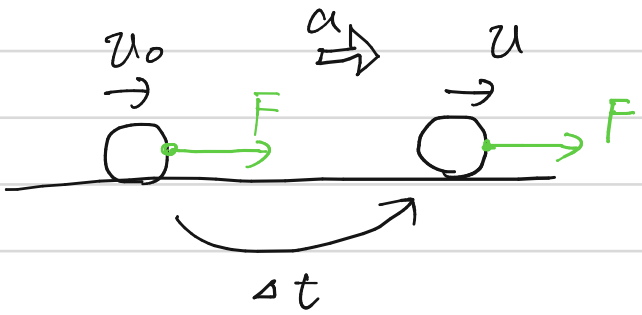
66



運動方程式より

$$m\vec{a} = \vec{F} \quad \cdots ①$$

$v = v_0 + at$ より

$$a = \frac{v - v_0}{\Delta t} \quad \cdots ②$$

①に②を代入して

$$m \cdot \underbrace{\frac{v - v_0}{\Delta t}}_{(イ)} = F$$

両辺を Δt 倍して

$$m(v - v_0) = F\Delta t$$

$$\Rightarrow \underbrace{mv - mv_0}_{(ロ)} = F\Delta t$$

mvを運動量と定義した.

$F\Delta t$を力積と定義した

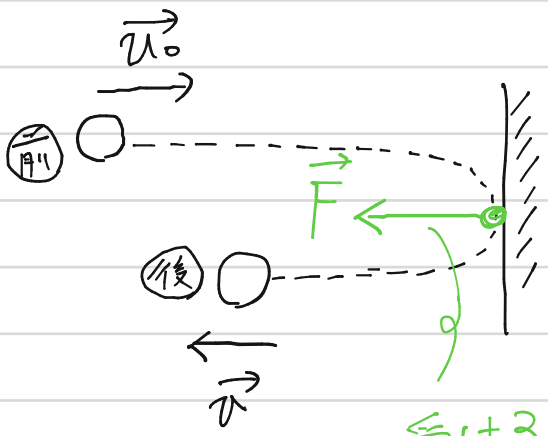
⇓

この式より

運動量の変化 = 力積
(後−前)

という関係式が生まれた.

67



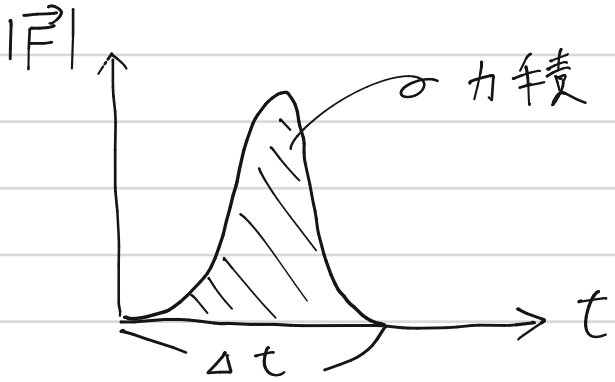
受ける力は垂直抗力N

Point

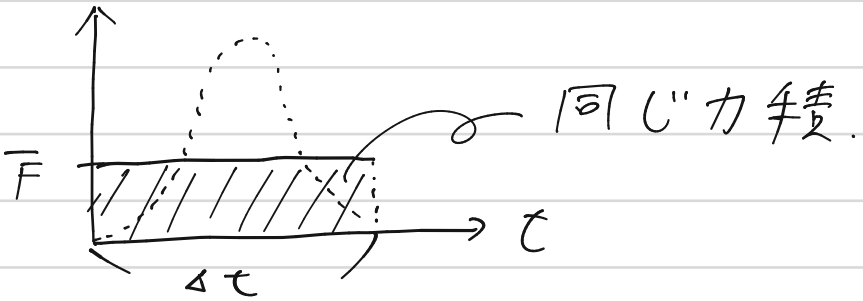
運動量はベクトル量なので、正負を意識する

(→ 右向き正とする)

ここで $\vec{F}$ の大きさは、一定ではなく、球の変形が大きいとき程大きく、下のグラフのようになる。



⇩ 一定の力 $\overline{F}$ で同じ力積を生むときの力が平均の力



運動量と力積の関係より、

$$\text{後} - \text{前} = \boxed{\text{力積}}$$

$$-m|\vec{v}| - m|\vec{v_0}| = -|\overline{F}|$$

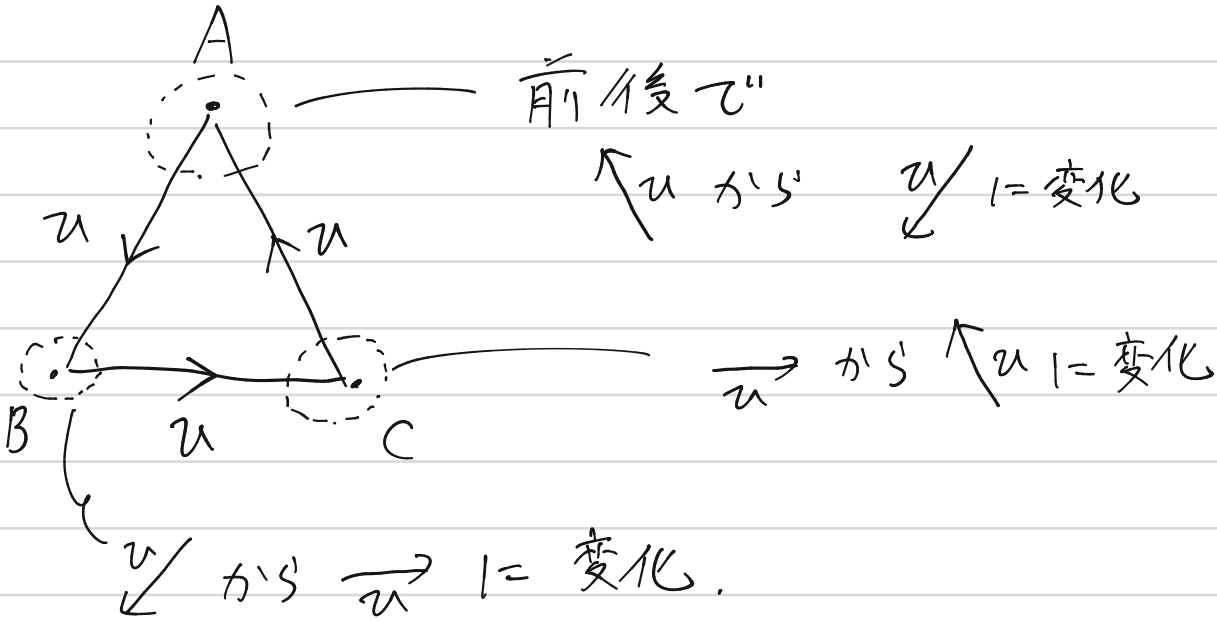
$$\therefore \overline{F} = \frac{mv + mv_0}{\Delta t} = \frac{m(v+v_0)}{\Delta t}$$

68

Point.

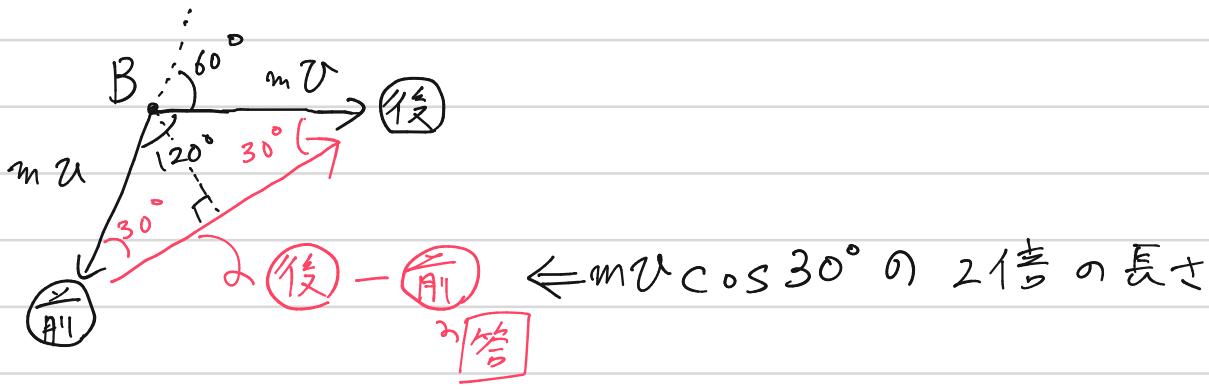
平面での変化のときは、
ベクトルの引き算が必要

(1) 速度の変化があるところで、運動量も変化する。



よって、A, B, C

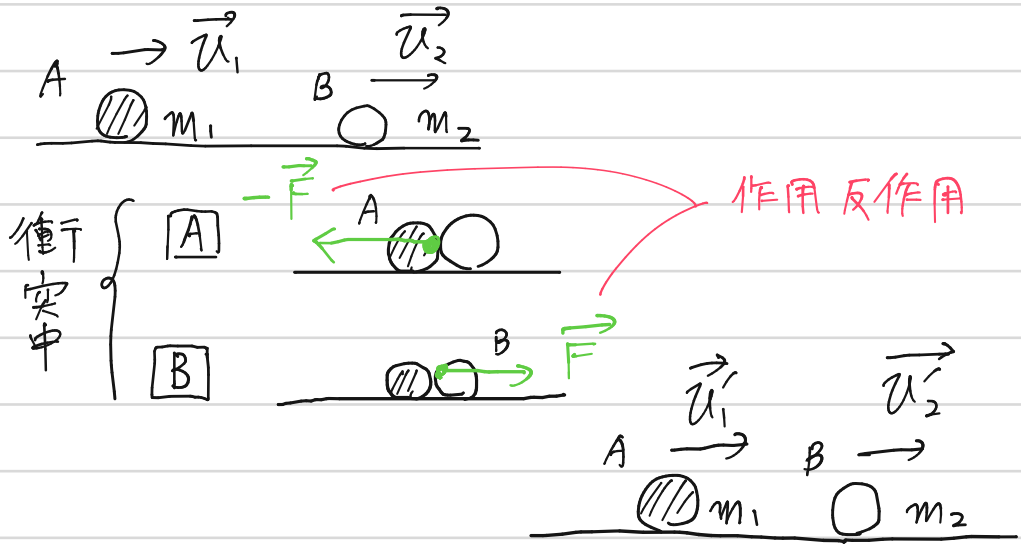
(2) 例えば B 点での変化を分析すると、



(3) 大きさは $mv\cos30^\circ \times 2$ 倍なので

$\sqrt{3}mv\cos30^\circ$

69



(イ)、(ロ)

運動量と力積の関係より、

(後 − 前 = 力積)

A $m_1\vec{v_1'} - m_1\vec{v_1} = -\vec{F}\Delta t$ (イ)

B $m_2\vec{v_2'} - m_2\vec{v_2} = \vec{F}\Delta t$ (ロ)

(ハ) 2式を合計して

$$m_1\vec{v_1'} - m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2'} - m_2\vec{v_2} = 0$$

$$\Rightarrow m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2} = m_1\vec{v_1'} + m_2\vec{v_2'} \quad (ハ)$$

(ニ)(ホ)

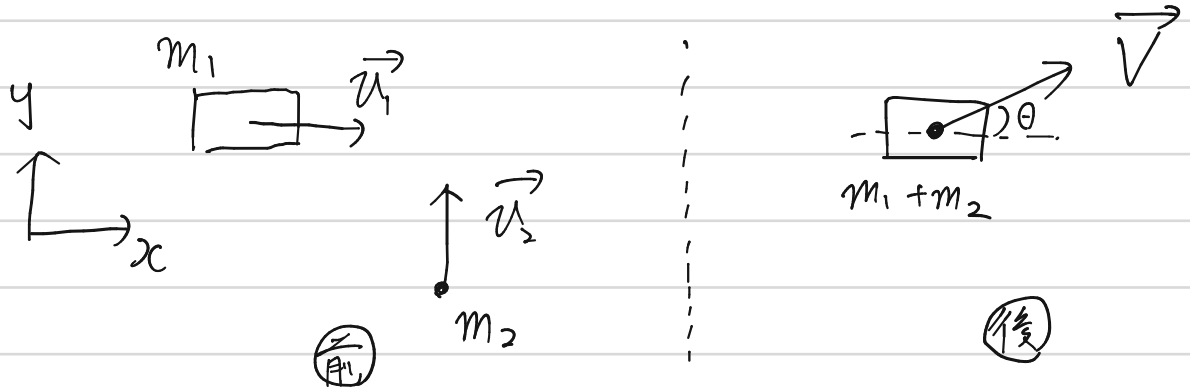
成分ごとに運動量保存の式をたてると

(前 = 後)

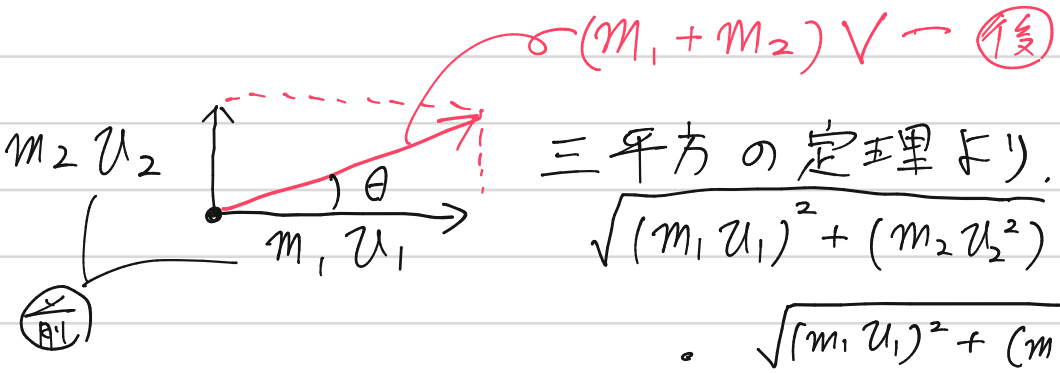
x成分 : $m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' \cos\theta_1 + m_2 v_2' \cos\theta_2$ (ニ)

y成分 : $0 = m_1 v_1' \sin\theta_1 + (-m_2 v_2' \sin\theta_2)$ (ホ)

70 平面での運動量保存で考える



前の運動量の合計が後の運動量と等しいので作図をすると以下のようにかける。



三平方の定理より、

$$\sqrt{(m_1v_1)^2+(m_2v_2^2)}=(m_1+m_2)V$$

$$\therefore \frac{\sqrt{(m_1v_1)^2+(m_2v_2)^2}}{m_1+m_2}$$

また、図より

$$\tan\theta=\frac{m_2v_2}{m_1v_1}$$

別解

x　$m_1v_1=(m_1+m_2)V\cos\theta$ …①

y　$m_2v_2=(m_1+m_2)V\sin\theta$ …②

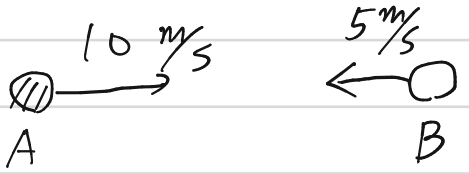
$\frac{②}{①}$ として $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ を作ると、

$$\frac{m_2v_2}{m_1v_1}=\frac{(m_1+m_2)V\sin\theta}{(m_1+m_2)V\cos\theta}$$

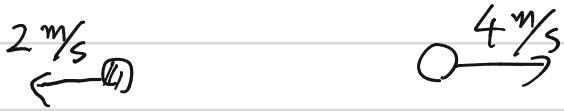
$$\therefore \tan\theta=\frac{m_2v_2}{m_1v_1}$$

$\boxed{71}$ はねかえり係数（反発係数）の公式

$$e = -\frac{v_1' - v_2'}{v_1 - v_2} = \frac{|\text{遠ざかる}|}{|\text{近づく}|}$$



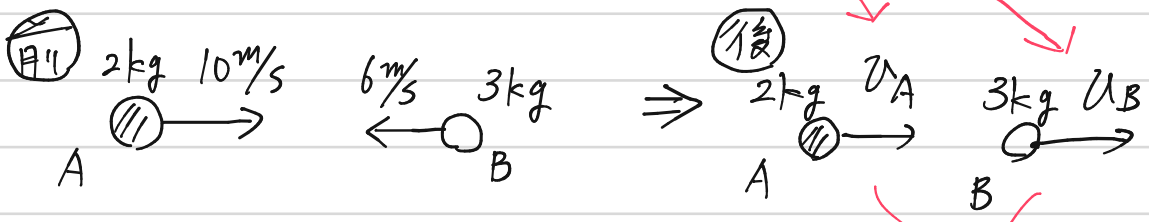
$\Big\}$ $|\text{近づく}| = 15$



$\Big\}$ $|\text{遠ざかる}| = 6$.

$$e = \frac{|\text{遠ざかる}|}{|\text{近づく}|} = \frac{6}{15} = \underline{0.40}$$

72　未知数は正に設定するのがポイント



$v_A < v_B$なので
|速さの差| $= v_B - v_A$

運動量の保存より

$$2\times10 + -(3\times6) = 2v_A + 3v_B \cdots ①$$

反発係数の式より

$$0.50 = \frac{v_B - v_A}{16} \cdots ②$$

②より

$$8 = v_B - v_A = v_B = 8 + v_A \cdots ②'$$

①に代入して

$$20 - 18 = 2v_A + 3(8 + v_A)$$

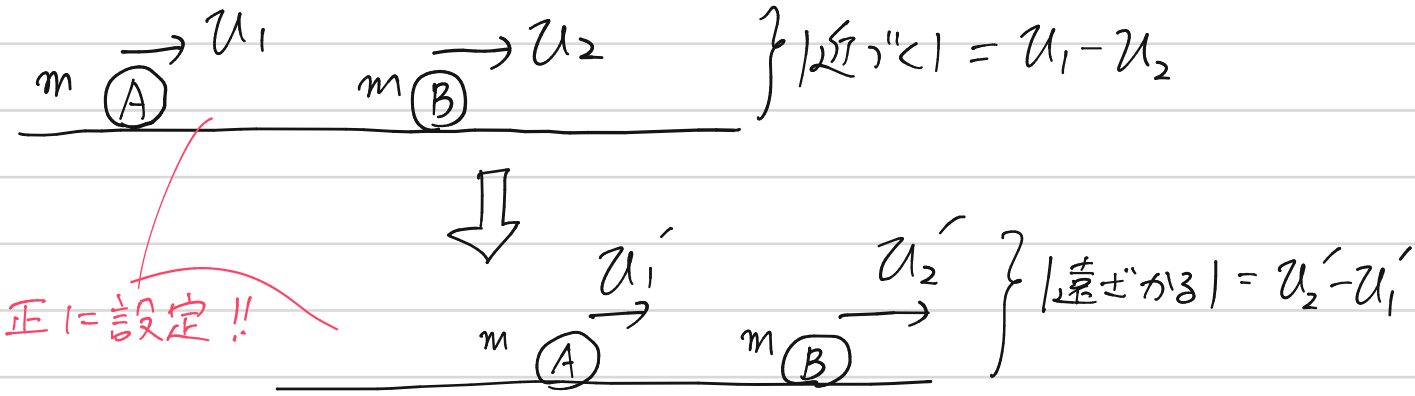
$$5v_A = -22$$

$$\therefore v_A = -4.4\ \mathrm{m/s}$$ (左向き 4.4 m/s)

②'に代入して

$$v_B = 8 + (-4.4) \quad \therefore v_B = 3.6\ \mathrm{m/s}$$ (右向き 3.6 m/s)

73　弾性衝突 ⇒ $e=1$ の衝突のこと.



運動量の保存より,

$$mv_1 + mv_2 = mv_1' + mv_2' \quad \cdots ①$$

反発係数の式より,

$$1 = \frac{v_1 - v_2}{v_2' - v_1'} \quad \cdots ②$$

②を変形して

$$v_2' - v_1' = v_1 - v_2$$

$$v_2' = v_1 - v_2 + v_1' \quad \cdots ②'$$

①に代入して

$$mv_1 + mv_2 = mv_1' + m(v_1 - v_2 + v_1')$$

$$2mv_2 = 2mv_1'$$

$$\therefore v_1' = \underline{v_2}$$

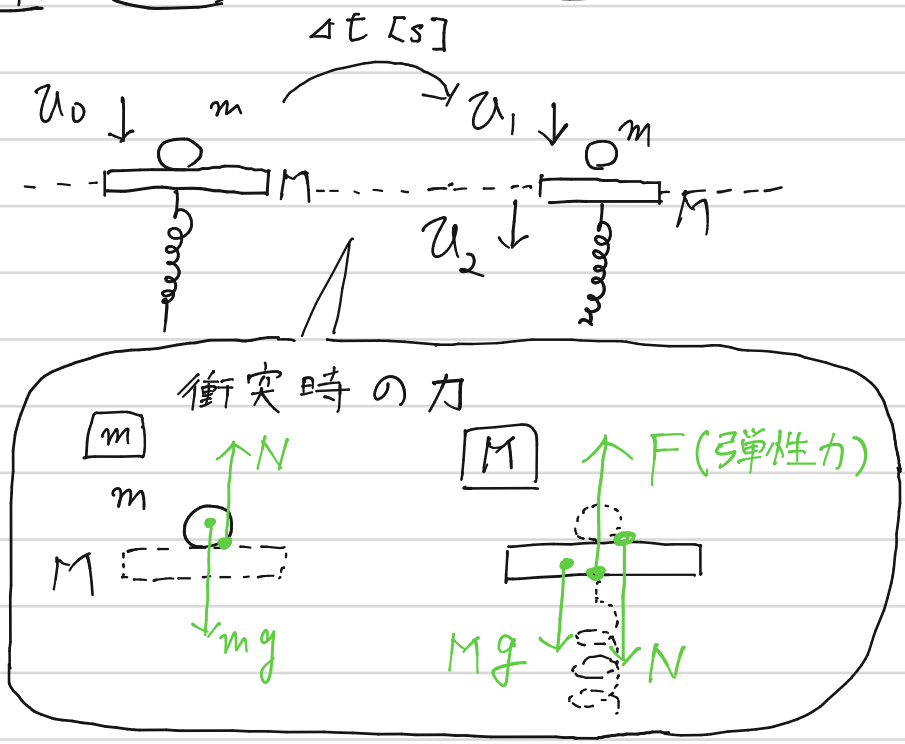
②'に代入して

$$v_2' = v_1 - v_2 + v_2$$

$$\therefore v_2' = \underline{v_1}$$

条件① 質量が同じ
条件② $e=1$
} 両方満たすと速度の交換がおこる. 教養として知っておこう.

74 直前　　直後　を作図する



ここで

運動量保存の成立条件『外力がはたらかない』を満たしていない。

⇓

運動量と力積の式（前 + 力積 = 後）をたてると

$$\boxed{m}\quad mv_0 + mg\Delta t + (-N\Delta t) = mv_1$$

$$\boxed{M}\quad 0 + Mg\Delta t + N\Delta t + (-F\Delta t) = Mv_2$$

合計すると相互作用である $N\Delta t$ は消えるが、外力(mg, F)による力積は残る。

$$\underbrace{mv_0 + 0}_{\text{前の和}} + \underbrace{mg\Delta t + Mg\Delta t + (-F\Delta t)}_{\text{外力の力積}} = \underbrace{mv_1 + Mv_2}_{\text{後の和}}$$

⇓

Δtが小さいとき $\fallingdotseq 0$ と見なせる

（$N\Delta t$ は N が大きいので無視できない）

⇒ 結果として 直前 → 直後 では運動量が保存する。

$\boxed{74}$ 続き

運動量の保存より

$$\Rightarrow \quad mv_0 + 0 = mv_1 + Mv_2 \quad \cdots ①$$

反発係数の式より

$$e = \frac{v_2 - v_1}{v_0} \quad \cdots ②$$

②を変形して

$$ev_0 = v_2 - v_1 \Rightarrow v_2 = ev_0 + v_1 \quad \cdots ②'$$

①に代入して

$$mv_0 = mv_1 + M(ev_0 + v_1)$$

$$mv_0 = mv_1 + eMv_0 + Mv_1$$

$$(m+M)v_1 = (m - eM)v_0$$

$$v_1 = \frac{(m - eM)}{m+M} v_0$$

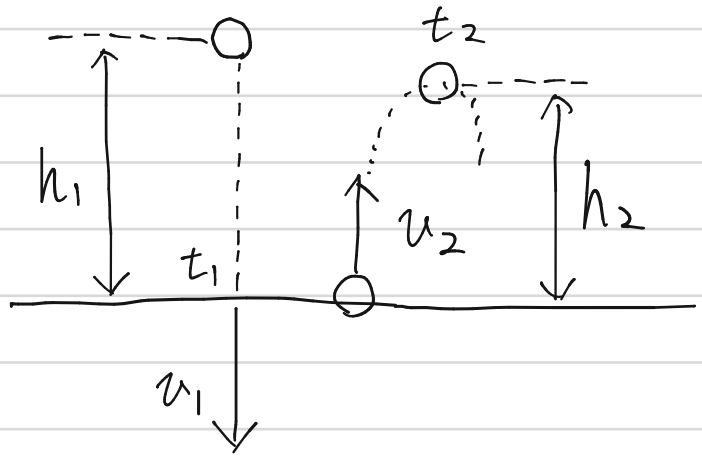
ここで、$v_1 < 0$ なら はねかえる といえるので

$$m - eM < 0$$

$$\therefore \frac{m}{M} < e$$

（M が大きい程 はね返る、
というイメージは持っておこう。）

$\boxed{75}$



(イ) $x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ より

$$h_1 = 0 + \frac{1}{2}gt_1^2$$

$$\therefore t_1 = \underline{\sqrt{\frac{2h_1}{g}}} \quad //(イ)$$

(ロ) $v^2 - v_0^2 = 2ax$ より

$$v_1^2 - 0^2 = 2gh_1$$

$$v_1 = \underline{\sqrt{2gh_1}} \quad //(ロ)$$

※ $v = v_0 + at$ でもよい

※ 力学エネ保存で求めてもよい.

(ハ) $e = \dfrac{遠ざかる}{近づく} = \dfrac{v_2}{v_1}$

$$v_2 = ev_1 \qquad \therefore v_2 = \underline{e\sqrt{2gh_1}} \quad //(ハ)$$

(ニ) $v_0 = v_0 + at$ より

$$0 = e\sqrt{2gh_1} + (-g)t_2$$

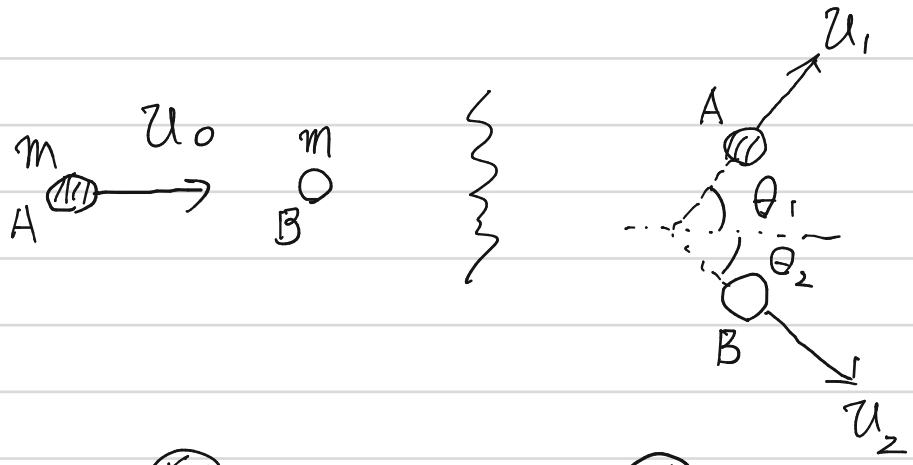
$$\therefore t_2 = e\sqrt{\frac{2h_1}{g}} = \underline{e\,t_1} \quad //(ニ)$$

(ホ) $v^2 - v_0^2 = 2ax$ より

$$0^2 - (e\sqrt{2gh_1})^2 = 2\cdot(-g)\cdot h_2$$

$$\therefore h_2 = \underline{e^2 h_1} \quad (ホ)$$

76 運動量はベクトル量なので成分にわけて保存則をたてる.



前　　後

x: $mv_0 = mv_1\cos\theta_1 + mv_2\cos\theta_2$

$\Rightarrow v_0 = v_1\cos\theta_1 + v_2\cos\theta_2 \cdots ①$

y: $0 = mv_1\sin\theta_1 + (-mv_2\sin\theta_2)$

※上向き正

$\Rightarrow 0 = v_1\sin\theta_1 - v_2\sin\theta_2 \cdots ②$

また、弾性衝突とかかれているので $e=1$ の衝突であるといえ、$e=1$ なら力学的エネルギーは保存する.

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2$$

$$\Rightarrow v_0^2 = v_1^2 + v_2^2 \cdots ③$$

①を辺々2乗して

$$v_0^2 = v_1^2\cos^2\theta_1 + 2v_1v_2\cos\theta_1\cos\theta_2 + v_2^2\cos^2\theta_2$$

②を辺々2乗して

$$0 = v_1^2\sin^2\theta_1 - 2v_1v_2\sin\theta_1\sin\theta_2 + v_2^2\sin^2\theta_2$$

$\boxed{76}$ 続き

2式をたして

$$v_0^2 = v_1^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) + 2v_1v_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + v_2^2(\sin^2\theta_2 + \cos^2\theta_2)$$

問題文に書かれている公式

$\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 = \cos(\theta_1+\theta_2)$ と

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より

$$\Rightarrow v_0^2 = v_1^2 + 2v_1v_2\cos(\theta_1+\theta_2) + v_2^2$$

③式を代入して、

$$v_1^2 + v_2^2 = v_1^2 + 2v_1v_2\cos(\theta_1+\theta_2) + v_2^2$$

$$\Rightarrow 0 = 2v_1v_2\cos(\theta_1+\theta_2)$$

$$\Rightarrow \cos(\theta_1+\theta_2) = 0$$

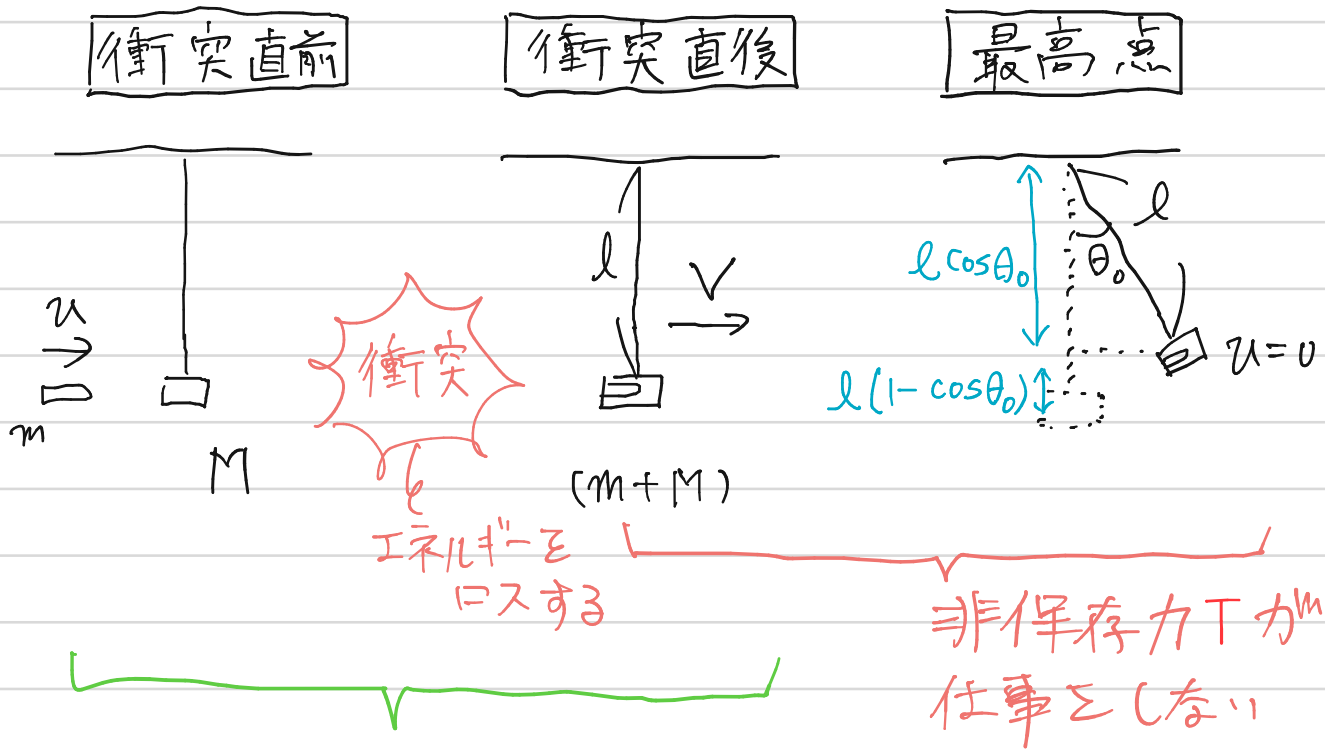
よって

$$\underline{\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}}$$

77 一体となる運動 ⇒ $e=0$ の衝突といえる.

⇓

エネルギーのロスがある.



保存則の成立する場面を正しく理解しておこう.

・運動量保存（直前 → 直後）

$$mv = (m+M)V$$

$$\Rightarrow V = \frac{m}{m+M}v \cdots ①$$

・エネルギー保存（直後 → 最高点）

$$\frac{1}{2}(m+M)V^2 = (m+M)gl(1-\cos\theta_0) \cdots ②$$

$\boxed{77}$ 続き

② に ① を代入

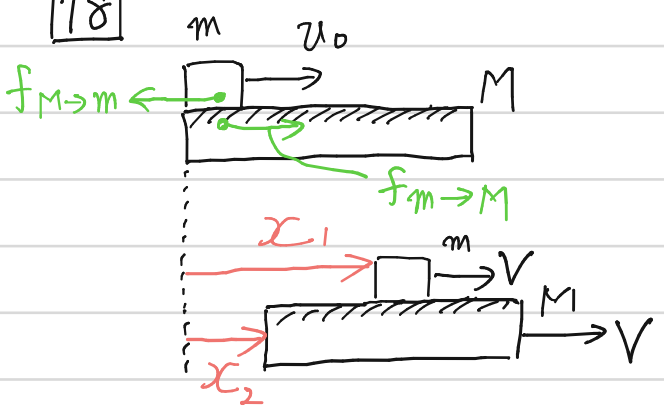
$$\frac{1}{2}\cancel{(m+M)}\cdot\left(\frac{m}{m+M}v\right)^2=\cancel{(m+M)}gl(1-\cos\theta_0)$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{m}{m+M}v\right)^2=gl-gl\cos\theta_0$$

$$gl\cos\theta_0=gl-\frac{1}{2}\left(\frac{m}{m+M}v\right)^2$$

$$\cos\theta_0=\underline{1-\frac{1}{2gl}\left(\frac{m}{m+M}v\right)^2}$$

78



(準備)

m の鉛直のつりあいより

$N = mg$

公式 $f = \mu N$ より

$f = \mu mg$

(1) 運動量の変化 = 力積 より

物体 $\underline{mV - mv_0}_{(イ)} = -\mu mg \cdot t$

台 $\underline{MV - 0}_{(ロ)} = \mu mg \cdot t$ (右向き正)

2式をたして

$mV - mv_0 + MV = 0$

$\Rightarrow mv_0 = \underline{mV + MV}_{(ハ)}$ ← 運動量保存の式が導かれる.

これより

$V = \underline{\frac{m}{m+M} v_0}_{(ニ)}$

(2) 運動エネルギーの変化 = 仕事 より

物体 $\frac{1}{2}mV^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \underline{-\mu mg \cdot x_1}_{(ホ)}$

台 $\frac{1}{2}MV^2 - 0 = \underline{\mu mg\, x_2}_{(ヘ)}$

2式をたして

$\frac{1}{2}mV^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}MV^2 = \mu mg(x_2 - x_1)$

$\Rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}(m+M)V^2 = \mu mg(x_1 - x_2)$

$= \underline{\mu mgl}_{(ト)}$

$\boxed{78}$ 続き

(二) の式を代入し、l について解くと

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}(m+M)\left(\frac{m}{m+M}v_0\right)^2 = \mu mgl$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{m^2}{2(m+M)}v_0^2 = \mu mgl$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2\left(1 - \frac{m}{m+M}\right) = \mu mgl$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2\left(\frac{M}{m+M}\right) = \mu mgl$$

$$l = \frac{M}{m+M}\cdot\frac{v_0^2}{2\mu g}$$