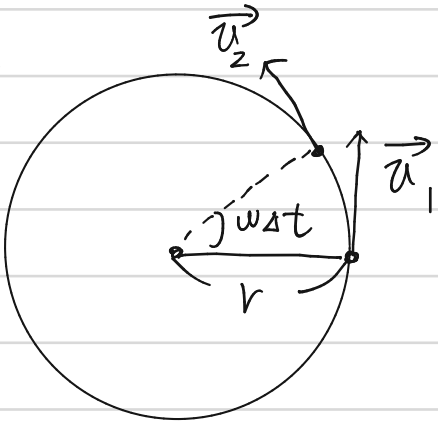
$\boxed{90}$

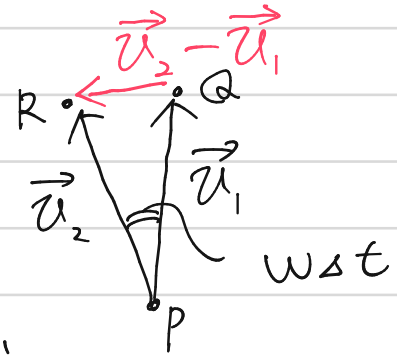


(イ)

$\Delta v = v_{後} - v_{前}$ なので

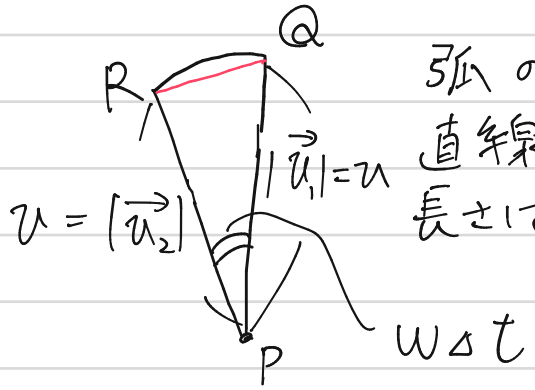
$\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$

ベクトルの引き算をすると



ここで

$\omega\Delta t$が小さければ



弧の長さ $\overset{\frown}{QR}$ と

直線 $\overline{QR}$ の

長さはほぼ等しい

よって

$$\Delta v = \overset{\frown}{QR} = \overline{QR} = \underline{v\omega\Delta t} \quad (イ)$$

(ロ)(ハ)(ニ)

$a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ より

$$a = \frac{v\omega\Delta t}{\Delta t} = \underbrace{v\omega}_{(ロ)} = \underbrace{\frac{v^2}{r}}_{(ハ)} = \underbrace{r\omega^2}_{(ニ)}$$

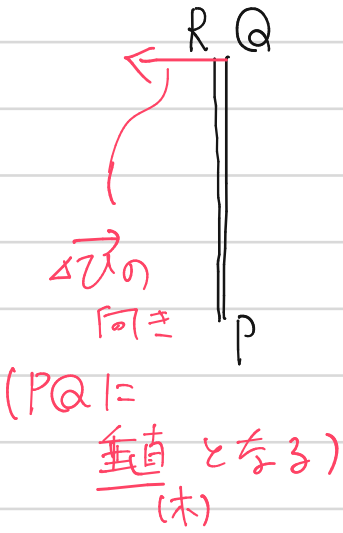
$\omega = \dfrac{v}{r}$ より

$v = r\omega$ より

$\boxed{90}$ 続き

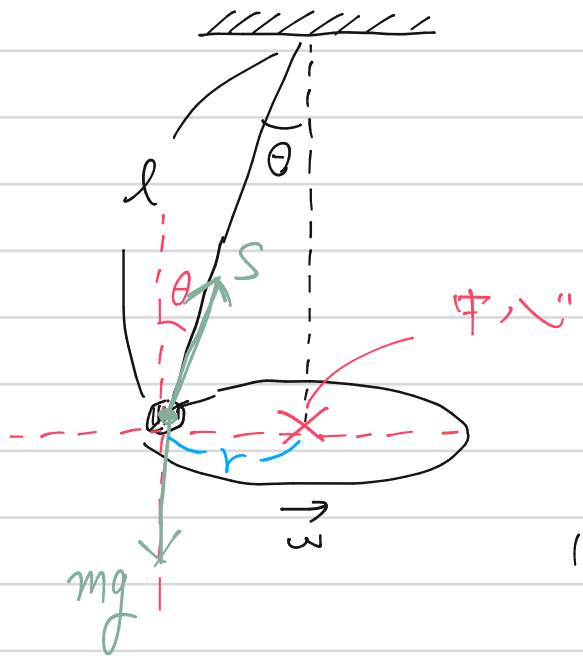
(ホ)

$\Delta t \to 0$ のときを図にする



⇒ (ヘ) 加速度は 中心 向き
(ヘ)

91 中心向きに軸をとる。



(イ) 中心向きの運動方程式

$$m\underbrace{r\omega^2}_{a} = F$$

$$m \cdot l\sin\theta \cdot \omega^2 = S\sin\theta \quad \cdots ①$$ (イ)

これを向心力とよぶ

(ロ) 鉛直方向はつりあい

$$S\cos\theta = mg$$

$$\Rightarrow 0 = S\cos\theta - mg \quad \cdots ②$$ (ロ)

(ハ)

② より $S = \dfrac{mg}{\cos\theta}$

① に代入

$$ml\sin\theta \cdot \omega^2 = \frac{mg}{\cos\theta}\sin\theta$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l\cos\theta}}$$ (ハ)

(ニ)(ホ)

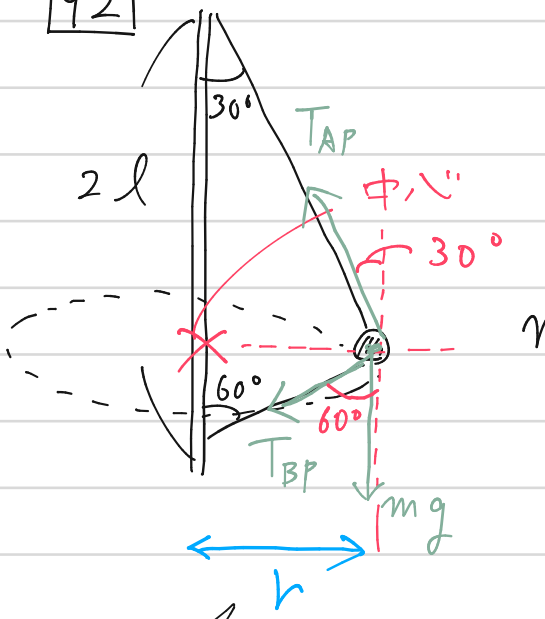
公式

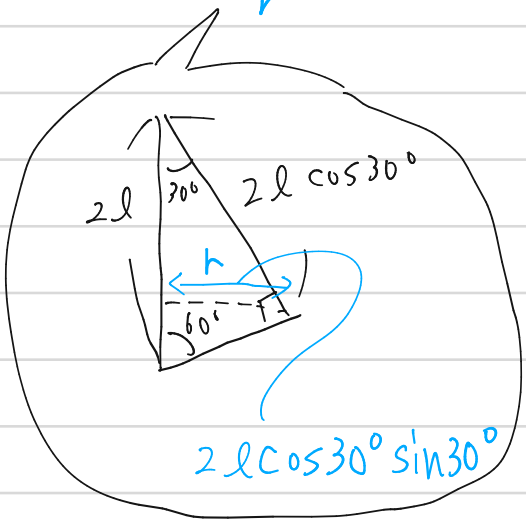
$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$ より (ニ)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l\cos\theta}{g}}$$ (ホ)

(ヘ) θが小さくなると cosθは大きくなるため 長くなる (ヘ)

92





(向心力)は

$$T_{AP}\sin 30^\circ + T_{BP}\sin 60^\circ$$

円の中心向きの運動方程式

$$mr\omega^2 = F \quad \text{より}$$

$$m\cdot \underbrace{2\ell\cos 30^\circ \sin 30^\circ}_{r}\cdot \omega^2 = T_{AP}\sin 30^\circ + T_{BP}\sin 60^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}m\ell\omega^2 = \frac{1}{2}T_{AP} + \frac{\sqrt{3}}{2}T_{BP} \cdots ①$$

鉛直はつりあい

$$T_{AP}\cos 30^\circ = T_{BP}\cos 60^\circ + mg$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}T_{AP} = \frac{1}{2}T_{BP} + mg \cdots ②$$

① × $\sqrt{3}$ をすると

$$\frac{3}{2}m\ell\omega^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}T_{AP} + \frac{3}{2}T_{BP} \cdots ①'$$

②を①'に代入すると

$$\frac{3}{2}m\ell\omega^2 = \frac{1}{2}T_{BP} + mg + \frac{3}{2}T_{BP}$$

$$T_{BP} = \frac{3}{4}m\ell\omega^2 - \frac{1}{2}mg$$

$\omega = 2\pi n$ なので

$$T_{BP} = \frac{3}{4}m\ell(2\pi n)^2 - \frac{1}{2}mg$$

$$T_{BP} = 3\pi^2 m\ell n^2 - \frac{1}{2}mg$$

$$T_{BP} = \underline{\frac{m}{2}(6\pi^2\ell n^2 - g)}$$

$\boxed{92}$ 続き

② に T_{BP} を代入して

$$\frac{\sqrt{3}}{2}T_{AP} = \frac{1}{2}\left\{\frac{m}{2}(6\pi^2 l n^2 - g)\right\} + mg$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}T_{AP} = \frac{m}{4}(6\pi^2 l n^2) - \frac{mg}{4} + mg$$

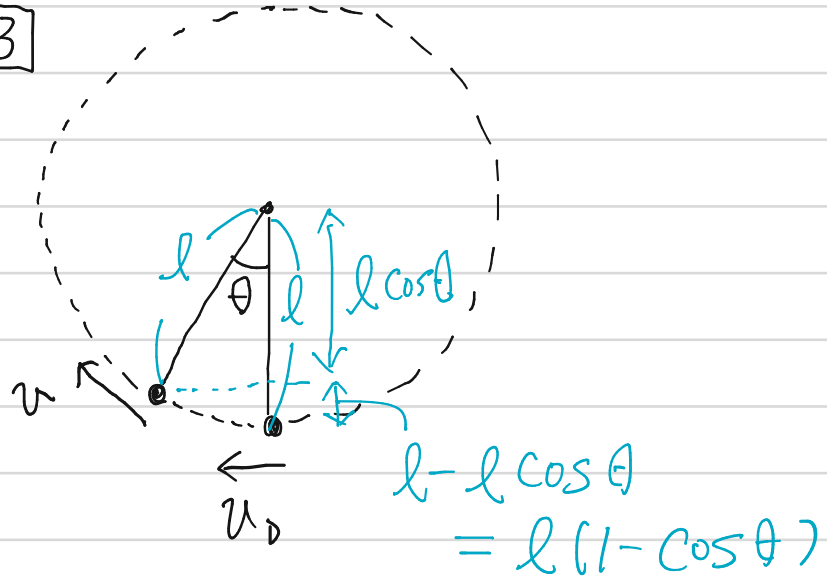
$$\frac{\sqrt{3}}{2}T_{AP} = \frac{m}{4}(6\pi^2 l n^2 + 3g)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}T_{AP} = \frac{3m}{4}(2\pi^2 l n^2 + g)$$

$$\therefore\ T_{AP} = \underline{\frac{\sqrt{3}m}{2}(2\pi^2 l n^2 + g)}$$

※模範解答と出す順番が逆になりました。

93



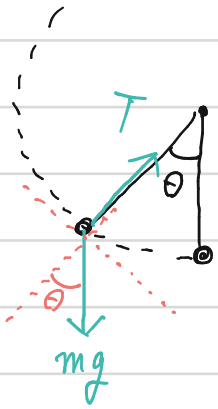
(イ) 最下点を重力による位置エネルギーの基準とすると

$$(\text{最下点}) = (\text{位置}\ \theta)$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mgl(1-\cos\theta)$$

$$\therefore\ v^2 = v_0^2 - 2gl(1-\cos\theta)$$

(ロ) はたらく力を書いて、中心向きの力を求めると、



中心向き成分は

$$T - mg\cos\theta$$

これが向心力Fとなっている。

円運動の運動方程式をたてると

$$m\frac{v^2}{r} = F$$

$$\Rightarrow\ m\frac{v^2}{l} = \underline{T - mg\cos\theta}\ (ロ)$$

93 続き

(ハ) T について解いて

$$T = m\frac{v^2}{l} + mg\cos\theta$$

(イ) の v^2 を代入して

$$T = m\frac{v_0^2 - 2gl(1-\cos\theta)}{l} + mg\cos\theta$$

$$= m\frac{v_0^2}{l} - 2mg(1-\cos\theta) + mg\cos\theta$$

$$= m\frac{v_0^2}{l} - 2mg + 3mg\cos\theta$$

$$= m\left\{\frac{v_0^2}{l} + (3\cos\theta - 2)g\right\}$$

(二) 糸がたるまずに最高点 ⇒ 最高点 ($\theta=\pi$) で $T=0$ でギリギリ

(ハ) の式より $\theta=\pi$ のときの T は

$$T = m\left\{\frac{v_0^2}{l} + (-3-2)g\right\}$$

$$T = m\left(\frac{v_0^2}{l} - 5g\right)$$

ここで $T=0$ となるときの v_0 は

$$v_0^2 = 5gl$$

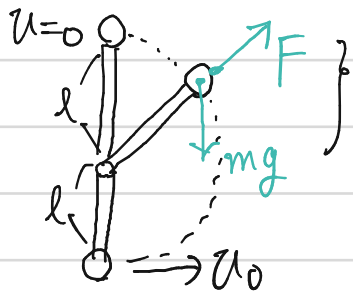
$$\therefore v_0 = \sqrt{5gl}$$

これより大きければいいので

$$v_0 \geqq \sqrt{5gl}$$

93 続き

(ホ) 棒の場合は棒が支えてくれるので、vが小さくても最高点に到達できる



円軌道を保って移動する。

⇓

最高点で $v=0$ となる v_0 がギリギリ

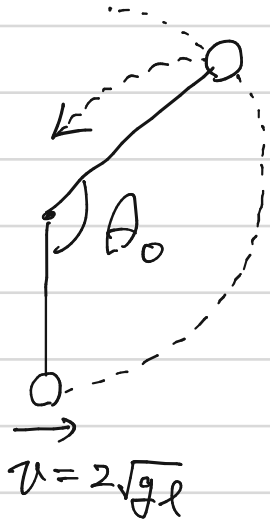
$\Rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 = mg\cdot 2l$

$\therefore v_0 = \sqrt{4gl} = 2\sqrt{gl}$

これより大きければいいので

$v_0 > 2\sqrt{gl}$

※ ひもで $v_0 = 2\sqrt{gl}$ で打ちだすとどうなるか



途中で糸がたるんで円軌道の内側に入ってしまう。

⇒ 最高点に到達できない

ちなみに(イ)の式

$T = m\left\{\frac{v_0^2}{l} + (3\cos\theta - 2)g\right\}$

で $v_0 = 2\sqrt{gl}$ のとき

$T = m\left\{\frac{4gl}{l} + (3\cos\theta - 2)g\right\}$

$T = mg(4 + 3\cos\theta - 2)$

$T = mg(2 + 3\cos\theta)$

ここで $T=0$ となるのは

$\cos\theta = -\frac{2}{3}$

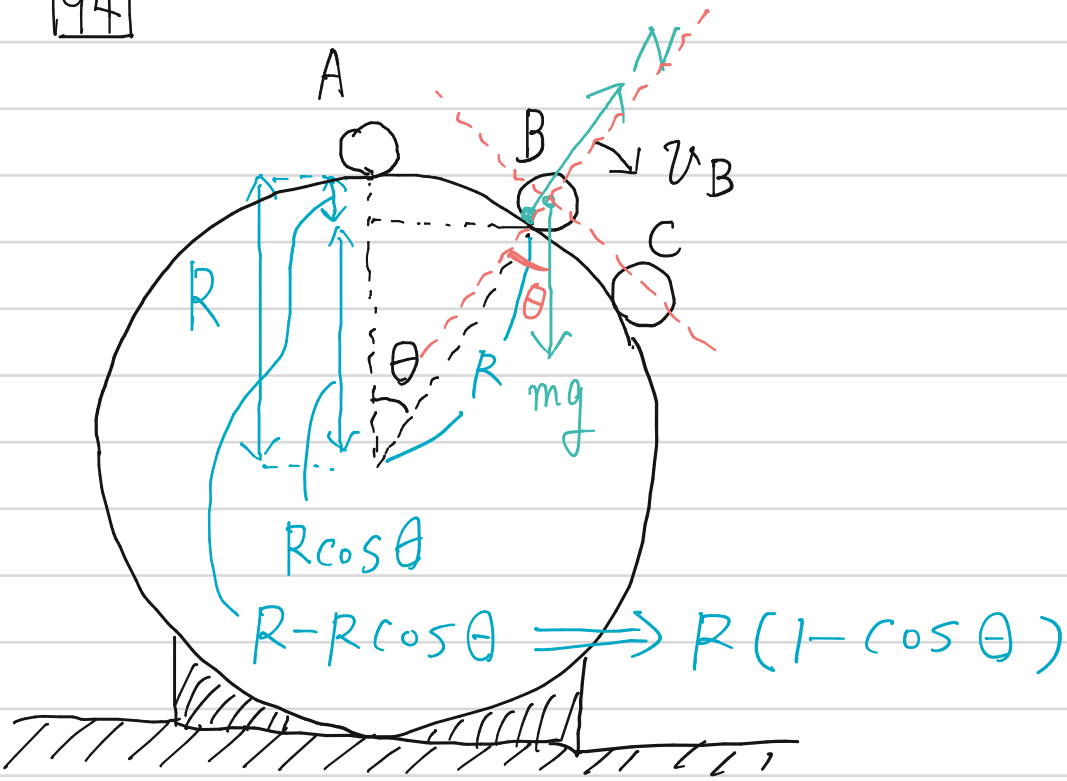
のときで、三角関数表を用いると、

$\theta = 131.8^\circ$

くらいでたるむとわかる。

最高点まで行けないのだ。

94



(1) B点を重力による位置エネルギーの基準とすると エネルギー保存より

$$(A) = (B)$$

$$mgR(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}mv_B^2$$

$$\therefore v_B^2 = 2gR(1-\cos\theta)$$

円運動の運動方程式より

$$m\frac{v_B^2}{R} = mg\cos\theta - N$$

$$\therefore N = mg\cos\theta - m\frac{v_B^2}{R}$$

v_B^2を代入して

$$N = mg\cos\theta - m\frac{2gR(1-\cos\theta)}{R}$$

$$= \underline{mg(3\cos\theta - 2)}$$

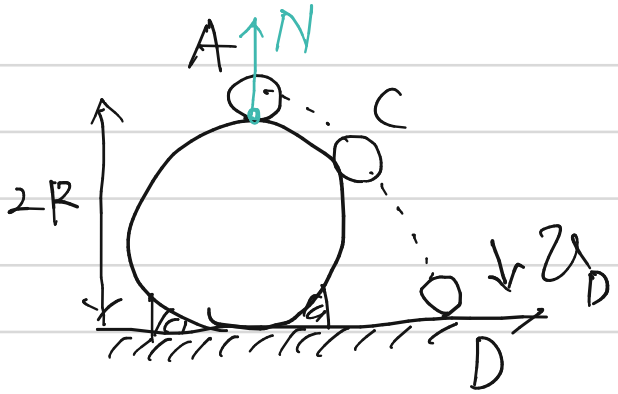
94 続き

(2) $N=0$ となるとき面から離れるので

$$0 = mg(3\cos\theta_0 - 2)$$

$$\therefore \cos\theta_0 = \frac{2}{3}$$

(3) 非保存力である N は常に軌道と 90° なので、仕事はせず力学的エネルギーは保存する.

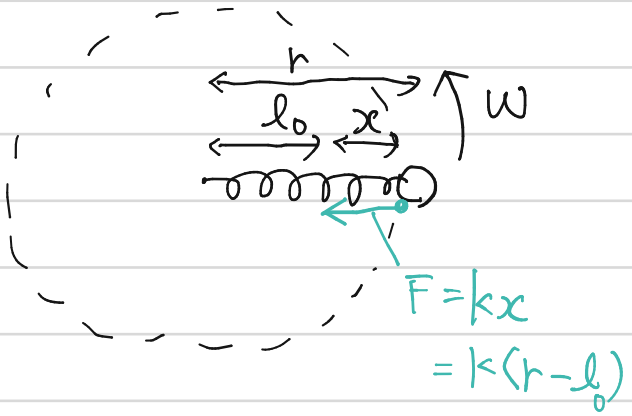


(A) = (D) でエネ保存

$$2mgR = \frac{1}{2}mv_D^2$$

$$v_D = 2\sqrt{gR}$$

97



ここで回転数 n と角速度 ω の関係は

$$\underbrace{\omega}_{\text{1s分の角度}} = \underbrace{2\pi}_{\text{1周分の角度}} \times \underbrace{n}_{\text{1sに何周するか}}$$

となる。

円運動の運動方程式より

$$m r \omega^2 = F$$

$$m r \cdot (2\pi n)^2 = k(r - l_0)$$

$n=2$ のときは $r = 0.24\,m$ なので

$$m \times 0.24 \times (2\pi \times 2)^2 = k(0.24 - l_0)$$

$$\Rightarrow \quad 0.24 \times 16\pi^2 m \quad k(0.24 - l_0) \cdots ①$$

$n=3$ のときは $r = 0.32\,m$ なので

$$m \times 0.32 \times (2\pi \times 3)^2 = k(0.32 - l_0)$$

$$\Rightarrow \quad 0.32 \times 36\pi^2 m = k(0.32 - l_0) \cdots ②$$

$\frac{①}{②}$ をとって整理する

$$\frac{0.24 \times 16\cancel{\pi^2 m}}{0.32 \times 36\cancel{\pi^2 m}} = \frac{\cancel{k}(0.24 - l_0)}{\cancel{k}(0.32 - l_0)}$$

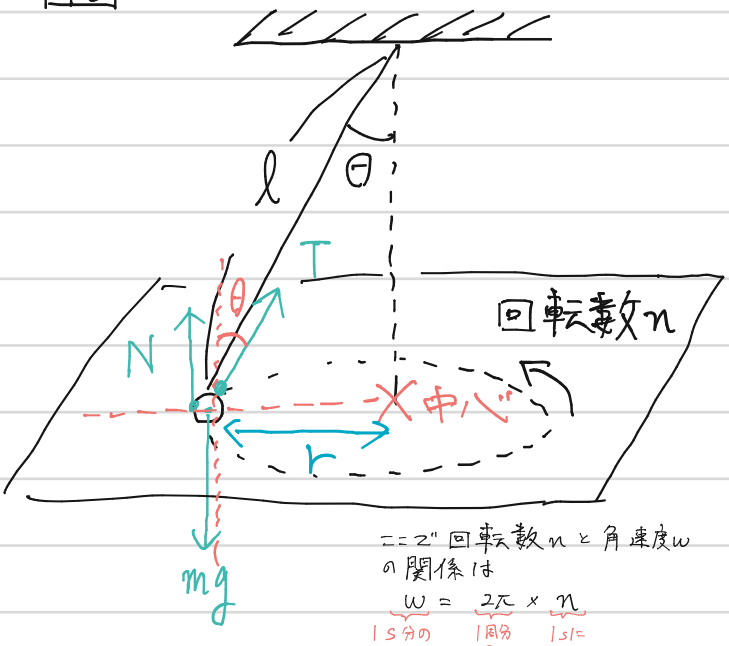
$$\frac{1}{3} = \frac{0.24 - l_0}{0.32 - l_0}$$

$$0.32 - l_0 = 3(0.24 - l_0)$$

$$2l_0 = 0.72 - 0.32$$

$$l_0 = \underline{0.20\,m}$$

98



ここで回転数nと角速度ωの関係は

$$\underbrace{\omega}_{1s分の角度} = \underbrace{2\pi}_{1周分の角度} \times \underbrace{n}_{1sに何周するか}$$

となる.

中心向きの運動方程式より

$$m \cdot l\sin\theta \cdot \omega^2 = T\sin\theta$$

$\Downarrow$ $\omega = 2\pi n$ なので

$$4\pi^2 m l n^2 \sin\theta = T\sin\theta$$

$\Downarrow$

$$4\pi^2 m l n^2 = T \quad \cdots ①$$

鉛直方向はつりあい

$$N + T\cos\theta = mg \quad \cdots ②$$

(1) Nについて

②に①を代入して

$$N + 4\pi^2 m l n^2 \cos\theta = mg$$

$$\therefore N = mg - 4\pi^2 m l n^2 \cos\theta$$

$$= \underline{m(g - 4\pi^2 l n^2 \cos\theta)}$$

※模範解答は非慣性(一緒に回転する人視点)でみて、遠心力を書き、つりあいの式をたてている

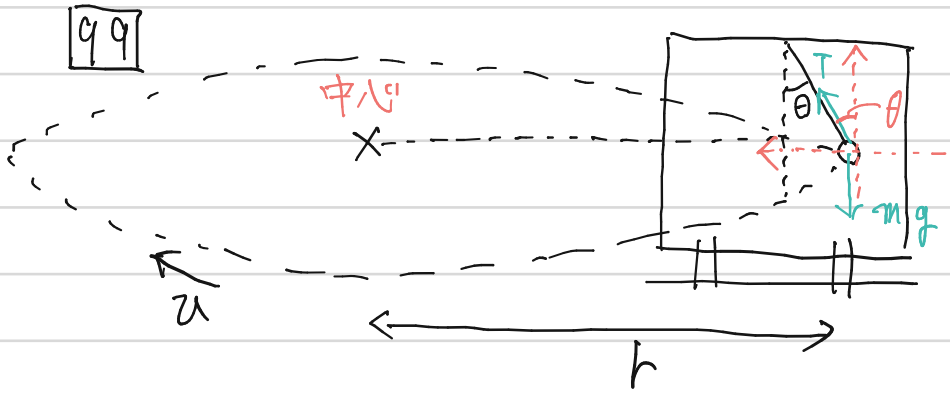
(2) $N = 0$ となる n のとき床から離れる.

$N = m(g - 4\pi^2 l n^2 \cos\theta)$ で $N = 0$ となるのは

$$n^2 = \frac{g}{4\pi^2 l \cos\theta}$$ のとき

$$\therefore n = \underline{\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l\cos\theta}}}$$

99



中心方向の運動方程式をたてると

$$m\frac{v^2}{r} = T\sin\theta \cdots ①$$

※模範解答は非慣性(一緒に回転する人視点)でみて、遠心力を書き、つりあいの式をたてている

鉛直のつりあい

$$mg = T\cos\theta \cdots ②$$

$\frac{①}{②}$ でTを消去

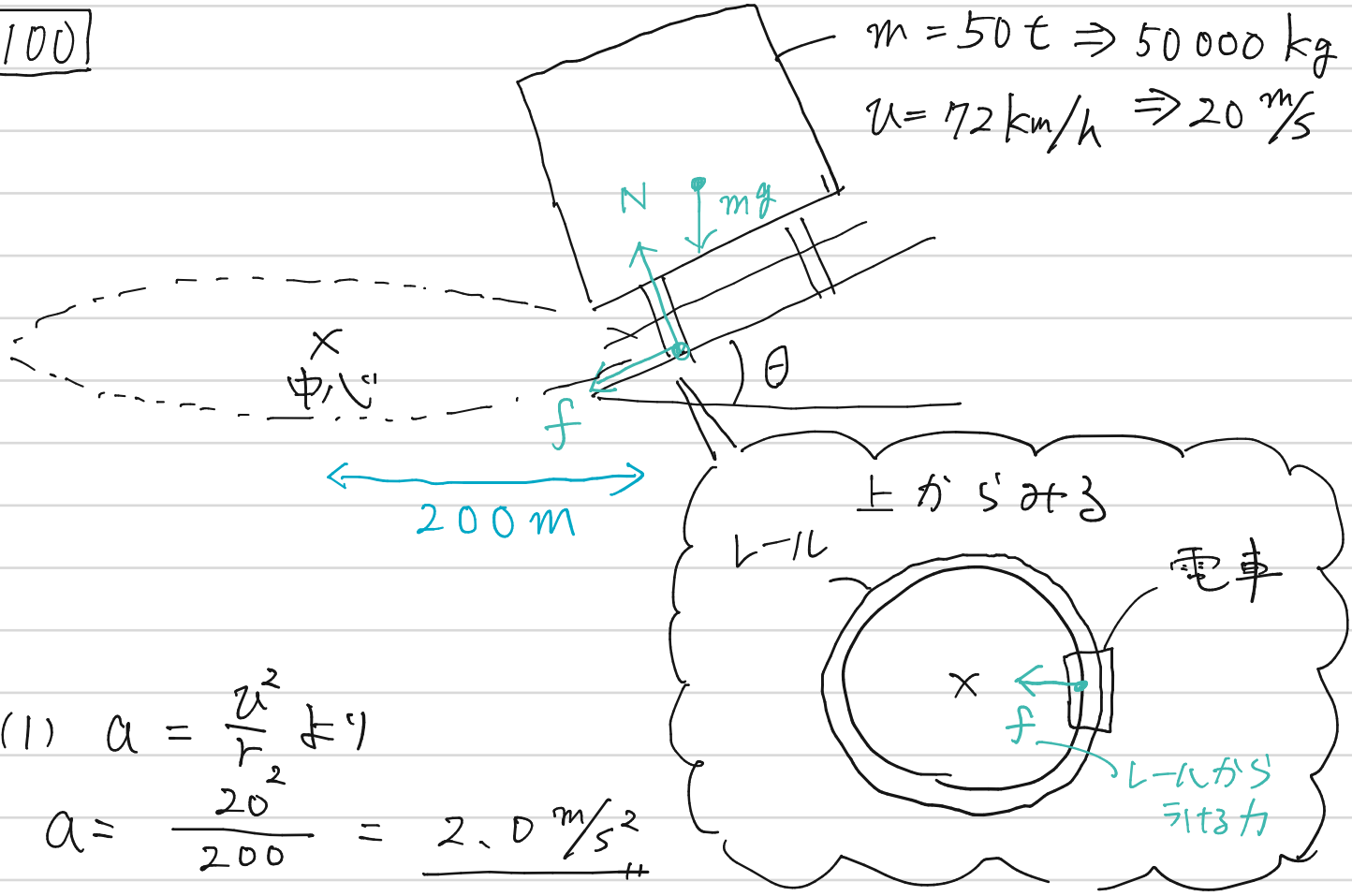
$$\frac{m\frac{v^2}{r}}{mg} = \frac{T\sin\theta}{T\cos\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{v^2}{rg} = \tan\theta$$

100

$m = 50\,t \Rightarrow 50000\,kg$

$v = 72\,km/h \Rightarrow 20\,m/s$



(1) $a = \frac{v^2}{r}$ より

$a = \frac{20^2}{200} = \underline{2.0\,m/s^2}$

(2) 円運動の運動方程式より

$m\frac{v^2}{r} = \underset{(向心力)}{F}$

$50000 \times 2.0 = F$

$\therefore F = 100000 = 1.0 \times 10^5\,N$

(3) N や f の中心成分が向心力となっているので，N のみで十分な向心力となれば $f = 0$ となる．
$f = 0$ と想定して力の関係式をたてると

(中心向きの運動方程式)

$m\frac{v^2}{r} = N\sin\theta$ …①

(鉛直のつりあい)

$mg = N\cos\theta$ …②

$\boxed{100}$ (3) 続き

$\frac{①}{②}$ より

$$\frac{N\sin\theta}{N\cos\theta} = \frac{m\frac{v^2}{r}}{mg}$$

$$\tan\theta = \frac{v^2}{gr} = \frac{20^2}{9.8\times 200} \fallingdotseq \underline{0.20}$$