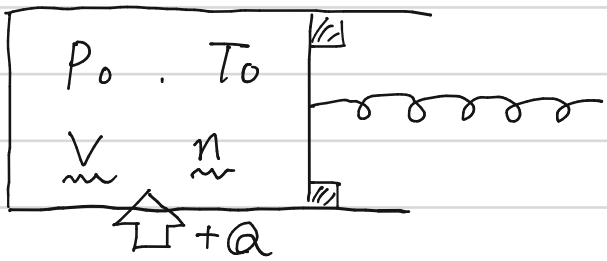
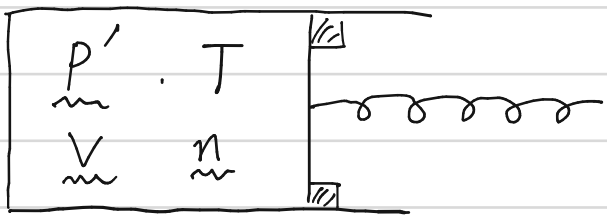
$\boxed{170}$

(1) ピストンを固定しているので、力のつりあいの式はたてられない。




〜は不明数

状態方程式より

(前) $P_0 V = nRT_0$　　(後) $P'V = nRT$

辺々割って

$$\frac{P_0 V}{P'V} = \frac{nRT_0}{nRT}$$

$$\Rightarrow \frac{P_0}{P'} = \frac{T_0}{T} \quad \therefore P' = \frac{T}{T_0}P_0 \quad (イ)$$

※ ボイル・シャルルを使うのはさけて、状態方程式をたてる習慣をつけよう。

熱力学第一法則より

$$Q_{in} = \Delta U + W_{out}$$

$$\Rightarrow +Q = \Delta U + 0$$

$$\therefore \Delta U = Q \quad (ロ)$$

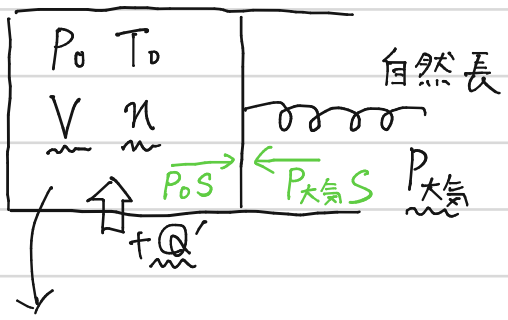
※ この変化より定積モル比熱 $C_V$ を求めると

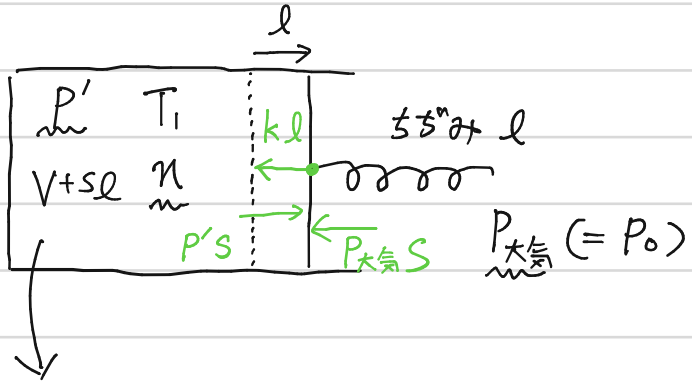
$$Q = nC_V(T - T_0)$$

$$\therefore C_V = \frac{Q}{n(T - T_0)}$$ …(2)以降 $\Delta U$ をだすのに使う。

170 続き

(2) 力のつりあいを忘れずにたてる




つりあいより

$P_0S = P_{大気}S$

$\Rightarrow P_{大気} = P_0$

つりあいより

$P'S = kl + P_{大気}S$

$\Rightarrow P' = \frac{kl}{S} + P_0 \cdots ①$ $(\because P_{大気} = P_0)$

$\boxed{\Delta U\text{について}}$

単原子分子理想気体と書いてないので $\Delta U = \frac{3}{2}nR\Delta T$ は使えない。

$\Rightarrow \Delta U = n\,C_V\Delta T$ を用いる。

$C_V$ は(1)の ※ より $C_V = \frac{Q}{n(T-T_0)}$ である。

$\Delta U = nC_V\Delta T$ の式をたてると

$$\Delta U = nC_V(T_1 - T_0)$$

$$= n \cdot \frac{Q}{n(T-T_0)}(T_1 - T_0)$$

$$= \frac{T_1 - T_0}{T - T_0}Q \quad (ハ)$$

$\boxed{W\text{について}}$ 考え方は2つ、どちらも大切。

考え方① エネルギー収支

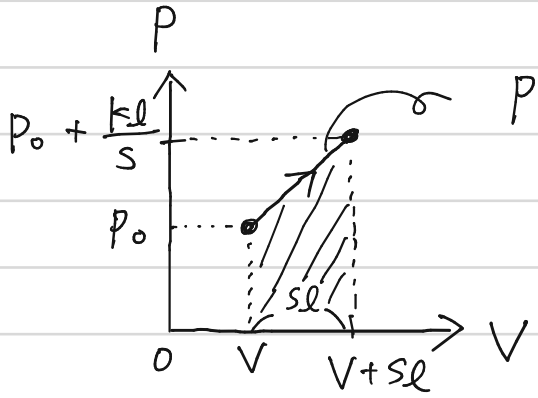
(気体がした仕事) = (気体以外が得るエネルギー)

$$W_{out} = \underbrace{\frac{1}{2}kl^2}_{ばねのエネ} + \underbrace{P_0Sl}_{大気のW_{in}} + \underbrace{0}_{ピストンのエネは増えない(運動エネや位置エネ)}$$

$$\therefore W_{out} = \frac{1}{2}kl^2 + P_0Sl \quad (ニ)$$

$\boxed{170}$ (2) 続き

考え方② P−Vグラフの面積（こちらの方がおすすめ）




$P = P_0 + \frac{kx}{S}$ なので

$x$ の増加に伴い、直線的に変化する。

⇒ $x$ の増加と V の増加は連動しているので

V の増加に伴い、直線的に P は増加といえる。

面積が $W_{out}$ となるので

$$W_{out} = \left(P_0 + P_0 + \frac{kl}{S}\right) \cdot Sl \cdot \frac{1}{2} \quad \text{（台形の面積）}$$

$$= \underline{P_0 Sl + \frac{1}{2}kl^2} \quad (ニ)$$

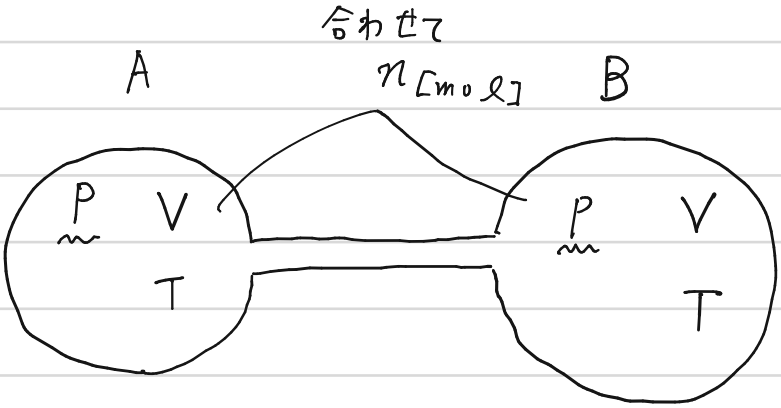
$\boxed{Q\text{について}}$

$Q_{in} = \Delta U + W_{out}$ より

$$Q_{in} = \underline{\frac{T_1 - T_0}{T - T_0} Q + P_0 Sl + \frac{1}{2}kl^2} \quad (ホ)$$

171

(1)




(a) 全体を1つの気体として、状態方程式をたてると

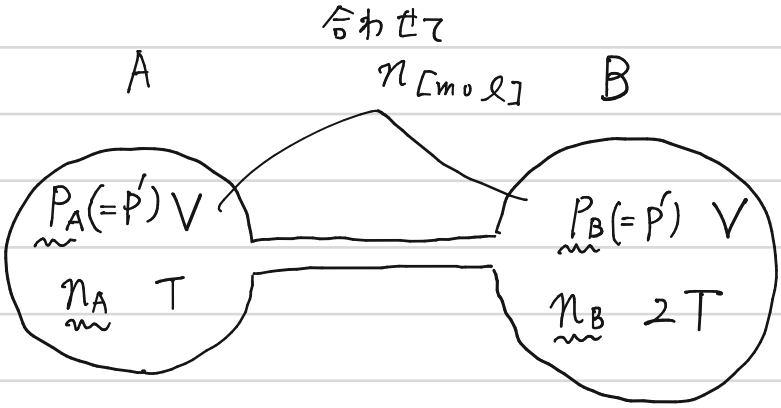
$$P \cdot 2V = nRT$$

$$\therefore P = \frac{nRT}{2V}$$

(b) $U = \frac{3}{2}nRT$ より

$$U = \frac{3}{2}nRT$$

(2)




(c) 自由に気体が行き来できるので

$P_A = P_B \Rightarrow P'$ とする。

状態方程式をたてると

$\boxed{A}$ $P'V = n_A RT$ …①　　$\boxed{B}$ $P'V = n_B R \cdot 2T$ …②

物質量は合わせて $n$ [mol] なので

$n = n_A + n_B$ …③

(Tがちがうので
全体で1つの気体にできない。)

$\boxed{17}$ (2) (c) 続き

②を変形して

$$\frac{1}{2}p'V = n_B RT \cdots ②'$$

① + ②' をして $(n_A + n_B)$ を作る.

$$\frac{3}{2}p'V = (n_A + n_B)RT$$

③を代入して

$$\frac{3}{2}p'V = nRT \qquad \therefore p' = \underline{\frac{2nRT}{3V}}_{\,//} \ (c)$$

(d)

(2)のときの内部エネルギー U を計算する.

$n_A$, $n_B$ をだすのが面倒なので $U = \frac{3}{2}PV$ で計算する.

$$U' = U_A + U_B$$

$$= \frac{3}{2}p'V + \frac{3}{2}p'V$$

$$= 3p'V$$

$$= 3 \cdot \frac{2nRT}{3V}V$$

$$= 2nRT$$

(解答では $n_A$, $n_B$ を求めて $\frac{3}{2}nRT$ で計算している)

(1)から内部エネルギーの増えた分が、加えた熱量 Q であるので

$$Q = U' - U$$

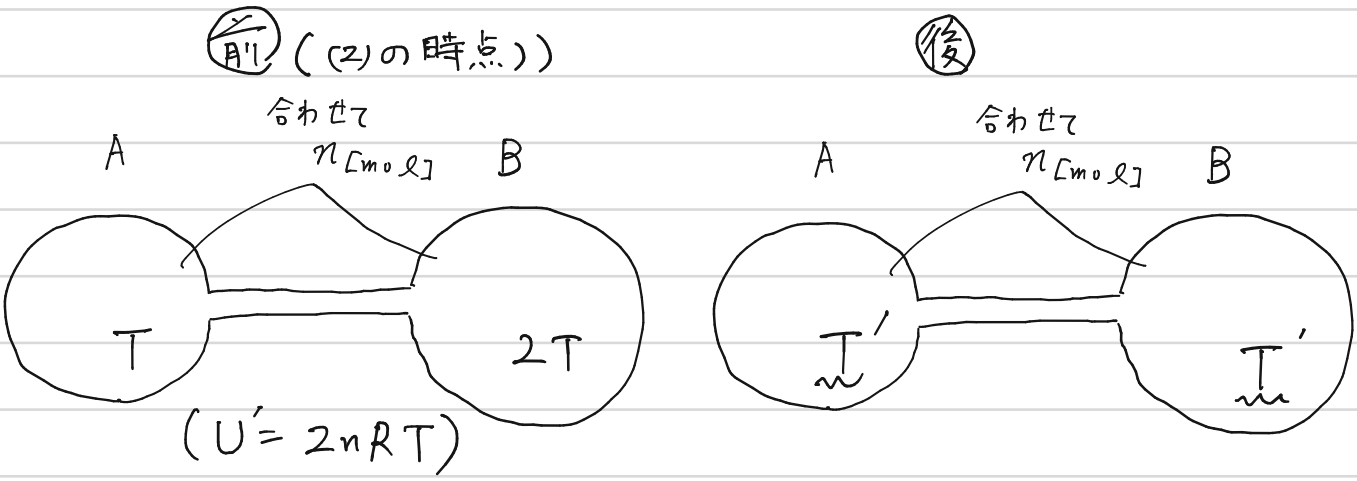
$$= 2nRT - \frac{3}{2}nRT$$

$$= \underline{\frac{1}{2}nRT}_{\,//}$$

171 続き.

(3) 気体が外に仕事をせず、外部との熱のやりとりもないことから、内部エネルギーは保存する.

※(1)→(2)ではBをあたためているので熱のやりとりがある.




後の全体の内部エネルギー $U''$ は

$$U'' = \frac{3}{2}nRT'$$

前後で内部エネルギーが保存するので

$$2nRT = \frac{3}{2}nRT'$$

$$T' = \underline{\frac{4}{3}T}$$

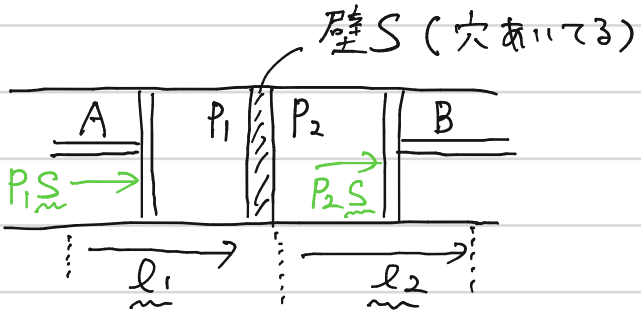
※解答では(1)→(3)での内部エネの変化を追っている.

$$\underbrace{U_1}_{\text{はじめ}} + \underbrace{Q}_{\text{トータルで加えた熱}} = \underbrace{U''}_{\text{最後}}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}nRT + \frac{1}{2}nRT = \frac{3}{2}nRT' \quad \therefore T' = \underline{\frac{4}{3}T}$$

172

(1) 動いている途中を図にして、実験の内容を整理しよう。




A側はピストンから、$P_1S$の力で押される。

⇒ 押される距離を$l_1$とする

B側はピストンを$P_2S$の力で押す

⇒ 押す距離を$l_2$とする

(イ) $\boxed{\text{A側のされる仕事}}$

$W = Fx$ より

$$W_{inA} = P_1 S \cdot l_1$$

ここで $Sl_1 = V_1$ なので

$$W_{inA} = \underline{P_1 V_1} \quad (イ)$$

(ロ) $\boxed{\text{B側のする仕事}}$

$W = Fx$ より

$$W_{outB} = P_2 S \cdot l_2$$

ここで $Sl_2 = V_2$ なので

$$W_{outB} = \underline{P_2 V_2} \quad (ロ)$$

(ハ) $\boxed{\text{全体としてする仕事}}$

$W_{outB}$ が正の仕事 $W_{inA}$ が負の仕事といえるので、

$$W_{outトータル} = W_{outB} - W_{inA}$$

$$= \underline{P_2 V_2 - P_1 V_1} \quad (ハ)$$

$\boxed{172}$ 続き

(2)

(ニ) 熱力学第一法則より

$$Q_{in} = \Delta U + W_{out}$$

$$\Rightarrow \underline{0 = (U_2 - U_1) + (P_2V_2 - P_1V_1)}_{//} \text{(ニ)}$$

(ホ) 変形して

$$U_2 - U_1 = -(P_2V_2 - P_1V_1)$$

$$= \underline{P_1V_1 - P_2V_2}_{//} \text{(ホ)}$$

(ヘ) $PV = nRT$ より

$$P_1V_1 = nRT_1 \quad , \quad P_2V_2 = nRT_2$$

(ホ)に代入して.

$$U_2 - U_1 = nRT_1 - nRT_2$$

$$= \underline{nR(T_1 - T_2)}_{//} \text{(ヘ)}$$

(3) $U = \frac{3}{2}nRT$ より

$$U_2 = \frac{3}{2}nRT_2 \qquad U_1 = \frac{3}{2}nRT_1$$

よって

$$U_2 - U_1 = \frac{3}{2}nRT_2 - \frac{3}{2}nRT_1$$

$$= \underline{\frac{3}{2}nR(T_2 - T_1)}_{//} \text{(ト)}$$

(4) (ヘ)(ト) より

$$nR(T_1 - T_2) = \frac{3}{2}nR(T_2 - T_1)$$

$$\frac{5}{2}T_1 = \frac{5}{2}T_2$$

$$\therefore \underline{T_1 = T_2}_{//} \text{(4)}$$

173

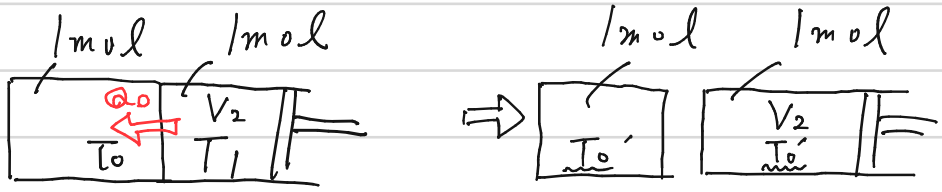
(イ) $\boxed{A \to B}$

熱力学第一法則より

$$Q_{in} = \Delta U + W_{out}$$

$$\Rightarrow Q_1 = \underbrace{0}_{\text{等温なので } \Delta U = 0} + W_1 \qquad \therefore Q_1 = \underline{W_1}_{//}$$

(ロ)(ハ) $\boxed{B \to C}$




全体で内部エネルギーは保存する,

$U = \frac{3}{2}nRT$ を用いて立式すると,

$$\frac{3}{2}\cdot 1\cdot RT_0 + \frac{3}{2}\cdot 1\cdot RT_1 = \frac{3}{2}\cdot 1\cdot RT_0' + \frac{3}{2}\cdot 1 RT_0'$$

$$\Rightarrow T_0 + T_1 = 2T_0'$$

$$\therefore T_0' = \underline{\frac{1}{2}T_0 + \frac{1}{2}T_1}_{//} \text{ (ロ)(ハ)}$$

(ニ) $\boxed{D \to E}$

熱力学第一法則より

$$Q_{in} = \Delta U + W_{out}$$

$$-Q_2 = 0 + (-W_2)$$

※ $Q_{in}$ と $W_{out}$ の正負に注意.

( $Q_2$: 放出した熱量 $\Rightarrow Q_{in} = -Q_2$
$W_2$: された仕事 $\Rightarrow W_{out} = -W_2$ )

$$\therefore \underline{Q_2 = W_2}_{//} \text{ (ニ)}$$

※ 補足

「等温変化で気体がする仕事は温度に比例する」について

- 誘導されるまま $\frac{W_2}{W_1} = \frac{T_2}{T_1}$ を用いてよい。
- なぜそういえるかは, P−Vグラフの面積で仕事をだすと分かる.

⇒ 等温ならば状態方程式で

$$PV = nRT$$ ここが一定

173 補足の続き

これより P-V グラフの式を作ると

$$P(V) = \underbrace{nRT}_{\text{定数}} \frac{1}{V} \quad (V\text{に反比例のグラフ})$$

すると P-V グラフの面積は

$$\int_{V_1}^{V_2} P(V)dV = \int_{V_1}^{V_2} nRT \frac{1}{V} dV = nRT \int_{V_1}^{V_2} \frac{1}{V} dV$$

$$= nRT \left[ \log|V| \right]_{V_1}^{V_2}$$

となる。A→B の変化と D→E の変化で

$\left[ \log|V| \right]_{V_1}^{V_2}$

の部分は同じなので、定数部分 nRT の大小で面積が変わる。

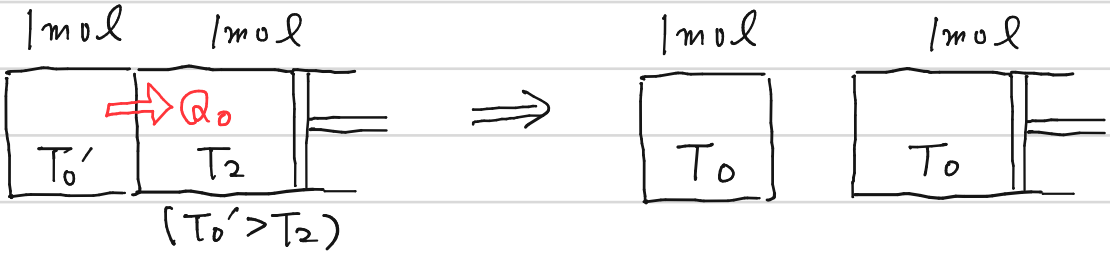
これより W は T に比例するといえる。

よって

$$T_1 : T_2 = W_1 : W_2 \Rightarrow \frac{W_2}{W_1} = \frac{T_2}{T_1}$$ となる。

※問題を解くのにこの関係を使ってるわけではない。

(ホ)(ヘ)




※(ロ)(ハ)で容器が $Q_0$ うけとって

$T_0 \to T_0'$ になっているので

(ホ)(ヘ)で $T_0' \to T_0$ になるときは

同じ量 $Q_0$ を放出してるのだ。

内部エネルギーの保存より

$$\frac{3}{2} \cdot 1 \cdot RT_0' + \frac{3}{2} \cdot 1 \cdot RT_2 = \frac{3}{2} \cdot 1 \cdot RT_0 + \frac{3}{2} \cdot 1 \cdot RT_0$$

$$\Rightarrow \quad T_0' + T_2 = 2T_0$$

173 (ホ)(ヘ) 続き

(ロ).(ハ)の式 $T_0' = \frac{1}{2}T_0 + \frac{1}{2}T_1$ を代入して

$$\frac{1}{2}T_0 + \frac{1}{2}T_1 + T_2 = 2T_0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3}{2}T_0 = \frac{1}{2}T_1 + T_2$$

$$\therefore T_0 = \frac{1}{3}T_1 + \frac{2}{3}T_2$$ // (ホ).(ヘ)

(ト)

エネルギー表でシリンダーの気体の変化をまとめてみる

| | $Q_{in}$ | $=$ | $\Delta U$ (値は省略) | $+$ | $W_{out}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| F→A | $+q_2$ | | (+) | | 0 |
| A→B | $+Q_1$ | | 0 | | $+W_1$ |
| B→C | $-Q_0$ | | (−) | | 0 |
| C→D | $-q_1$ | | (−) | | 0 |
| D→E | $-Q_2$ | | 0 | | $-W_2$ |
| E→F | $+Q_0$ | | (+) | | 0 |

ここで放出した分を　ここで再利用している。

一方で熱効率の式について。

$$e = \frac{W_{out}\text{の和}}{Q_{in}\text{の}+\text{の和}}$$

ここは外から加えられた熱をカウントしているのだが、
E→Fの $+Q_0$ は自分でだした熱なのでカウントしなくてよいのだ。

よって

$$e = \frac{W_{out}\text{の和}}{Q_{in}\text{の}+\text{の和}} = \frac{W_1 - W_2}{+q_2 + Q_1}$$

$+Q_0$ はカウントしない。

となるのである。

$\boxed{173}$ (ト)続き

$$e = \frac{W_1 - W_2}{+Q_2 + Q_1}$$ の〰は使えない文字なので消していく.

(イ).(ニ)より

$$W_1 = Q_1 \quad , \quad W_2 = Q_2$$

$C_V$を使うと $\Delta U = n C_V \Delta T$ なので, $\boxed{F \to A}$ の熱力学第一法則より

$$Q_{in} = \Delta U + W_{out}$$

$$\Rightarrow \quad Q_2 = 1 \cdot C_V (T_1 - T_0) + 0$$

eの式にこれらを代入して

$$e = \frac{Q_1 - Q_2}{C_V (T_1 - T_0) + Q_1}$$

ここで(ホ)(ヘ)の式より $T_0 = \frac{1}{3} T_1 + \frac{2}{3} T_2$ なので

$$e = \frac{Q_1 - Q_2}{C_V \left\{ T_1 - \left( \frac{1}{3} T_1 + \frac{2}{3} T_2 \right) \right\} + Q_1}$$

$$= \frac{Q_1 - Q_2}{\frac{2}{3} C_V (T_1 - T_2) + Q_1} \quad // \text{(ト)}$$