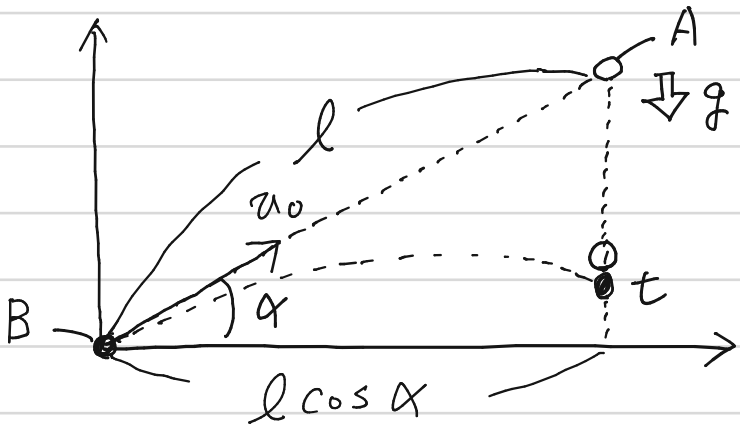
16



(1) 横切るのは●が水平に $l\cos\alpha$ 進んだときである。

⇓

水平方向の運動から考える。

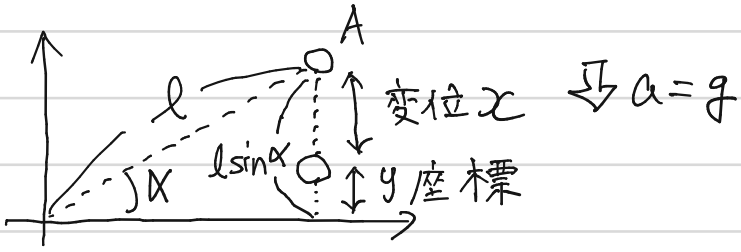
水平方向は速さ $v_0\cos\alpha$ の等速運動をするので

$x = vt$ より

$$l\cos\alpha = v_0\cos\alpha \cdot t$$

$$\therefore t = \frac{l}{v_0} \quad (イ)$$

(2) Aの鉛直方向の運動は初速度0で加速度gの等加速度運動である。



図より

$$(y座標) = l\sin\alpha - x$$

等加速度運動の式 $x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ より

$$x = 0 + \frac{1}{2}gt^2$$

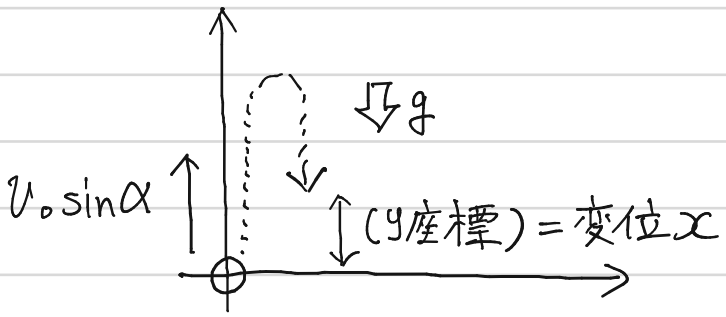
$$x = \frac{1}{2}g\left(\frac{l}{v_0}\right)^2 \quad \downarrow t = \frac{l}{v_0} を代入$$

これを代入して

$$(y座標) = l\sin\alpha - \frac{1}{2}g\left(\frac{l}{v_0}\right)^2 \quad (ウ)$$

16 続き

(3) Bの鉛直方向の運動は初速度 $v_0 \sin\alpha$ で上向きに投げだす運動であることに注意して計算する.



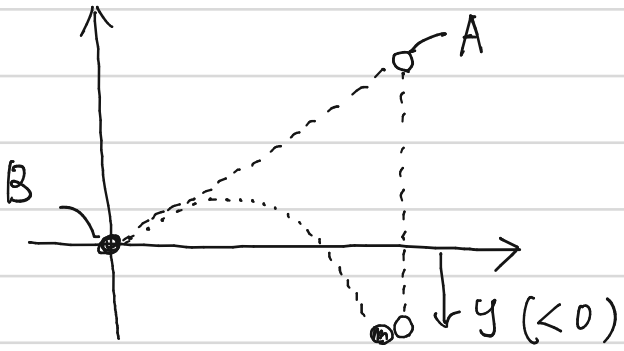
$x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$ より

$$(y\text{座標}) = v_0 \sin\alpha \cdot t + \frac{1}{2}(-g)t^2$$

$t = \frac{l}{v_0}$ を代入

$$= \underline{v_0 \sin\alpha \cdot \frac{l}{v_0} - \frac{1}{2} g \left(\frac{l}{v_0}\right)^2} \quad // (ハ)$$

(4) Aにあたる前に地面に落ちてしまわない条件を聞かれている.



このような軌道をとると、地面に先にあたってしまう.
⇒ $y > 0$ ならあたらない

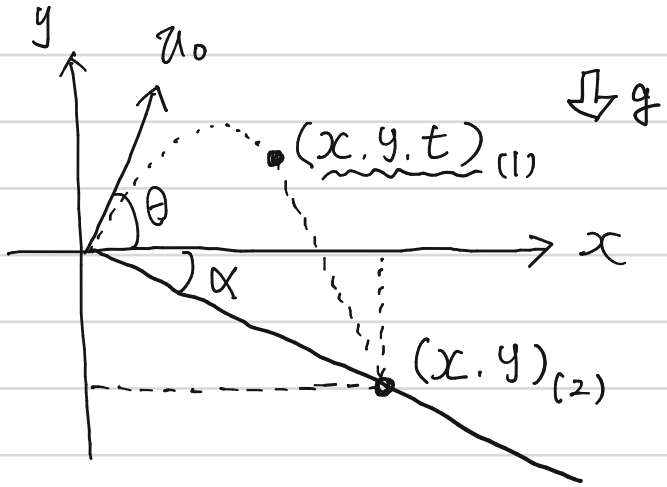
前問(3)の解答を利用し、条件式 $y > 0$ を示すと.

$$v_0 \sin\alpha \cdot \frac{l}{v_0} - \frac{1}{2} g \left(\frac{l^2}{v_0}\right) > 0$$

v_0 について解いて

$$v_0^2 > \frac{gl}{\sin\alpha} \Rightarrow \therefore \underline{v_0 > \sqrt{\frac{gl}{\sin\alpha}}} \quad //$$

$\boxed{17}$



(1) 斜方投射の計算で求める

$\boxed{x}$ 速さ $v_0\cos\alpha$ の等速運動なので $x=vt$ より

$$x = v_0\cos\theta\cdot t \quad \cdots ①$$

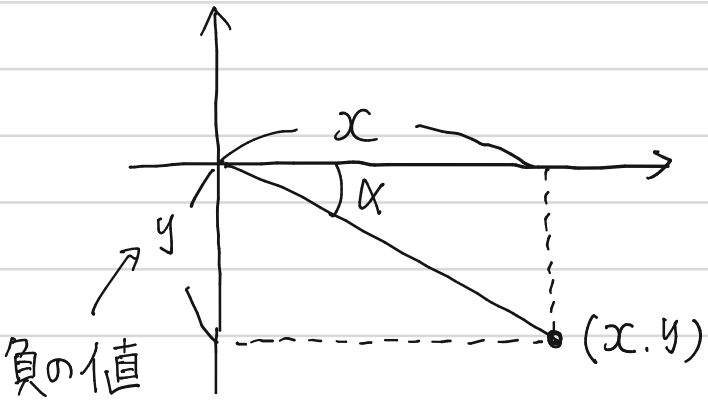
$\boxed{y}$ 初速度 $v_0\sin\theta$ の等加速度運動なので

$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ より

$$y = v_0\sin\theta\cdot t + \frac{1}{2}(-g)t^2$$

$$\Rightarrow \quad y = v_0\sin\theta\cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \quad \cdots ②$$

(2)



左図より

$$y = -x\tan\alpha \quad \cdots ③$$

17 続き

(3) ③式に①.②式を代入して

$$v_0 \sin\theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 = -v_0 \cos\theta \cdot t \cdot \tan\alpha$$

tについて解いて

$$t = \frac{2v_0(\sin\theta + \cos\theta \tan\alpha)}{g}$$ ← これを答えとしてOK

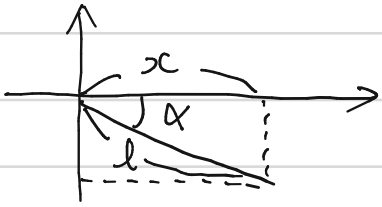
変形して

$$t = \frac{2v_0\left(\sin\theta + \cos\theta \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)}{g}$$

加法定理

$$t = \frac{2v_0(\sin\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha)}{g\cos\alpha} = \frac{2v_0\sin(\theta+\alpha)}{g\cos\alpha}$$

(4)



上図より $l\cos\alpha = x$ なので

$$l = \frac{x}{\cos\alpha}$$

① 式：$x = v_0\cos\theta \cdot t$ を代入.

$$l = \frac{v_0\cos\theta \cdot t}{\cos\alpha}$$

(3)の答えを代入

$$l = \frac{v_0\cos\theta}{\cos\alpha} \cdot \frac{2v_0\sin(\theta+\alpha)}{g\cos\alpha}$$

$$l = \frac{\boxed{2}\boxed{v_0^2}\boxed{\sin(\theta+\alpha)\cos\theta}}{g\cos^2\alpha}$$

$\theta_1 = \theta + \alpha$, $\theta_2 = \theta$ とすると
問題文の関係式を用いて
$2\sin\theta_1\cos\theta$
$= \sin(\theta_1+\theta_2) + \sin(\theta_1-\theta_2)$
とできる。

$$l = \frac{v_0^2\{\sin(\overbrace{\theta+\alpha}^{\theta_1}+\overbrace{\theta}^{\theta_2}) + \sin(\overbrace{\theta+\alpha}^{\theta_1}-\overbrace{\theta}^{\theta_2})\}}{g\cos^2\alpha}$$

$$\therefore\ l = \frac{v_0^2\{\sin(2\theta+\alpha) + \sin\alpha\}}{g\cos^2\alpha}$$

17 続き

(5) 前問(4)の l が最大となる θ を解けばよい。

$$l = \frac{v_0^2\{\boxed{\sin(2\theta+\alpha)} + \sin\alpha\}}{g\cos^2\alpha}$$

ここが変数となり、1となるとき最大

$\sin(2\theta+\alpha) = 1$ を θ について解いて

$$2\theta + \alpha = 90^\circ$$

$$2\theta = 90^\circ - \alpha$$

$$\therefore \theta = \frac{90^\circ - \alpha}{2}$$

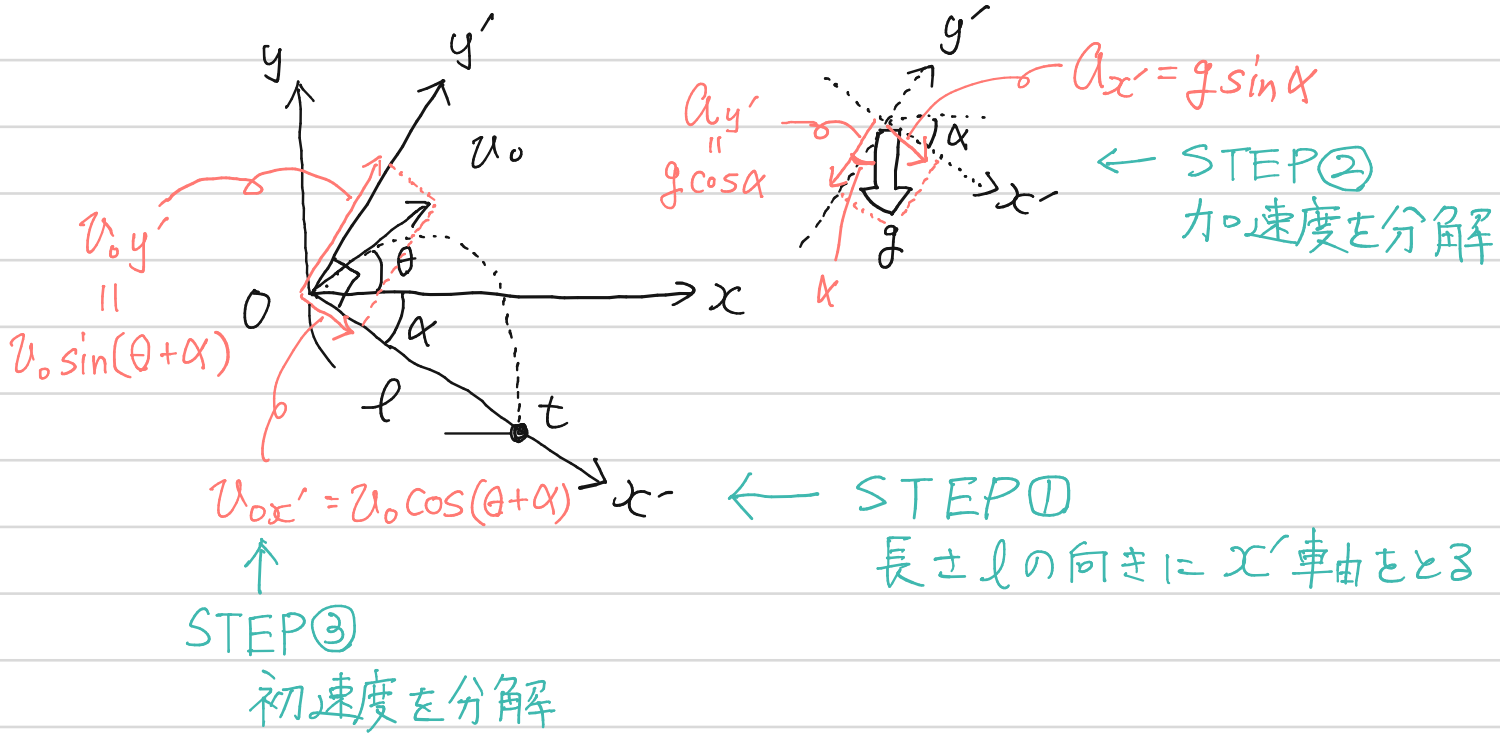
このときの l を求めると

$$l = \frac{v_0^2(1+\sin\alpha)}{g\cos^2\alpha}$$

17 続き

※ 別解がとても大切 ((3)(4))

テーマ 座標軸の変換



このように軸をとると $x'=l$, $y'=0$ と斜面にぶつかったときの座標を示せる。等加速度運動の式を立式すると、

$\boxed{x'}$ $x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ より

$$l = v_{0x} \cdot t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

$$l = v_0 \cos(\theta+\alpha) \cdot t + \frac{1}{2} g \sin\alpha \cdot t^2 \cdots ④$$

$\boxed{y'}$ $x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ より

$$0 = v_{0y} \cdot t + \frac{1}{2}(-a_{y'})t^2$$

$$0 = v_0 \sin(\theta+\alpha) \cdot t - \frac{1}{2} g \cos\alpha \cdot t^2 \cdots ⑤$$

⑤より t を求めると

$$0 = v_0 \sin(\theta+\alpha) + \frac{1}{2} g \cos\alpha \cdot t$$

$$t = \frac{2 v_0 \sin(\theta+\alpha)}{g\cos\alpha}$$ // (3) 解答

$\boxed{17}$ 大切な別解続き.

④にtを代入して

$$l = v_0\cos(\theta+\alpha)\cdot\frac{2v_0\sin(\theta+\alpha)}{g\cos\alpha} + \frac{1}{2}g\sin\alpha\left\{\frac{2v_0\sin(\theta+\alpha)}{g\cos\alpha}\right\}^2$$

$$l = \frac{2v_0^2\cos(\theta+\alpha)\cdot\sin(\theta+\alpha)}{g\cos\alpha} + \frac{\cancel{4}^{2}v_0^2\cancel{g}\sin\alpha\cdot\sin^2(\theta+\alpha)}{\cancel{2}g^{\cancel{2}}\cos^2\alpha}$$

$$l = \frac{2v_0^2\cos\alpha\cdot\cos(\theta+\alpha)\cdot\sin(\theta+\alpha) + 2v_0^2\sin\alpha\cdot\sin^2(\theta+\alpha)}{g\cos^2\alpha}$$

$$l = \frac{2v_0^2\sin(\theta+\alpha)}{g\cos^2\alpha}\cdot\left\{\cos\alpha\cdot\cos(\theta+\alpha) + \sin\alpha\cdot\sin(\theta+\alpha)\right\}$$

$$l = \frac{2v_0^2\sin(\theta+\alpha)}{g\cos^2\alpha}\left\{\cos\alpha(\cos\theta\cos\alpha - \cancel{\sin\theta\sin\alpha}) + \sin\alpha(\cancel{\sin\theta\cos\alpha} + \cos\theta\sin\alpha)\right\}$$

$$l = \frac{2v_0^2\sin(\theta+\alpha)}{g\cos^2\alpha}\left\{\cos\theta(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)\right\}$$

$$l = \frac{2v_0^2\sin(\theta+\alpha)}{g\cos^2\alpha}\cdot\cos\theta$$ ← (4)の途中でできた式

⇓ (4)と同様に変形して

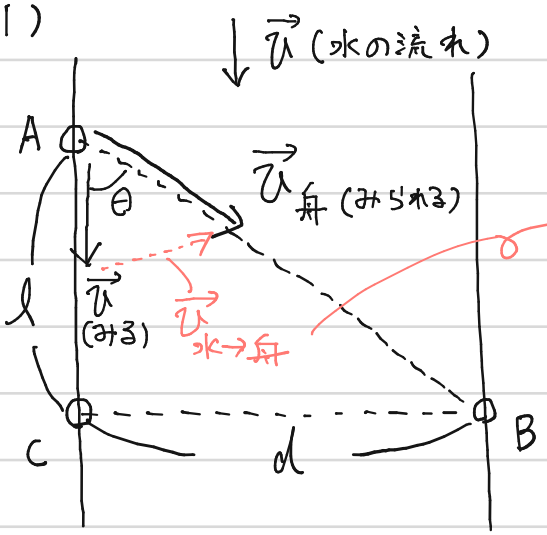
$$l = \frac{v_0^2\{\sin(2\theta+\alpha) + \sin\alpha\}}{g\cos^2\alpha}$$ // (4)答え

$\boxed{18}$ ・水に対する舟の速さ ⇒ 水から見た舟の相対速度という意味であることに注意しよう.

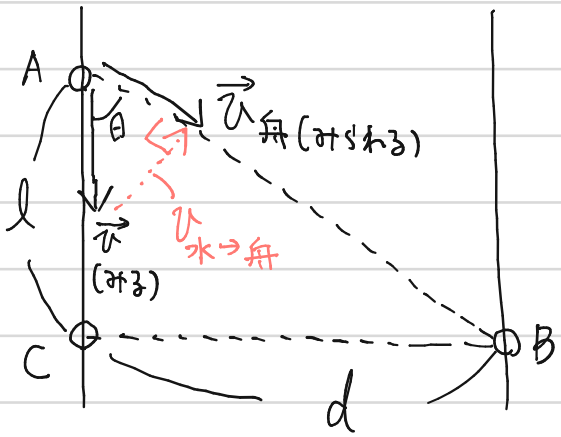
以下のように文字を設定する.

元々の舟の速さを v_0 (← 解答では文字設定してない)
水の速度を v
合成後の舟の速さを $v_{舟}$ (← v_0 と v の合成ベクトルといえる)
水から見た舟の相対速度を $v_{水\to舟}$ (← 解答では $v_{水}$ としている)

(1)

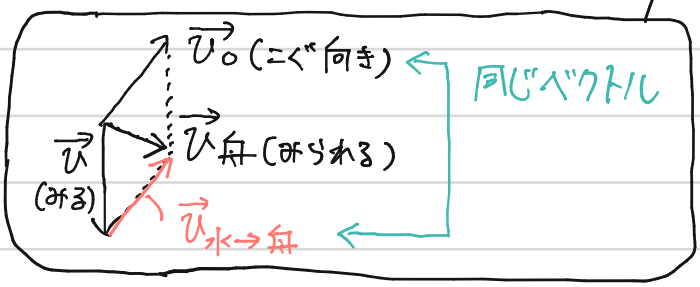


この部分を最小にしたいという問題
↓
$v_{水\to舟}$ が $\overline{AB}$ に垂直になればよい



この $v_{水\to舟}$ が舟をこぐベクトル v_0 なので解答は「ABに垂直な向き」となる

補足



⇓

(2) $|\vec{v}_{水\to舟}| = |\vec{v}|\sin\theta$ かつ $\sin\theta = \dfrac{d}{AB} = \dfrac{d}{\sqrt{l^2+d^2}}$ なので

三平方の定理

$$|\vec{v}_{水\to舟}| = v\frac{d}{\sqrt{l^2+d^2}} \ [\mathrm{m/s}]$$