0}_{\,//}$$