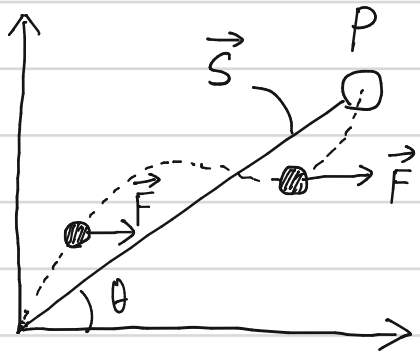
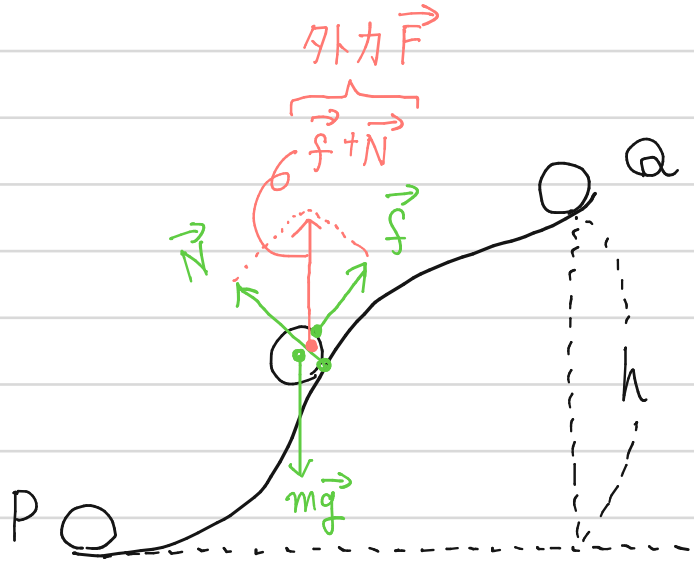
43



仕事は(力)と(キョリ)で
向きをそろえた成分で
かけ算した量である.
$\vec{F}$の向きへのキョリは
$|\vec{s}|\cos\theta$
なので

$$W = |\vec{F}||\vec{s}|\cos\theta$$
$$= \underline{Fs\cos\theta}$$

44



現実に持ちあげようとすると、左図のように、$\vec{f}$の力を加えつつ、$\vec{N}$も外力としてはたらく。

(1) ゆっくり移動している、とあるので物体にはたらく力はつりあっており、

$$|\vec{F}| = m|\vec{g}|$$

が成立している。$\vec{F}$の向きにh移動しているので

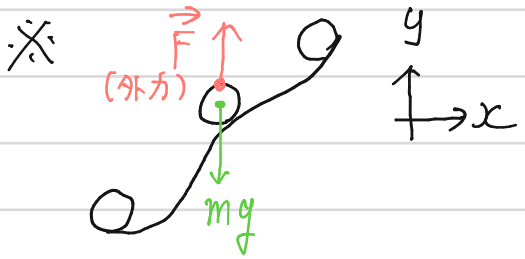
$$W = |\vec{F}| \times h = \underline{mgh}$$

※ 外力がした仕事の分だけ、位置エネルギーが増えると考えて、

$$W = (\text{位置エネの増加量}) = mgh$$

と求めてもよい

※



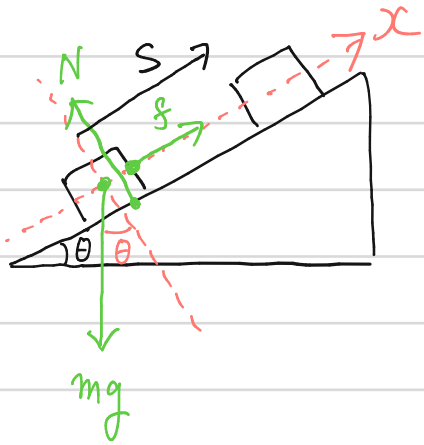
左図のように軸をとるとx方向(水平)方向の仕事は0といえる
(本冊解答の補足)

(2) Q→Pだと$\vec{F}$は進行方向と逆向きなので仕事は負

$$W = \underline{-mgh}$$

45 (1)

(a)



静かに引きあげる

→ $a=0$ → つりあい

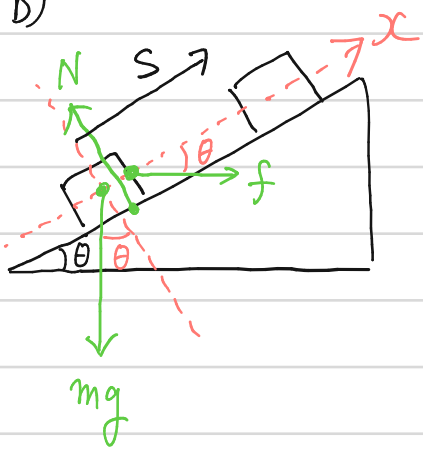
つりあいの式より

$f = mg\sin\theta$ (x方向)

$W = Fx$ より

$W = mg\sin\theta \cdot s$

(b)



つりあいの式より

$f\cos\theta = mg\sin\theta$

$\Rightarrow f = mg \cdot \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ … ①

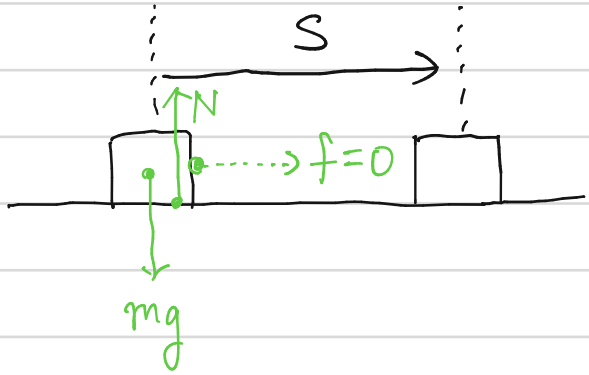
$W = Fx$ より

$W = f\cos\theta \cdot s$

$= mg\sin\theta \cdot s$ ①より

※ (a)(b)でも W は $mg\sin\theta \cdot s$ となる。
位置エネの増加分と計算できるのだ

(2)



静かにうごかす

→ $a=0$ → つりあい

→ $f=0$

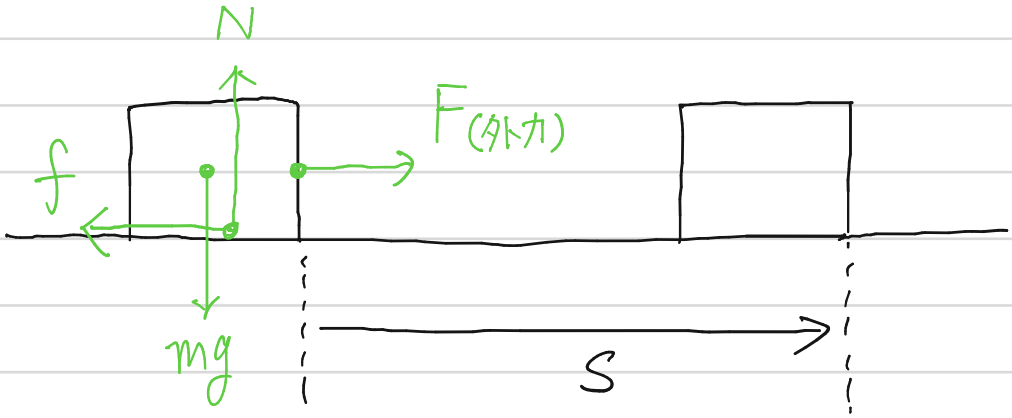
よって

$W=0$

※ エネルギーは増えていない。

46

(1)



つりあいより

$N = mg$, $F = f$

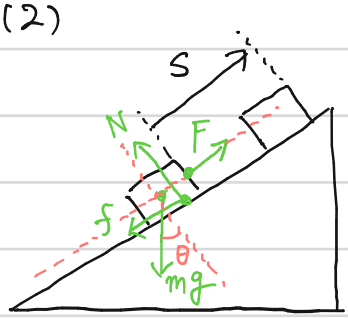
公式 $f = \mu N$ に $N = mg$ を代入して

$f = \mu mg$

$W = Fx$ より

$W = f \cdot x = \underline{\mu mgx}$ //

(2)



つりあいより

$N = mg\cos\theta$

$F = f + mg\sin\theta$

公式 $f = \mu N$ に $N = mg\cos\theta$ を代入して

$f = \mu mg\cos\theta$

よって

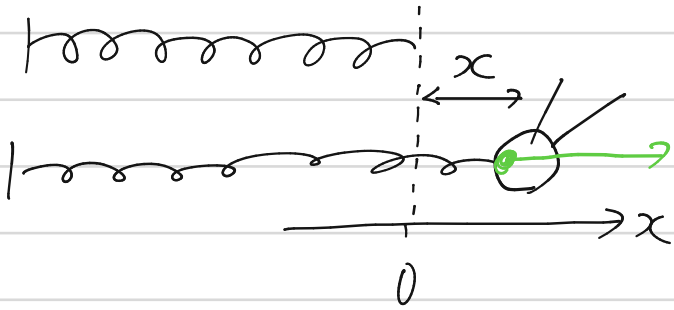
$F = \mu mg\cos\theta + mg\sin\theta$

$W = Fx$ より

$W = (\mu mg\cos\theta + mg\sin\theta) \cdot s$

$= \underline{mgs(\mu\cos\theta + \sin\theta)}$ //

47 (1)

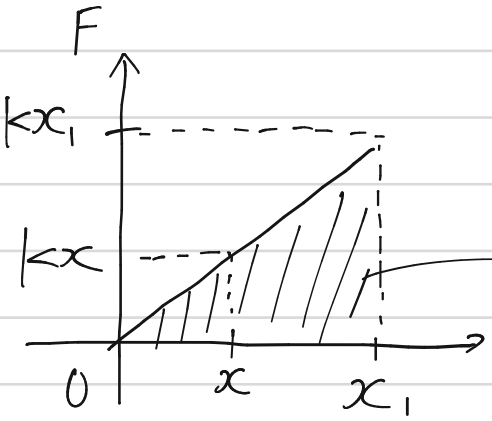


$F = kx$

移動方向と同じ

⇒ Wは正

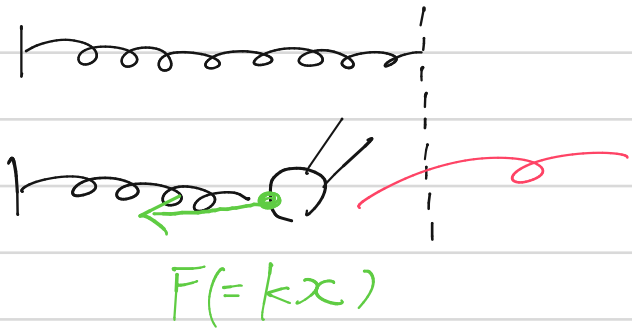
グラフにすると



F−xグラフの面積が仕事.

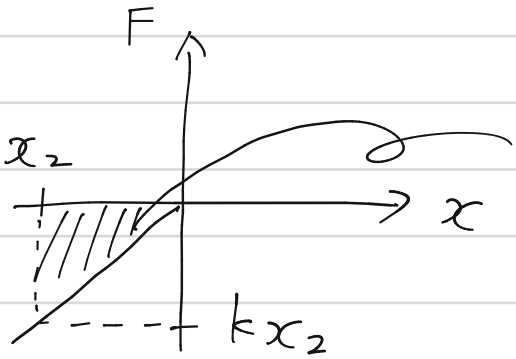
$$W = \frac{1}{2}kx_1 \times x_1$$
$$= \frac{1}{2}kx_1^2$$

(2)



移動方向と同じ

⇒ Wは正



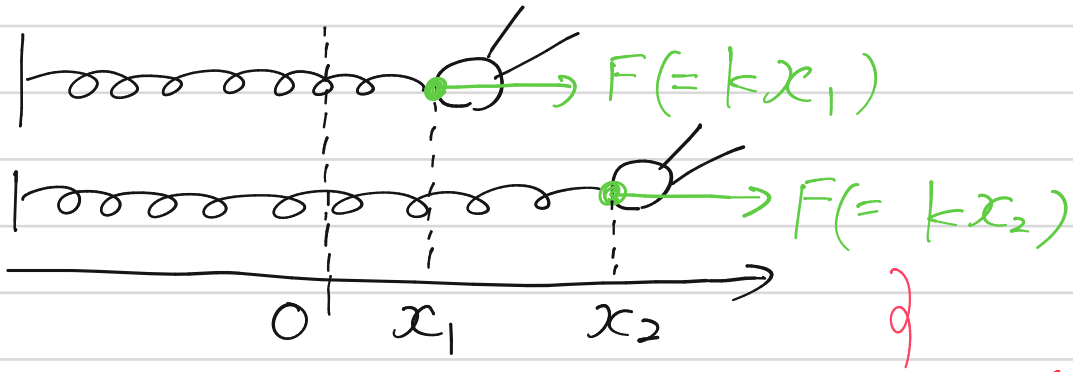
$$W = \frac{1}{2}kx_2 \times x_2$$
$$= \underline{\frac{1}{2}kx_2^2}$$

※ 外力からされた仕事分 エネルギーが増加する,
という考え方でもよい.

(1)も(2)も 弾性エネが $\frac{1}{2}kx^2$ 増えているので

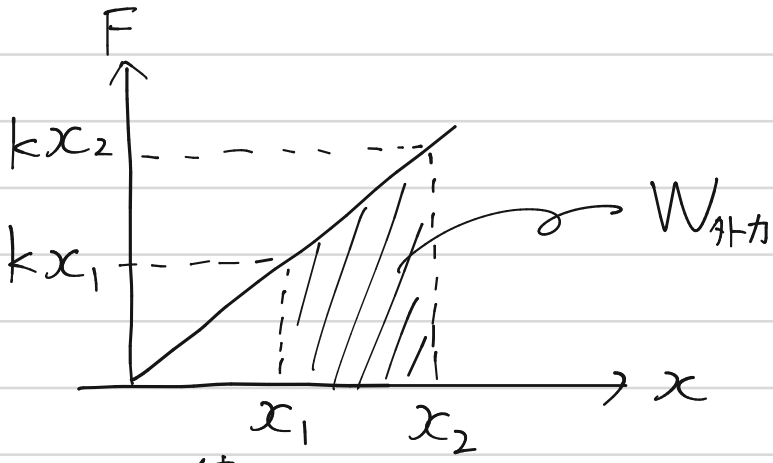
$$W_{外力} = \underline{\frac{1}{2}kx^2}$$

48



外力は移動方向と同じ向き
⇒ Wは正

(1) グラフにすると



台形の面積を求めると

$$W_{外力} = (kx_1 + kx_2)\cdot(x_2 - x_1)\cdot\frac{1}{2}$$

$$= (kx_1x_2 - kx_1^2 + kx_2^2 - kx_1x_2)\cdot\frac{1}{2}$$

$$= \underline{\frac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2)}$$

※ $\frac{1}{2}k\Delta x^2 \Rightarrow \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2$ は誤り

※ $W_{外力}$ の分だけ弾性エネが増える．と考えてもよい．

$$W_{外力} = \frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2 = \underline{\frac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2)}$$

(2) ばねの弾性力と外力は向きが逆なので
Wの正負が逆になる．

$$W_{ばね} = -W_{外力} = -\frac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2)$$

49 定義と単位を整理しよう

1[W]（ワット）← 1sで1Jの仕事という意味
（[J/s]と同じ意味）

1[kW] ← 1000[W]のこと
1sで1000Jの仕事ということ.

よって
2.0kW = 2000W
30分は1800sなので
$2000_{[W]} \times 1800_{[s]} = \underline{3.6 \times 10^6 [J]}$

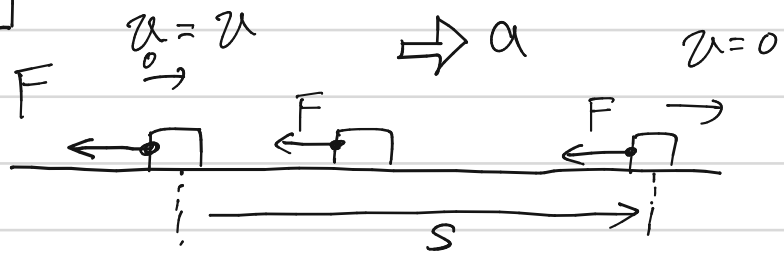
※まぎらわしい単位

1kWh（ワットアワー） ← 1kWで1h仕事をしたときの仕事量のこと.
⇒ $1000_{[W]} \times 3600_{[s]} \Rightarrow \underline{3.6 \times 10^6 J}$

1kWh = 3.6×10^6 J となる

仕事量の単位	[J]	[kWh]	[Wh]
仕事率の単位	[J/s]	[W]	[kW]

$\boxed{50}$



(1) $ma = -F$ …①

(2) $v^2 - v_0^2 = 2ax$ より

$0 - v^2 = 2as$

$\Rightarrow -v^2 = 2as$ …②

(3) ①より $a = -\frac{F}{m}$

②に代入して

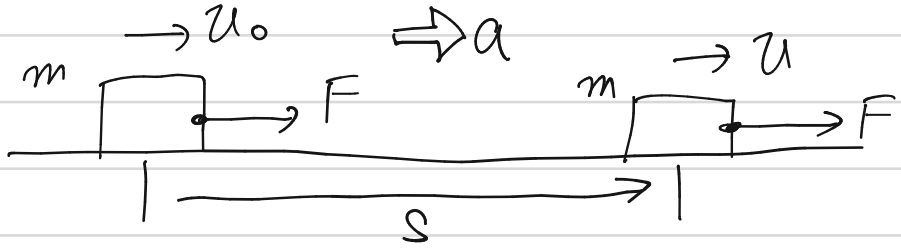
$-v^2 = 2 \cdot -\frac{F}{m} \cdot s$

$\Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = Fs$

運動エネルギーを失うことで

Fs の仕事ができることを示す(②)

51



(1) $ma = F$ …①

(2) $v^2 - v_0^2 = 2as$ …②

(3) ①を変形して $a = \frac{F}{m}$

②に代入して

$$v^2 - v_0^2 = 2 \cdot \frac{F}{m} \cdot s$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2}_{\text{これを運動エネルギーと定義した}} = \underbrace{F \cdot s}_{\text{これを仕事と定義した}}$$

※ 式を次のように解釈しよう

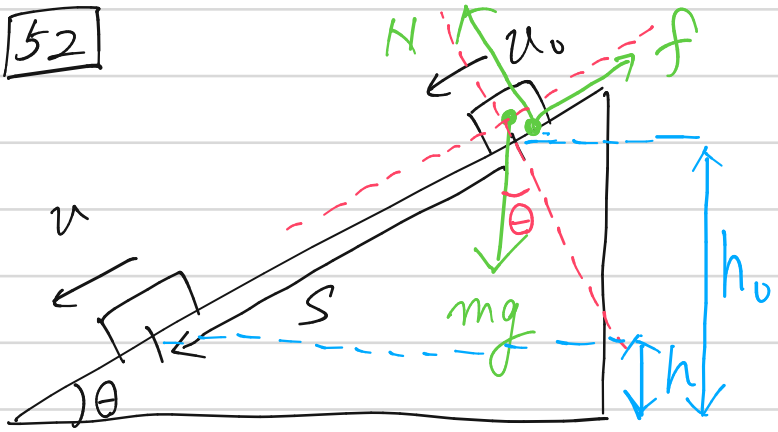
$$\underbrace{\text{後運エネ} - \text{前運エネ}}_{\text{変化量}} = \underbrace{\text{仕事}}_{= \text{仕事}}$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\text{前運エネ} + \text{仕事} = \text{後運エネ}\right)$$

と書くことも多い。
仕事された分、エネルギーが増える。

52



(準備)

斜面垂直のつりあいより

$N = mg\cos\theta$

⇓

公式 $f = \mu N$ より

$f = \mu mg\cos\theta$

運動エネと仕事の関係より

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + W_{mg} + W_f = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 + mg\sin\theta\cdot S + (-\mu mg\cos\theta\cdot S) = \frac{1}{2}mv^2$$

vについて解いて

$$v_0^2 + 2g\sin\theta\cdot S - 2\mu g\cos\theta\cdot S = v^2$$

$$\therefore \sqrt{v_0^2 - 2g(\sin\theta - \mu\cos\theta)\cdot S}$$

重要

この式を変形すると力学的エネルギーの式となる

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + W_{mg} + W_f = \frac{1}{2}mv^2$$

$$mg\sin\theta \longrightarrow mg(h_0 - h)$$

$(\because \sin\theta\cdot S = h_0 - h)$

よって

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mg(h_0 - h) + W_f = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{2}mv_0^2 + mgh_0}_{} + \underbrace{W_f}_{} = \underbrace{\frac{1}{2}mv^2 + mgh}_{}$$

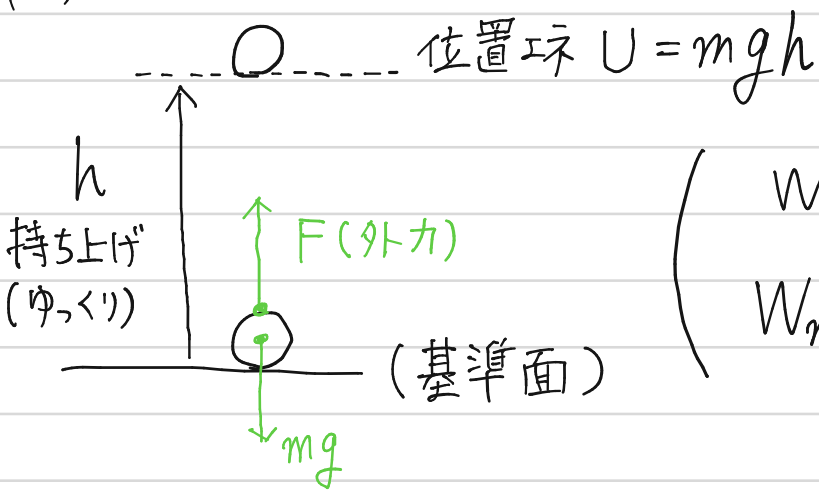
前 力学エネ + $W_{非保存力}$ = 後 力学エネ

53

重力、弾性力、電気力、万有引力 ⇒ 保存力.
それ以外 ⇒ 非保存力　と考えてよい

(1) (イ) 重力、弾性力
(ロ) 動摩擦力

(2)



$W_F = +Fh = +mgh$

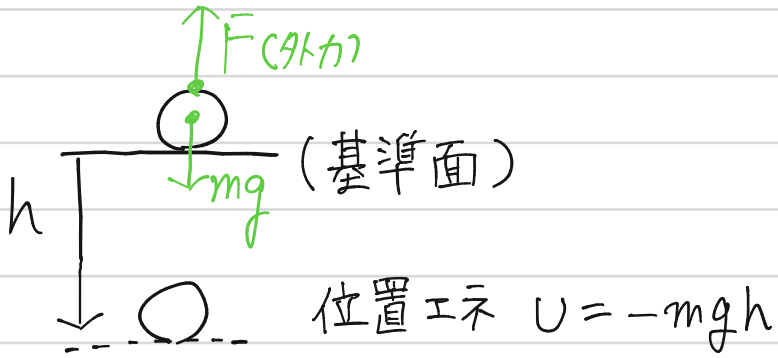
$W_{mg} = -mgh$

(ハ) $U = W_F$ なので 外力がする仕事

保存力に逆らって仕事した分、
位置エネルギーが増えるイメージ

(ニ) 上図より $U = mgh$

(ホ)



$W_F = -Fh = -mgh$

$W_{mg} = mgh$

($U = W_F$ となっていることに注目しよう。
外力の仕事分が位置エネとしてチャージされる)

53 続き

(ヘ) 問題47 で求めたように $W_{F(外力)}$ がエネルギーになると考えて

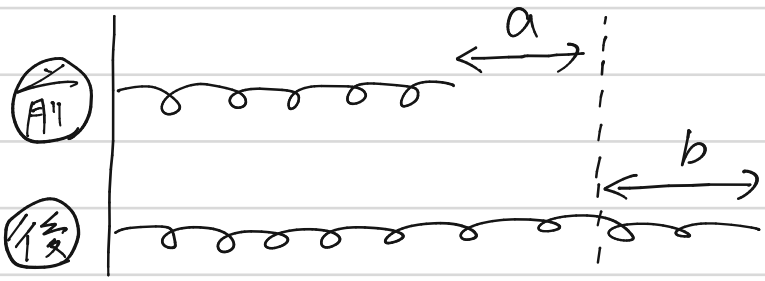
$$U = \frac{1}{2}kx^2$$

(ト) 問題47 で求めたように $W_{F(外力)}$ がエネルギーになると考えて

$$U = \frac{1}{2}kx^2$$

※ 伸びてても ちぢんでいても $U_{弾性}$ は正となるのだ.

54



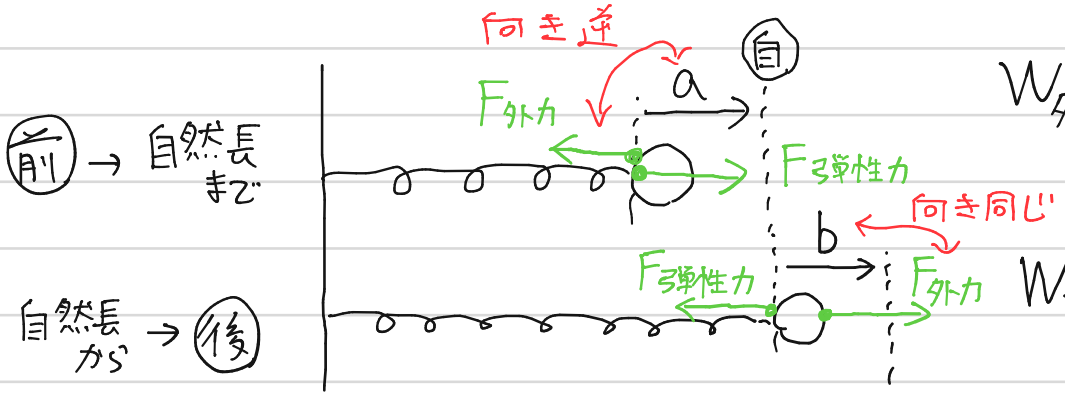
(1) 変化 = 後 − 前 なので

$$\Delta U = \frac{1}{2}kb^2 - \frac{1}{2}ka^2$$

(2) 外力がした仕事分だけエネルギーが変化するといえるので

$$W_{F(外力)} = \Delta U$$
$$= \frac{1}{2}kb^2 - \frac{1}{2}ka^2$$

※力の向きと物動の向きで仕事の正負を考えて求めてみる.



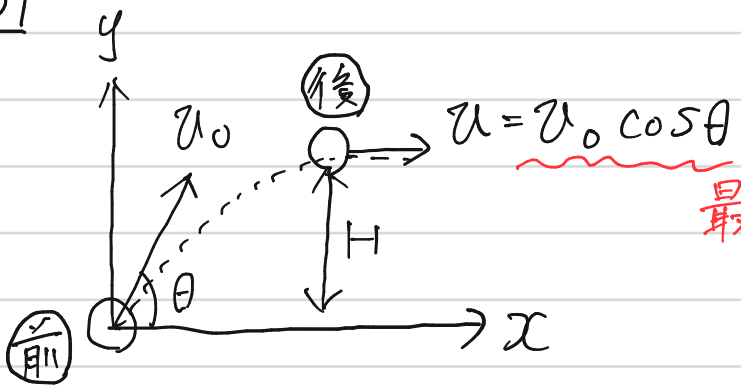
$W_{外力} = -\frac{1}{2}ka^2$
(負の仕事)

$W_{外力} = \frac{1}{2}kb^2$
(正の仕事)

⇓

$W_{外力}$の合計は
$\frac{1}{2}kb^2 - \frac{1}{2}ka^2$

55



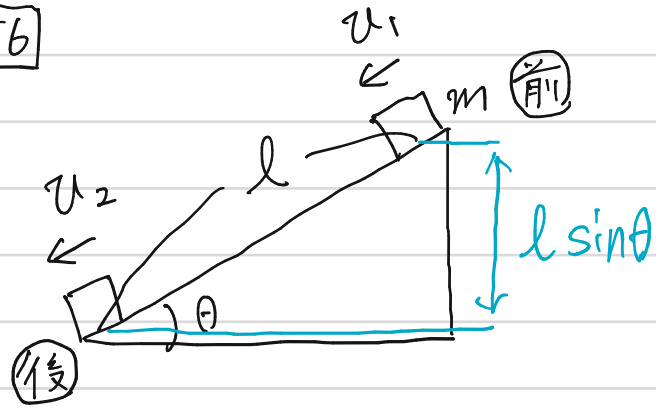
最高点 ⇒ $v=0$ とするミスが多いので気をつける.

前 = 後 より

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m(v_0\cos\theta)^2 + mgH$$

$$\therefore H = \frac{v_0^2(1-\cos^2\theta)}{2g} = \frac{v_0^2}{2g}\sin^2\theta$$

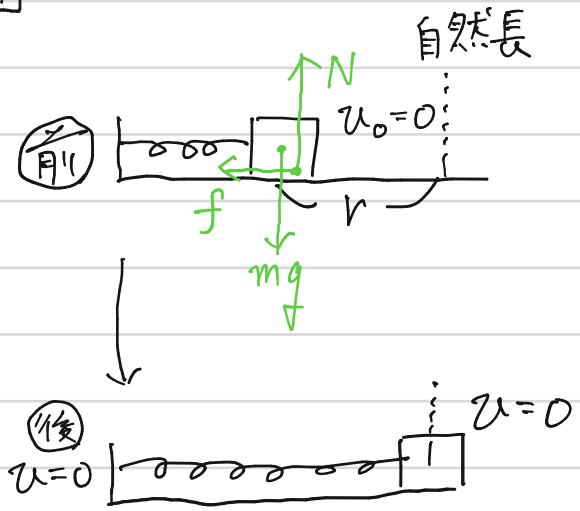
56



前 = 後 より

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgl\sin\theta = \frac{1}{2}mv_2^2$$

57 (1) 自然長でとまるときがギリギリのrといえる。



(準備)

鉛直のつりあいより

$N=mg$

公式 $f=\mu N$ に代入して

$f=\mu mg$ …①

解説では、運動エネルギーと仕事(保存力+非保存力)の関係で求めている。

摩擦の仕事 $W_f=-\mu mgr$

弾性力の仕事 $W_k=+\frac{1}{2}kr^2$ $(W=U_{前}-U_{後})$

$$\underbrace{0}_{K_{前}}\underbrace{-\mu mgr+\frac{1}{2}kr^2}_{W_{全}}=\underbrace{0}_{K_{後}}$$

$$\therefore\ r=\frac{2\mu mg}{k}$$

このrよりちぢめればよいので $r>\frac{2\mu mg}{k}$ //

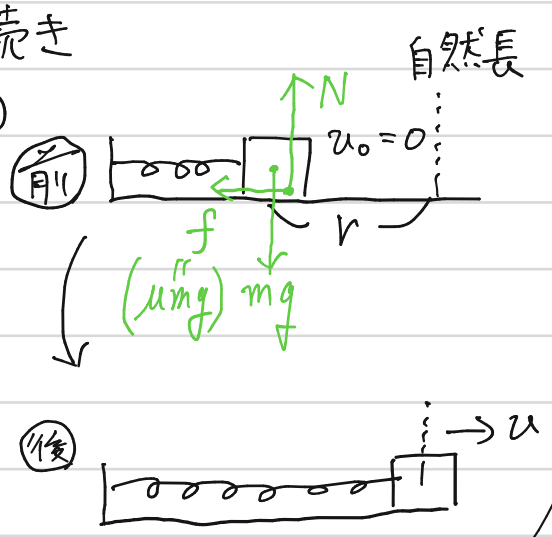
※ 力学的エネルギーEと非保存力による仕事$W_{非}$の関係より

$$\underbrace{E_{前}}_{\frac{1}{2}kr^2}+\underbrace{W_{非}}_{(-fr)}=\underbrace{E_{後}}_{0}$$

としても同じ結果が得られる。

57 続き

(2)



左図の2場面で運動エネルギーと$W_{全}$の式をたてると

$$\underbrace{0}_{K_{前}}\underbrace{-\mu mgr+\frac{1}{2}kr^2}_{W_{全}}=\underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{K_{後}}$$

$$\therefore v=\sqrt{\frac{k}{m}r^2-2\mu gr}$$

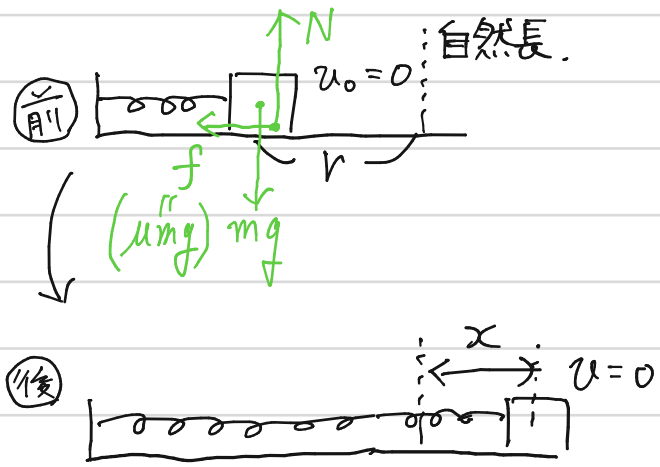
(解説の①式)

※ 力学的エネルギーと非保存力の仕事$W_{非}$の関係より

$$\underbrace{\frac{1}{2}kr^2}_{E_{前}}\underbrace{-\mu mgr}_{W_{非}}=\underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{E_{後}}$$

としてもよい.

(3) 運動エネルギーと$W_{全部}$の式と指定されているので力学的エネルギーの式は答えにできないので注意



$$W_f=-\mu mg(r+x)$$

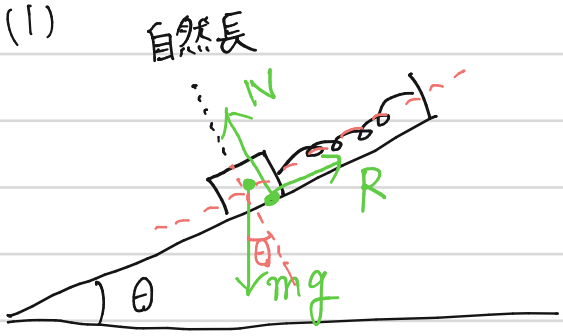
$$W_k=U_{前}-U_{後}$$
$$=\frac{1}{2}kr^2-\frac{1}{2}kx^2$$

$\Downarrow$

$$K_{前}+W_{全}=K_{後}$$

$$0-\mu mg(r+x)+\left(\frac{1}{2}kr^2-\frac{1}{2}kx^2\right)=0$$

$\boxed{58}$ (1)



(準備)

垂直のつりあいより

$N = mg\cos\theta$ …①

(a) ここで $mg\sin\theta > R_0$ ならすべりだす.

(すべりだすギリギリの摩擦)

$\boxed{\text{公式}}$ $R_0 = \mu N$ より

$R_0 = \mu mg\cos\theta$

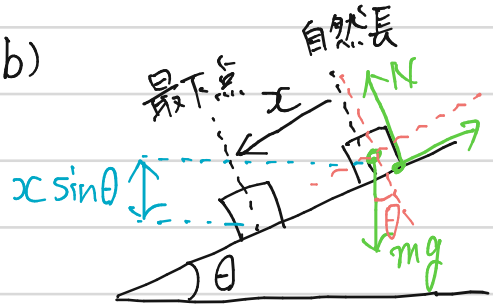
よって条件は

$mg\sin\theta > \mu mg\cos\theta$

$\therefore \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} > \mu$

$(\tan\theta > \mu)$

(b)



⇒ $\boxed{\text{公式}}$ $f' = \mu' N$ より

$f' = \mu' mg\cos\theta$

運動エネルギーと全部の仕事の関係より

$K_{前} + W_{弾性力} + W_{まさつ} + W_{重力} = K_{後}$

$0 + \left(-\frac{1}{2}kx^2\right) + \left(-\mu' mgx\cos\theta\right) + mgx\sin\theta = 0$

$\Rightarrow mgx(\sin\theta - \mu'\cos\theta) - \frac{1}{2}kx^2 = 0$

$\Rightarrow x\left\{mg(\sin\theta - \mu'\cos\theta) - \frac{1}{2}kx\right\} = 0$

$x = 0$ または $\dfrac{2mg(\sin\theta - \mu'\cos\theta)}{k}$

58 (1)(b) 続き

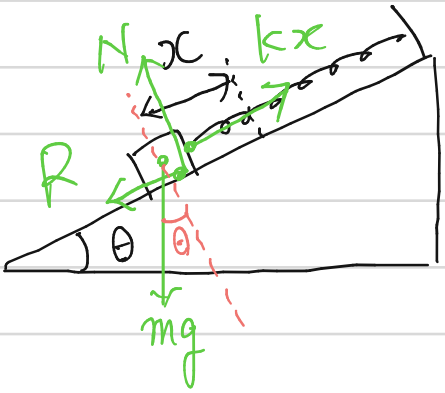
※ 力学的エネルギーと $W_{非保存力}$ の関係式をたてると、

$$\underbrace{E_{前}}_{0} + \underbrace{W_{非保存力}}_{(-\mu' mgx\cos\theta)} = \underbrace{E_{後}}_{0 - mgx\sin\theta + \frac{1}{2}kx^2}$$

(※自然長の位置と重力による位置エネの基準とした。)

両方の視点で立式できるようになっておこう。

(2) 折り返す瞬間だけ『動摩擦→静止摩擦』に変化する。



(準備)

垂直方向のつりあいより

$N = mg\cos\theta$

このとき

$(kx - mg\sin\theta)$ で物体は上にひかれて、

これが $R_0 (= \mu N)$ より大きければ動きだす。

よって条件は

$$kx - mg\sin\theta > \mu mg\cos\theta$$

$$\Rightarrow kx > mg\sin\theta + \mu mg\cos\theta$$

(1)の x を代入して

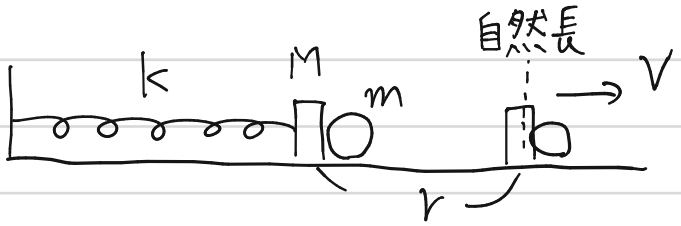
$$2mg(\sin\theta - \mu'\cos\theta) > mg\sin\theta + \mu mg\cos\theta$$

$$mg\sin\theta - 2\mu' mg\cos\theta > \mu mg\cos\theta$$

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} - 2\mu' > \mu \Rightarrow \therefore \tan\theta > \underline{\mu + 2\mu'}$$

59 解説では、力学的エネルギーと$W_{非保存力}$の関係で立式している。
運動エネルギーと$W_{全部}$の解釈もできるようにしておこう。

(1)

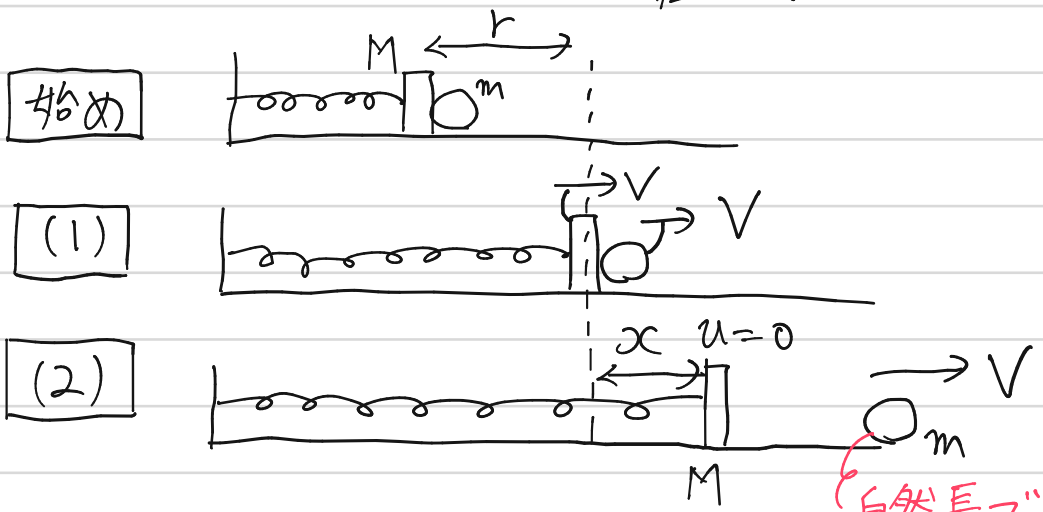


mとMを一体として考え、力学エネ保存の式をたてる。
($W_{非保存力}=0$なので$E_{前}=E_{後}$なのだ)

$$\frac{1}{2}kr^2=\frac{1}{2}(m+M)V^2$$

$$\therefore V=r\sqrt{\frac{k}{m+M}}$$

(2) 自然長でMとmは分離するので、ばねが伸びきったところの状況把握をまちがえないようにしよう。



自然長で分離するので速度Vを維持する。

(1)→(2)でMとmは別々に運動していて、それぞれで力学的エネルギーが保存する。Mについて(1)→(2)で立式して

$$\frac{1}{2}MV^2=\frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow x=V\sqrt{\frac{M}{k}}=r\sqrt{\frac{M}{M+m}}$$

$\boxed{59}$ (2) 続き

$\boxed{別解}$ m と M を1つの系とし、系のエネルギー保存の式をたてると

$\boxed{(1)} \rightarrow \boxed{(2)}$ では

$$\frac{1}{2}(m+M)V^2 = \frac{1}{2}kr^2 + \frac{1}{2}mV^2$$

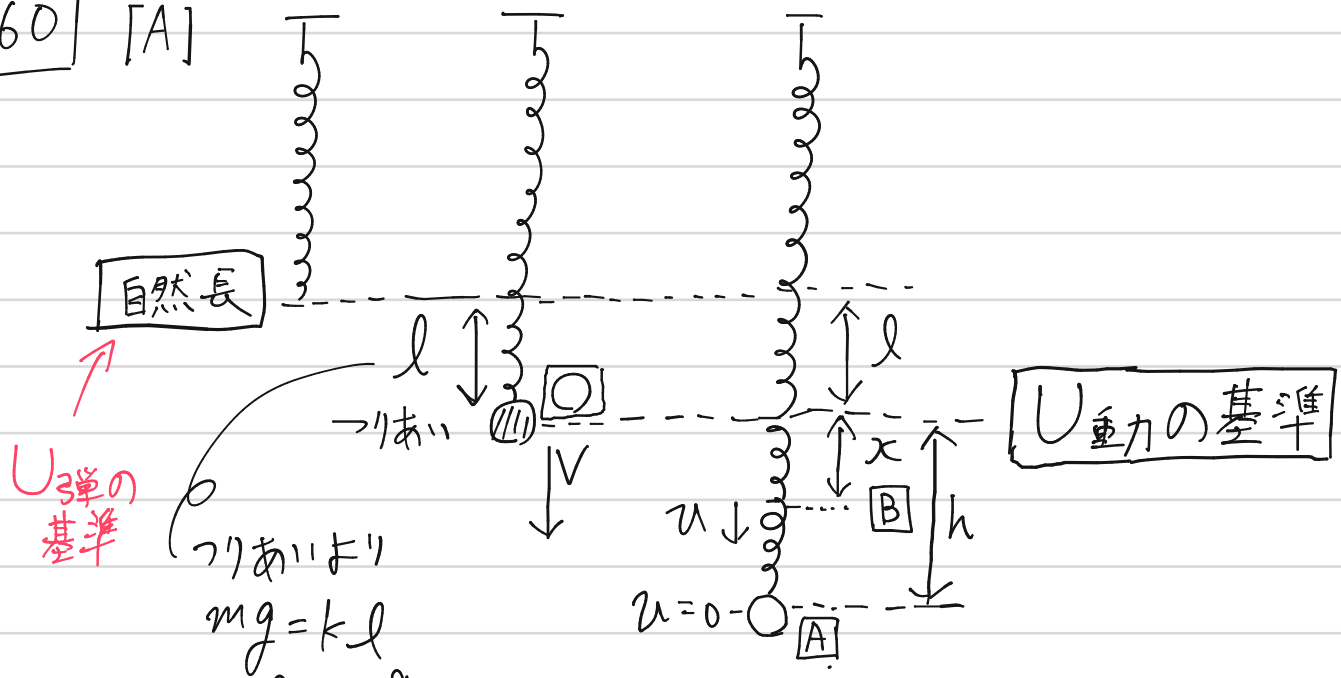
$\boxed{始め} \rightarrow \boxed{(2)}$ では、

$$\frac{1}{2}kr^2 = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mV^2$$

が成立。どの式で解いても

$$x = V\sqrt{\frac{M}{k}} = r\sqrt{\frac{M}{M+m}}$$ となる。

60 [A]



つりあいより

$mg = kl$

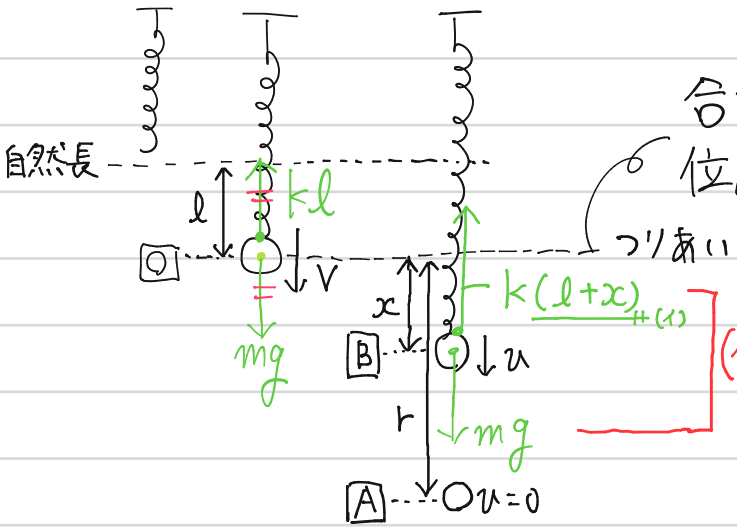
$\therefore l = \frac{mg}{k}$

情報を整理して計算すると

	K	$U_{弾}$	$U_{重力}$
O	$\frac{1}{2}mV^2$	$\frac{1}{2}kl^2$	0
B	$\frac{1}{2}mv^2$	$\frac{1}{2}k(l+x)^2$	$-mgx$
A	0	$\frac{1}{2}k(l+r)^2$	$-mgr$

60 続き

[B] 点O



合力による位置エネの基準

(合力) $= kx$

$(\because kl = mg)$

合力は上向きに

$k(l+x) - mg$

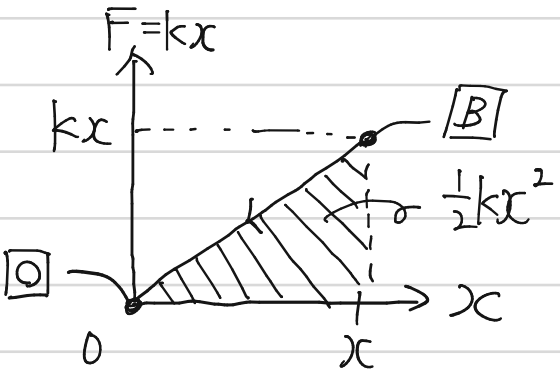
$\Rightarrow kl + kx - mg$

$\Rightarrow kx$ $(\because mg = kl)$

↓

基準に移動するまでの間にどれだけ合力が仕事をするか、が持っていた位置エネと考えてよい

合力kxの仕事量はグラフで考えられる



B → O で $\frac{1}{2}kx^2$ の仕事をできる といえる。

(力と移動力の向きが同じなことを確認)

よって B では

$U_B = +\frac{1}{2}kx^2$

のエネルギーをもっているといえるのだ。

A → O のときも同様に考えてまとめると

	運動エネ	合力エネ
O	$\frac{1}{2}mV^2$ (ハ)	0 (ニ)
B	$\frac{1}{2}mv^2$ (ホ)	$\frac{1}{2}kx^2$ (ヘ)
A	0 (ト)	$\frac{1}{2}kr^2$ (チ)

$\boxed{60}$ [B] 続き

(別解)

(前) 運動エネ + $W_{全部}$ = (後) 運動エネ

の式をたてて変形して

(前) 力学エネ + $W_{非保存力}$ = (後) 力学エネ

として、合力による位置エネを考えてもよい。

$\boxed{B}$ → $\boxed{O}$ と運動したとすると、

$$\underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{K_B} + \underbrace{\frac{1}{2}k(l+x)^2 - \frac{1}{2}kl^2}_{\substack{W_{弾性力} \\ (U_{前}-U_{後})}} \underbrace{-mgx}_{\substack{W_{mg} \\ (仕事はB→Oだと負)}} = \underbrace{\frac{1}{2}mV^2}_{K_O}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 + \cancel{\frac{1}{2}kl^2} + \cancel{klx} + \frac{1}{2}kx^2 - \cancel{\frac{1}{2}kl^2} - \cancel{mgx} = \frac{1}{2}mV^2$$

$(\because kl = mg)$

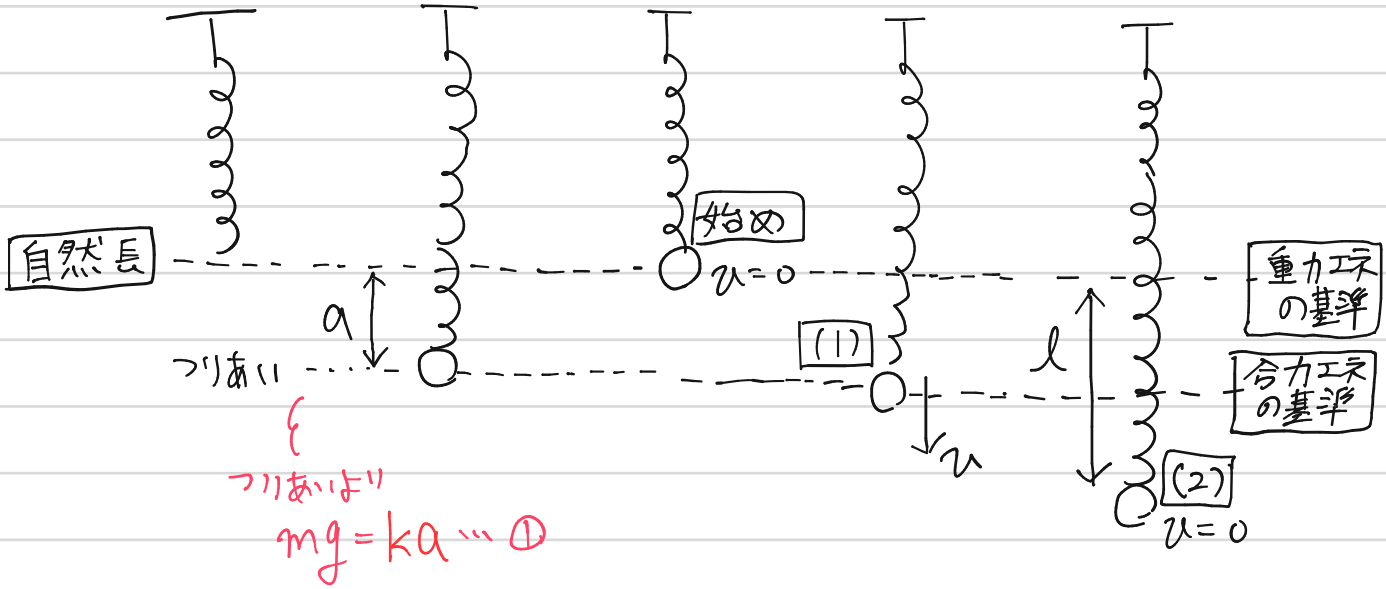
$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{K_{B(ホ)}} + \underbrace{\frac{1}{2}kx^2}_{U_{B(ハ)}} = \underbrace{\frac{1}{2}mV^2}_{K_{O(ハ)}} \underbrace{}_{\substack{U_O(=0) \\ (ニ)}}$$

同様に

$\boxed{A}$ → $\boxed{O}$ で立式したり、$\boxed{A}$ → $\boxed{B}$ などで立式して

表のようになることを確かめてみましょう。

61



vについて　始め の位置を重力による位置エネの基準として力学エネの保存の式をたてると、

$$\underbrace{0}_{E_{始め}} = \underbrace{\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}ka^2 - mga}_{E_{(1)のエネ}}$$

①式より　$k=\frac{mg}{a}$ なので

$$0=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}mga-mga$$

$$\therefore\ v=\sqrt{ga}$$

※前問 60 のように合力による位置エネの考え方を用いるとつりあいの位置を新しい自然長とすることで、重力が消えたようなイメージで立式できる。始め = (1) を立式すると

$$\underbrace{\frac{1}{2}ka^2}_{E_{始め}} = \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{E_{(1)のエネ}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mga=\frac{1}{2}mv^2 \quad \left(\because k=\frac{mg}{a}\right)$$

$$\therefore\ v=\sqrt{ga}$$

61 続き

xについて

始め と (2) の位置で力学エネの保存を立式すると

$$\underbrace{0}_{始め} = \underbrace{\frac{1}{2}kl^2 - mgl}_{(2)のエネ}$$

$$0 = \frac{1}{2}\cdot\frac{mg}{a}\cdot l^2 - mgl$$

$$\therefore\ l = \underline{2a}$$

※ 合力による位置エネを使って立式すると

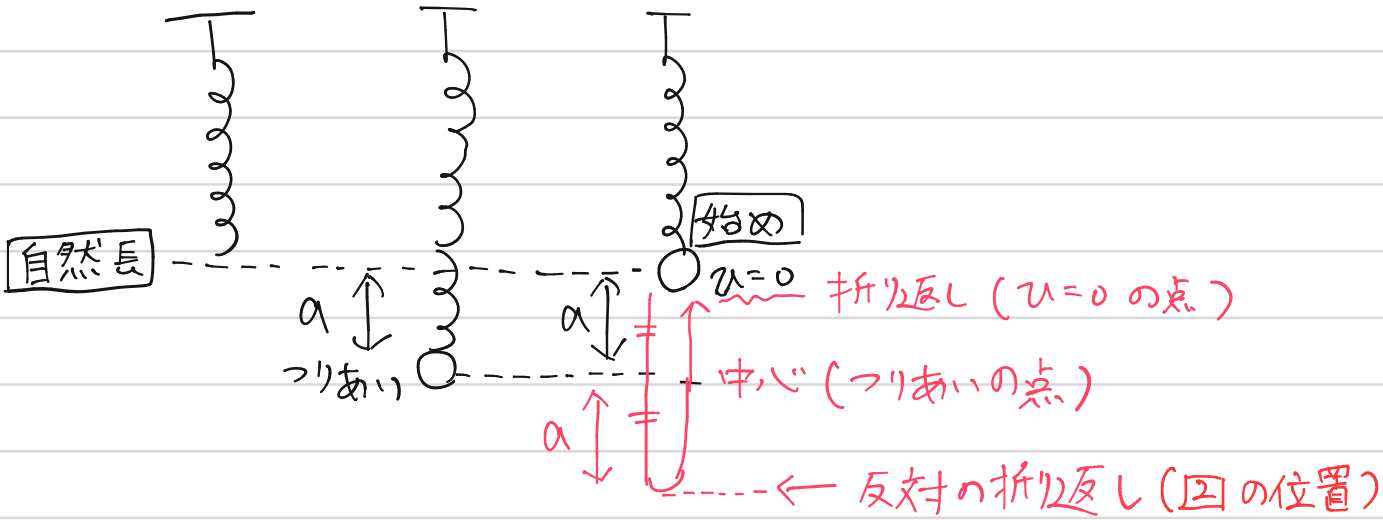
$$\underbrace{\frac{1}{2}ka^2}_{始め} = \underbrace{\frac{1}{2}k(l-a)^2}_{(2)のエネ}$$

$$\frac{1}{2}ka^2 = \frac{1}{2}kl^2 - kla - \frac{1}{2}ka^2$$

$$0 = \frac{1}{2}kl^2 - kla$$

$$\therefore\ l = \underline{2a}$$

※ 単振動の中心と折り返し点の特徴から考えると



上図のように折り返し点がかけるので

$\underline{l = 2a}$ とわかる.