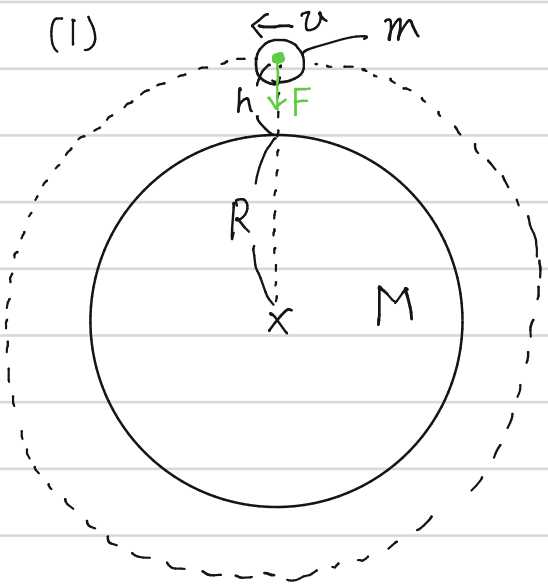
112

(1)



万有引力Fの大きさは

$$F = G\frac{mM}{(R+h)^2}$$

これが向心力となり，円運動をする

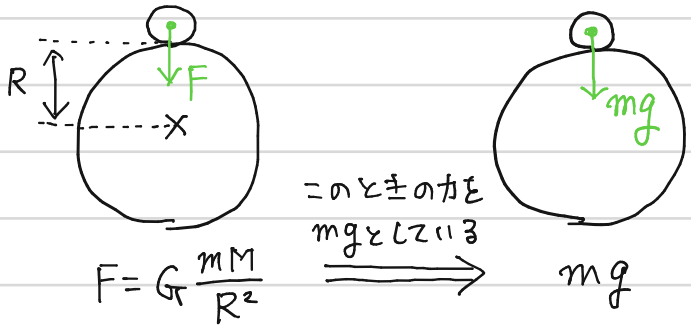
円運動の運動方程式より

$$m\frac{v^2}{r} = F$$

$$\Rightarrow m\frac{v^2}{R+h} = G\frac{mM}{(R+h)^2}$$

$$\therefore\ v = \sqrt{\frac{GM}{R+h}}$$

(2) 地表での万有引力を図示すると



※ Rより遠いと重力(万有引力)は mgより小さくなるのだ。

これを使ってGとgの関係をたてると

$$G\frac{mM}{R^2} = mg$$

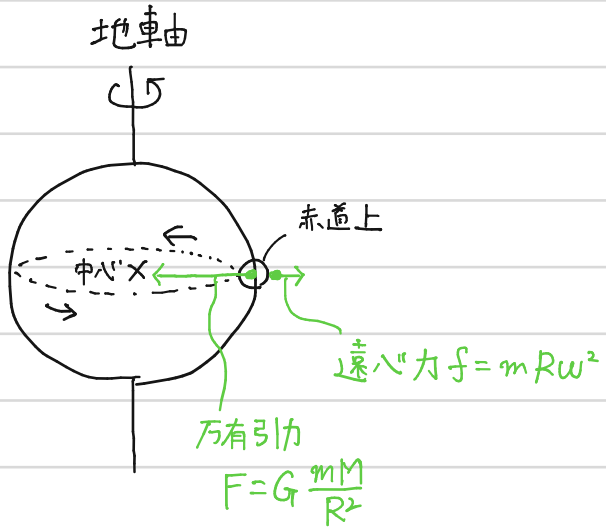
$$\Rightarrow GM = gR^2$$

(3) $v = \sqrt{\frac{GM}{R+h}}$ に $GM = gR^2$ を代入して

$$v = \sqrt{\frac{gR^2}{R+h}} = R\sqrt{\frac{g}{R+h}}$$

113

(1)

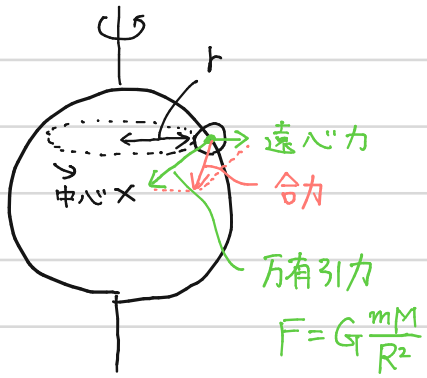


$$(\text{重力}) = G\frac{mM}{R^2} - mR\omega^2$$

⇓これを重力 mg と呼ぶ

$$mg = G\frac{mM}{R^2} - mR\omega^2$$

※これが赤道付近でなかったら



左図のように円軌道に合わせた遠心力がはたらき、合力が、中心向きから少しずれるようなベクトル合成となる。

この↓合力部分を重力 mg と呼ぶ。

※重力という言葉が指すものが、かなり曖昧なので注意

- (万有引力) = (重力)
- (地表付近での万有引力) = (重力)
- (万有引力) + (遠心力) = (重力)

どの意味で「重力」という言葉が使われているかは文脈から判断しないといけない。

(2) 万有引力が $F=G\frac{mM}{R^2}$

遠心力が $f=mR(x\omega)^2$

となり、これらがつりあうので

$$G\frac{mM}{R^2} = mR(x\omega)^2$$

$\boxed{114}$

(イ)(ロ) 円運動の加速度は $a = r\omega^2$ であり、$\omega = \frac{2\pi}{T}$ を用いると

$a = r\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$ とかける。これで運動方程式をたてると、

$F = ma$ より

$$\Rightarrow G\frac{mM}{r^2} = \underline{mr\omega^2}_{\#(イ)}$$

$$\Rightarrow G\frac{mM}{r^2} = mr\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \underline{\frac{4\pi^2 mr}{T^2}}_{\#(ロ)}$$

(ハ) $G\frac{mM}{r^2} = \frac{4\pi^2 mr}{T^2}$ より

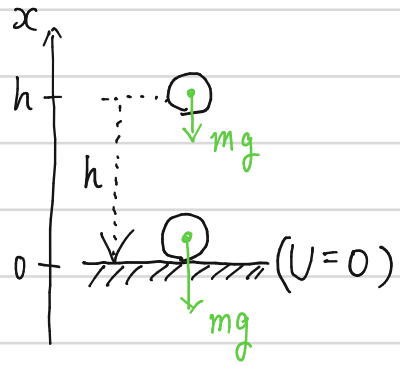
$$\Rightarrow \frac{T^2}{r^3} = \underline{\frac{4\pi^2}{GM}}_{\#(ハ)} = 一定$$

(∵ π、G、M が定数)

※この式を変形すると $T^2 = ka^3$ というよく見る形で示せる。

$$\Rightarrow T^2 = \underbrace{\frac{4\pi^2}{GM}}_{ここがk.} r^3$$

115 身近な概念と照らしあわせて考えよう.



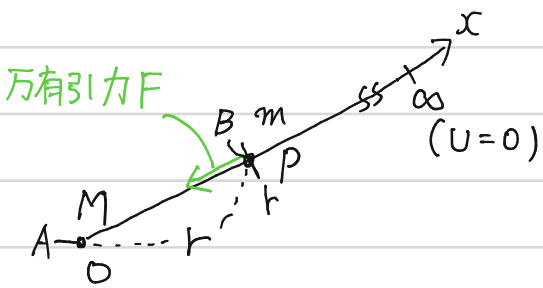
重力 mg がはたらく場で、物体を運ぶ仕事は経路によらない。このような力を保存力と呼ぶ。
その際、ある点から、Uの基準($U=0, x=0$)まで移動したとき mg がした仕事が位置エネルギーだったといえ、

$$U = W_{mg} = \int_h^0 (-mg)\,dx$$

$$= \left[-mgx\right]_h^0 = mgh$$

となる。

これを万有引力で考える



点P($x=r$)からUの基準($U=0, x=\infty$)まで移動したとき万有引力が万有引力による位置エネルギーだったといえ、

$$U = W_F = \int_r^\infty \left(-G\frac{mM}{x^2}\right)dx$$

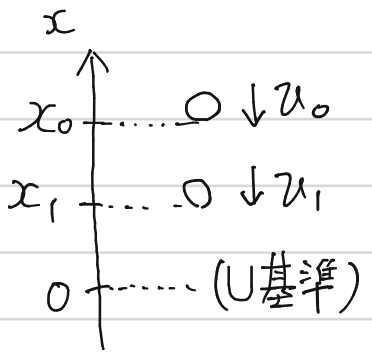
$$= \underbrace{\left[\frac{GmM}{x}\right]_r^\infty}_{\neq(=)} = -G\frac{mM}{r}$$

となる。

116

- 「位置エネルギーの基準」について.

位置エネルギーで大切なのは「差」であり、基準はどこにとってもよいのだ



左図のようなモデルで、力学エネの保存の式をたてると

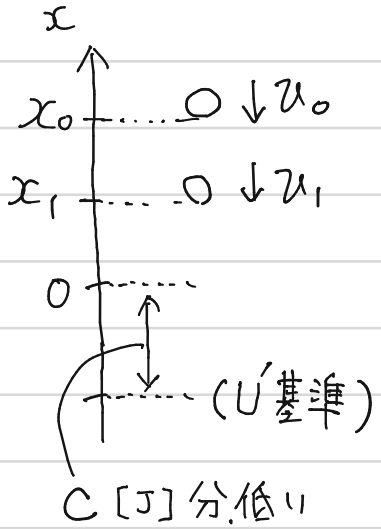
$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgx_0 = \frac{1}{2}mv_1^2 + mgx_1$$

となり、変形すると

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = mgx_0 - mgx_1$$

(運動エネの変化)=(重力エネの減少量)

という風に書け、「重力エネの差」がポイントなのがわかる。



これは、Cを定数として

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgx_0 + C = \frac{1}{2}mv_1^2 + mgx + C$$

と書いても支障がない。これは、「mgx_0+C」や「$mgx+C$」が、基準がもとより低いときの位置エネといえて、低い分のエネルギー量をCとすると、

$$U' = mgx + C$$

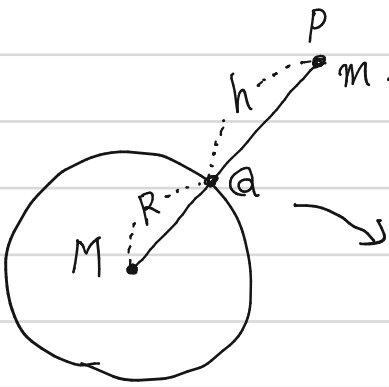
と重力エネの式を書けるのだ。(左図参照)

さて、万有引力の位置エネルギーは、無限遠点を基準にすると、

$$U = -G\frac{mM}{x}$$

と計算できるけれど、基準をかえたらどう書けるか、というのが今回の問題である。

116 続き



$$U_P = -G\frac{mM}{R+h}$$

$$U_Q = -G\frac{mM}{R}$$

無限遠点を基準としたときの万有引力による位置エネルギー

ここで Q を基準としたとき、基準の差によるエネルギーの差を定数 C とおき、基準がちがうときのエネルギー U' を書くと

$$U_Q' = -G\frac{mM}{R} + C$$

となり、$U_Q' = 0$ なので

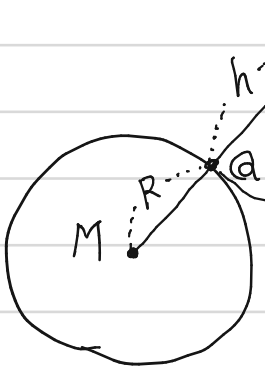
$$C = G\frac{mM}{R}$$

となる。すると U_P' は

$$U_P' = -G\frac{mM}{R+h} + C$$

$$= -G\frac{mM}{R+h} + G\frac{mM}{R} = \underline{GMm\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right)}$$

※ もっとかみくだいて解釈してみる。



$$U_P = -G\frac{mM}{R+h}$$

$$U_Q = -G\frac{mM}{R}$$

差 $\Delta U = U_P - U_Q$

⇓

$U_Q' = 0$ としたら U_P' は

$$\underset{(0)}{U_Q'} + \Delta U = U_P'$$

$$\therefore U_P' = \Delta U$$

$$= \underline{\left(-G\frac{mM}{R+h}\right) - \left(-G\frac{mM}{R}\right)}$$

116 続き

(2) $(1+\alpha)^n \fallingdotseq 1+n\alpha$ の近似で指数を下げることを目指す.

$\alpha \ll 1$ である必要があるので $\frac{h}{R}$ を作る.

$$U_p' = GmM\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right)$$

$$= \frac{GmM}{R}\left(1 - \frac{R}{R+h}\right)$$

$$= \frac{GmM}{R}\left\{1 - \left(\frac{R+h}{R}\right)^{-1}\right\}$$

$$= \frac{GmM}{R}\left\{1 - \left(1+\frac{h}{R}\right)^{-1}\right\}$$

近似

$$\fallingdotseq \frac{GmM}{R}\left\{1 - \left(1-\frac{h}{R}\right)\right\}$$

$$= \frac{GmM}{R^2}h \quad \cdots ①$$

ここで地表での万有引力と mg の関係から G を消去する.

$$G\frac{mM}{R^2} = mg$$

① に代入して

$$\underline{U_p' = mgh}$$

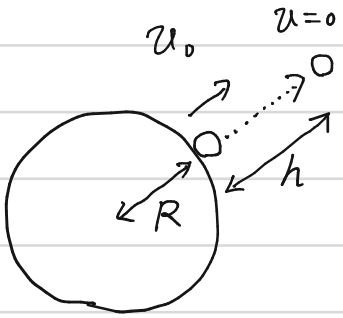
※ $U = mgh$ は地表付近での重力エネで

$U = -G\frac{mM}{x}$ は地表から離れたときの重力エネなので

万有引力の問題で $U = mgh$ は使わないようにしよう.

$\boxed{117}$

(1) 力学的エネルギーの保存で考える。



(初め)　　(最高点)

$$\frac{1}{2}mv_0^2+\left(-G\frac{mM}{R}\right)=0+\left(-G\frac{mM}{R+h}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2=GmM\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R+h}\right)$$

$$=GmM\frac{h}{R(R+h)}$$

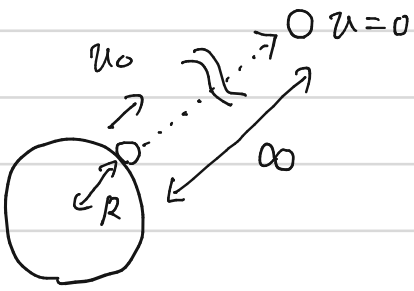
$$\Rightarrow \frac{\cancel{m}v_0^2R(R+h)}{2}=G\cancel{m}Mh$$

$$\Rightarrow GMh-\frac{v_0^2Rh}{2}=\frac{v_0^2R^2}{2}$$

$$\Rightarrow h\left(\frac{2GM-v_0^2R}{2}\right)=\frac{v_0^2R^2}{2}$$

$$\therefore h=\frac{v_0^2R^2}{2GM-v_0^2R}$$

(2) 無限遠点にギリギリ到達するときの初速度を求める.



(始め)　　(無限遠点)

$$\frac{1}{2}mv_0^2+\left(-G\frac{mM}{R}\right)=0+0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2=G\frac{mM}{R}$$

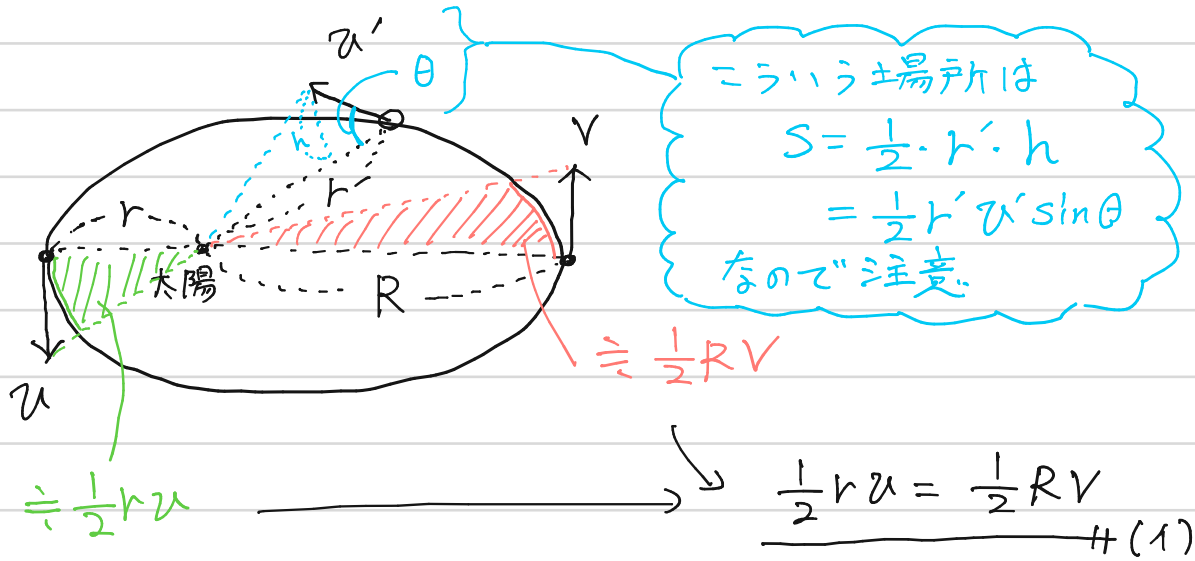
$$\therefore v_0=\frac{2GM}{R}$$

これがギリギリなので

$$v_0\geqq\frac{2GM}{R}$$

118

(イ) ケプラーの第2法則（面積速度一定の法則）



$$\frac{1}{2}rv = \frac{1}{2}RV \quad /\!/ (イ)$$

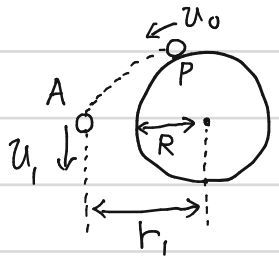
(ロ) 力学的エネルギーの保存

$$\underbrace{\frac{1}{2}mv^2 + \left(-G\frac{mM}{r}\right)}_{(近日点)} = \underbrace{\frac{1}{2}mV^2 + \left(-G\frac{mM}{R}\right)}_{(遠日点)} \quad /\!/ (ロ)$$

この2式を解くことで v, V を求めることができる。
大変な計算になるので一度は練習しておきましょう。

$\boxed{119}$ (いきなり模範解答のような計算をするのはきびしい、地道にゴリ押そう)

(1)

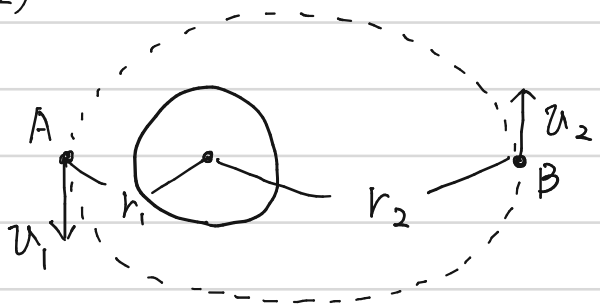


力学的エネルギーの保存より

$$\overset{(P)}{K_0 + \left(-G\frac{mM}{R}\right)} = \overset{(A)}{\frac{1}{2}mv_1^2 + \left(-G\frac{mM}{r_1}\right)}$$

$$\therefore K_0 = \underline{\frac{1}{2}mv_1^2 + GmM\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r_1}\right)}$$

(2)



(a) 面積速度一定

$$\underline{\frac{1}{2}r_1 v_1 = \frac{1}{2}r_2 v_2} \quad \cdots ①$$

(b) 力学的エネルギーの保存

$$\overset{(A)}{\frac{1}{2}mv_1^2 + \left(-G\frac{mM}{r_1}\right)} = \overset{(B)}{\frac{1}{2}mv_2^2 + \left(-G\frac{mM}{r_2}\right)} \quad \cdots ②$$

(3) ①より

$$v_1 = \frac{r_2}{r_1}v_2$$

②に代入して

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{r_2}{r_1}v_2\right)^2 - G\frac{mM}{r_1} = \frac{1}{2}mv_2^2 - G\frac{mM}{r_2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv_2^2\left(\frac{r_2^2}{r_1^2} - 1\right) = GmM\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

$\boxed{119}$ (3) 続き

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv_2^2\left(\frac{r_2}{r_1}+1\right)\cancel{\left(\frac{r_2}{r_1}-1\right)} = \frac{GmM}{r_2}\cancel{\left(\frac{r_2}{r_1}-1\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv_2^2\left(\frac{r_2}{r_1}+1\right) = \frac{GmM}{r_2}$$

ここで B での運動エネルギーは $\frac{1}{2}mv_2^2$，そのときの位置エネルギーは $G\frac{mM}{r_2}$ なので求めたい式は

$$\frac{\frac{1}{2}mv_2^2}{G\frac{mM}{r^2}}$$ である。

②′を変形して

$$\frac{\frac{1}{2}mv_2^2}{G\frac{mM}{r_2}}\left(\frac{r_2}{r_1}+1\right) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{2}mv_2^2}{G\frac{mM}{r_2}} = \frac{r_1}{r_1+r_2} \quad \cdots ③$$

(4) だ円軌道では使えないが、円軌道になったら、円運動の運動方程式

$$m\frac{v^2}{r} = F$$

がたてられる。今回のモデルでたてると

$$m\frac{V^2}{r_2} = G\frac{mM}{r_2^2} \quad \cdots ④$$

となる。Vとv_2を関連づけるため③の式を使う。

④を変形して

$$\frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{GmM}{r_2} \quad \cdots ④'$$

119 (4) 続き

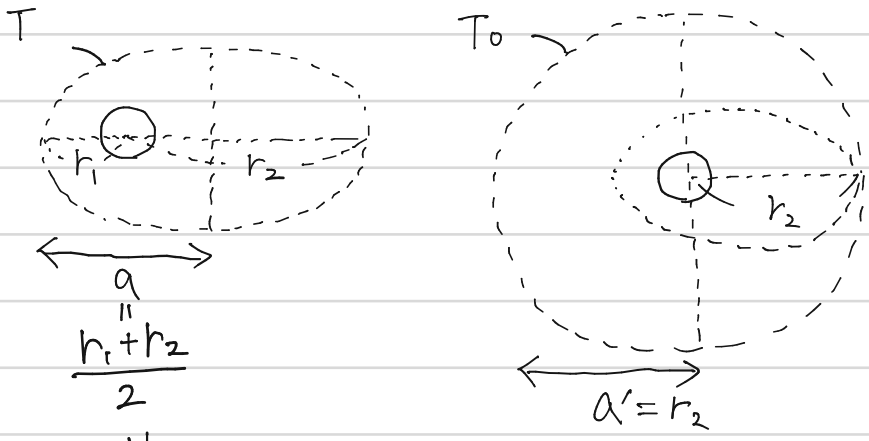
$\frac{④}{③}$ で $\frac{V}{v}$ を作ると

$$\frac{\frac{1}{2}mV^2}{\frac{\frac{1}{2}mv_2^2}{\frac{GmM}{r_2}}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{GmM}{r_2}}{\frac{r_1}{r_1+r_2}} \begin{matrix} \}④ \\ \}③ \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \frac{V^2}{v_2^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{r_1+r_2}{r_1}$$

$$\therefore \frac{V}{v_2} = \sqrt{\frac{r_1+r_2}{2r_1}} \quad //$$

(5) ケプラーの第3法則 $T^2=ka^3$ を用いる。
半長軸 a をまちがえないように気をつける。



$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$T^2=ka^3 \qquad\qquad T_0^2=ka'^3$$

2式より $\frac{T_0^2}{T^2} = \frac{ka'^3}{ka^3}$

$$= \frac{r_2^3}{\left(\frac{r_1+r_2}{2}\right)^3} = \frac{(2r_2)^3}{(r_1+r_2)^3} \quad \therefore \frac{T_0}{T} = \left(\frac{2r_2}{r_1+r_2}\right)^{\frac{3}{2}} \quad //$$

$\boxed{120}$

(1) 地表での万有引力と mg の関係より

$$G\frac{mM}{R^2} = mg$$

ここで密度 ρ と体積 V の関係より

$$M = \rho V$$
$$= \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$$

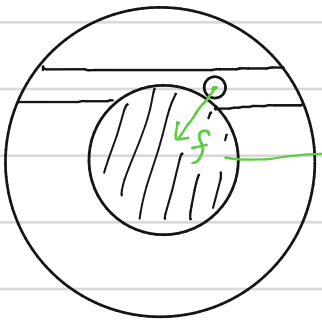
これを代入すると

$$G\frac{m \cdot \frac{4}{3}\pi\rho R^3}{R^2} = mg$$

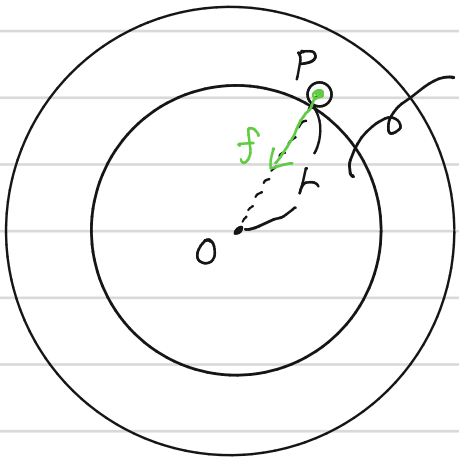
$$\therefore\ mg = \underline{\frac{4}{3}\pi G\rho R m}$$

(2)

(a)



f は 部分の質量 M' との間の万有引力と同じ大きさ。
ということを問題文で説明してくれている。



内側の $M' = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$ なので

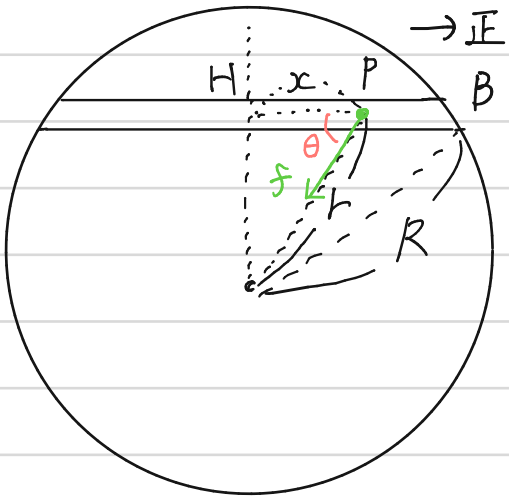
$$f = G\frac{mM'}{r}$$
$$= G\frac{m\left(\frac{4}{3}\pi r^3\rho\right)}{r} = \underline{\frac{4}{3}\pi G\rho r m}$$

(b) (1)と(2)(a)の式を辺々割り算して

$$\frac{f}{mg} = \frac{r}{R} \quad \Rightarrow \quad f = \underline{mg\frac{r}{R}}$$

120 続き

(3)



トンネル方向の力 F は

$$F = -f\cos\theta$$

ここで

$$f = mg\frac{r}{R},\quad \cos\theta = \frac{x}{r}$$

より

$$F = -mg\frac{r}{R}\cdot\frac{x}{r}$$

$$= -\frac{mg}{R}x$$

(4) 前問(3)で求めた力は復元力の条件を満たしている。

$$F = \underbrace{-}_{x\text{と逆向き}}\frac{mg}{R}\underbrace{x}_{x\text{に比例}}$$

よって物体は単振動するといえる。運動方程式をたてると

$$ma = F$$

$$\Rightarrow -m\omega^2 x = -\frac{mg}{R}x$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{R}}$$

単振動の周期は

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$$

B→Aは $\frac{1}{2}$ 周期なので

$$t = \frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{R}{g}}$$