174 自由膨張… 体積が大きくなっているが、仕事をしているわけではない。(何も押してないので)

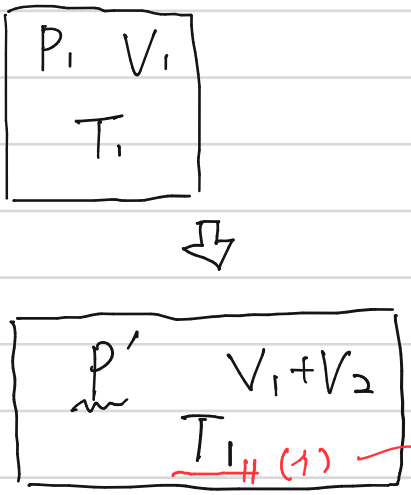
$\Rightarrow Q_{in} = \Delta U + W_{out}$

↑ 0

断熱ならば Q_{in} も0なので、$\Delta U = 0$.

つまり、膨張しても温度が変化しない。

(1)



状態方程式をたてる。

前 $P_1V_1 = nRT_1$

後 $P'(V_1+V_2) = nRT_1$

(イ)

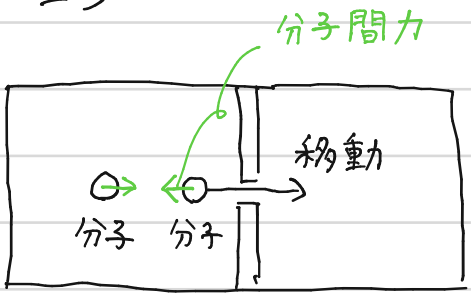
上の解説の通り $\Delta U=0$ なので $\Delta T=0$.
温度は変化しないのだ

辺々割って

$$\frac{P'(V_1+V_2)}{P_1V_1} = \frac{nRT_1}{nRT_1} \qquad \therefore P' = \frac{V_1}{V_1+V_2}P_1 \quad (ロ)$$

(2) 分子間力に逆らって移動する必要があるので、エネルギーを消費する。⇒ 温度は下がる (ハ)

(イメージ)



175

(イ) ボルツマン定数 k の定義より

$$k = \frac{R}{N_A}$$

物質量 n を k で示すと

$$n = \frac{N}{N_A} = \frac{Nk}{R}$$

よって内部エネルギー U は

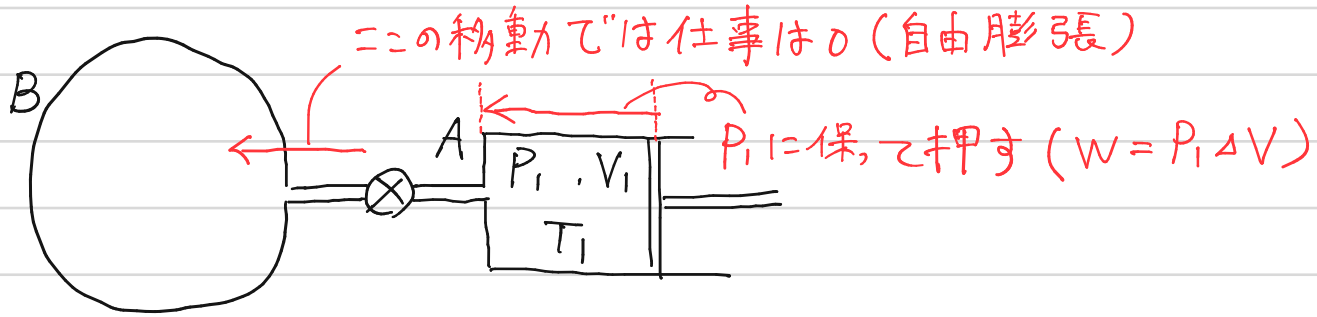
$$U = \frac{3}{2}nRT_1$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\frac{Nk}{R}\cdot RT_1$$

$$= \underline{\frac{3}{2}NkT_1} \quad (イ)$$

※ 分子1個の運動エネルギーが $\frac{1}{2}m\overline{v^2} = \frac{3}{2}kT$ とかけ $U = N\cdot\frac{1}{2}m\overline{v^2}$ なので $U = \frac{3}{2}NkT_1$ としてもよい

(ロ)



気体はピストンから仕事をされる.

$$W_{in} = P_1\Delta V$$

$$= \underline{P_1V_1} \quad (ロ)$$

(ハ) 仕事された分, 内部エネルギーが増えるので

$$U' = \frac{3}{2}NkT_1 + P_1V_1$$

状態方程式より

$$P_1V_1 = nRT_1$$

$$= \frac{Nk}{R}RT_1$$

$$= NkT_1$$

これを U' の式に代入する.

175 (ハ) 続き

$$U' = \frac{3}{2}NkT_1 + P_1V_1$$

$P_1V_1 = NkT_1$ を代入して.

$$= \frac{3}{2}NkT_1 + NkT_1$$

$$= \underline{\frac{5}{2}NkT_1}$$

※熱力学第一法則で考えると

$$Q_{in} = \Delta U + W_{out}$$

$$0 = (U' - U) + (-W_{in})$$

$$0 = U' - \frac{3}{2}NkT - P_1V_1$$

$$\Rightarrow U' = \frac{3}{2}NkT + P_1V_1 = \frac{5}{2}NkT_1$$

となるが、こう書くとまわりくどい感じがする.

(ニ) T_2を用いて U' を示すと.

$$U' = \frac{3}{2}NkT_2$$

なので

$$\frac{3}{2}NkT_2 = \frac{5}{2}NkT_1$$

$$\therefore T_2 = \underline{\frac{5}{3}T_1}$$

(ホ) 平均の運動エネルギー $\overline{K'}$ は

$$\frac{(\text{全エネルギー})}{(\text{個数})}$$

で計算ができるので

$$\Delta\overline{K'} = \frac{W_{in}}{N} \quad (\because (\text{全エネルギーの変化}) = W_{in})$$

$$= \frac{P_1V_1}{N}$$

$$= \frac{NkT_1}{N} \qquad \therefore \Delta\overline{K} = \underline{kT_1} \text{ (ホ)}$$

176 ポアソンの式 … 断熱変化のときのみ，成立する式．

主に変化後のPやTをだすのに使う．

$PV^{\gamma} = (一定)$ 基本の形 （γ … 比熱比のこと．定義：$\gamma = \frac{C_p}{C_v}$）

⇓ 状態方程式より $PV = nRT \Rightarrow P = \frac{T}{V}nR$ より

$$\frac{T}{V}nR \cdot V^{\gamma} = (一定)$$

⇓

$$TV^{\gamma-1} = \frac{(一定)}{nR}$$

⇓ nが定数なら

$TV^{\gamma-1} = (一定)$ TとVの形

今回は，ポアソンの式を導く問題である．（必須事項ではないので，無理せず）

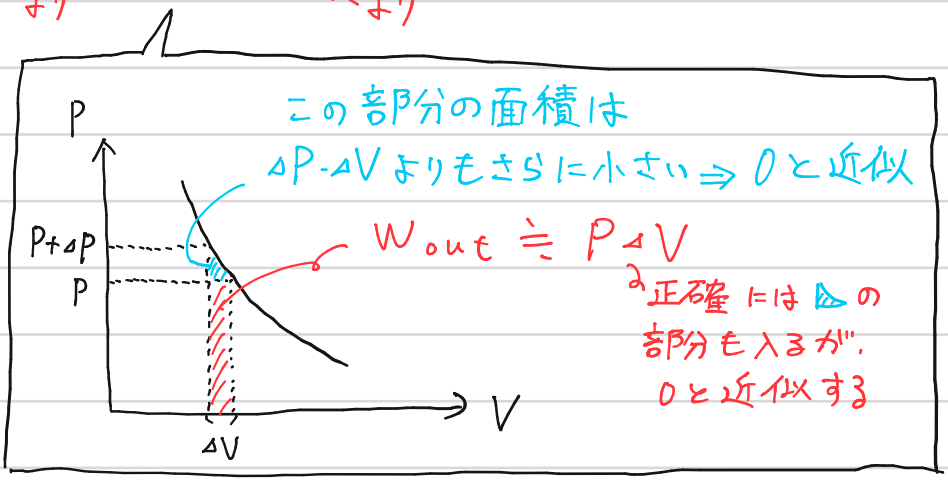
（導入）

断熱的に ΔP，ΔV，ΔT の変化があったとき，

熱力学第一法則より

$$0 = nC_v\Delta T + P\Delta V$$

$\Delta U = nC_v\Delta T$ より　グラフの面積 より



$$P\Delta V = -nC_v\Delta T$$

一方，状態方程式より

$$PV = nRT$$

176 (導入) 続き

辺々割って

$$\frac{P\Delta V}{PV} = \frac{-nC_V\Delta T}{nRT}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta V}{V} = -\frac{C_V}{R}\frac{\Delta T}{T}$$

$$\therefore \frac{\Delta T}{T} = -\frac{R}{C_V}\frac{\Delta V}{V}$$

これを積分すると

$$\int \frac{dT}{T} = \int -\frac{R}{C_V}\frac{dV}{V}$$

$$\Rightarrow \log T = -\frac{R}{C_V}\log V + C \quad (C:\text{積分定数}) \cdots ①$$

(イ) ところで、マイヤーの関係式 $C_p = C_V + R$ を C_V で割ると

$$\frac{C_p}{C_V} = \frac{C_V}{C_V} + \frac{R}{C_V}$$

$$\Rightarrow \frac{C_p}{C_V} = \underline{1 + \frac{R}{C_V}}_{\#(イ)} \quad (=\gamma)$$

(ロ) これより

$$\frac{R}{C_V} = \underline{\gamma - 1}_{\#(ロ)}$$

(ハ) これを①に代入して

$$\log T = -(\gamma-1)\log V + C$$

$$\Rightarrow \log T + (\gamma-1)\log V = C$$

Cは定数なので

$$\Rightarrow \log T + \underline{(\gamma-1)\log V}_{\#(ハ)} = (一定)$$

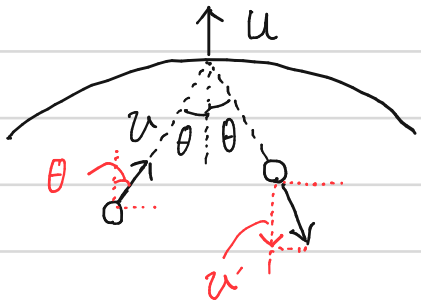
(ニ) $$\Rightarrow \log T + \log V^{\gamma-1} = (一定)$$

$$\Rightarrow \log \underline{(T\cdot V^{\gamma-1})}_{\#(ニ)} = (一定)$$

(ホ) $\therefore \underline{TV^{\gamma-1}}_{\#(ホ)} = (一定)$

$\boxed{177}$ 気体分子運動論の発展問題にあたる.（たまにでる）

(1)



（垂直成分をv'とおいているので注意）

$$e = \frac{|\text{遠ざかる}|}{|\text{近づく}|} \text{ より}$$

$$1 = \frac{v' + u}{v\cos\theta - u}$$ （弾性衝突なので $e=1$）

$$\Rightarrow v' + u = v\cos\theta - u$$

$$\therefore v' = \underline{v\cos\theta - 2u}_{\,//} \quad (1)$$

(2) 変化量なので、不変である平行成分は考えなくてよい。
垂直成分の速さから、運動エネルギーの変化量を求めると

$$\Delta K = \frac{1}{2}mv'^2 - \frac{1}{2}m(v\cos\theta)^2$$

$$= \frac{1}{2}m(v\cos\theta - 2u)^2 - \frac{1}{2}m(v\cos\theta)^2$$

$$= \frac{1}{2}m\left(\cancel{v^2\cos^2\theta} - 4vu\cos\theta + \underbrace{4u^2}_{\fallingdotseq 0} - \cancel{v^2\cos^2\theta}\right)$$

$$\fallingdotseq \frac{1}{2}m(-4vu\cos\theta)$$

$$= \underline{-2mvu\cos\theta}_{\,//}$$

(3) 半径が $r \to \Delta r$ になるまでの時間 t は

$$t = \frac{\Delta r}{u}$$

一方で、この時間での分子の移動距離は

$$vt \Rightarrow \frac{v\Delta r}{u}$$ （衝突するごとに v はおそくなるが、その差は小さいとみなし、v は一定とする）

問題文の図より、分子は $2r\cos\theta$ すすむごとに1回衝突するので

$$\frac{\frac{v\Delta r}{u}}{2r\cos\theta} \Longrightarrow \underline{\frac{v\Delta r}{2ur\cos\theta}}_{\,//}$$ 回衝突するといえる。

$\boxed{177}$ 続き

(4) 1回につき $-2mvu\cos\theta$ の変化があるので、回数をかけて、

$$\Delta K = -2mvu\cos\theta \cdot \frac{v\Delta r}{2ur\cos\theta}$$

$$= -\frac{mv^2\Delta r}{r}$$

(5) $\Delta V = (V+\Delta V) - V$

$$= \frac{4}{3}\pi(r+\Delta r)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$= \frac{4}{3}\pi r^3\left(1+\frac{\Delta r}{r}\right)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3$$

近似

$$\fallingdotseq \frac{4}{3}\pi r^3\left(1+3\cdot\frac{\Delta r}{r}\right) - \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$= \frac{4}{3}\pi r^3 + 4\pi r^2\Delta r - \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\therefore \Delta V = 4\pi r^2\Delta r$$

(6) 内部エネルギーUは運動エネルギーの総和なので

$$U = N_A \cdot \frac{1}{2}mv^2$$

問題文の誘導より $\Delta U = \Delta K \times$(分子数) なので

$$\Delta U = \Delta K \times N_A$$

$$= -\frac{mv^2\Delta r}{r} \cdot N_A$$

2式より、

$$\frac{\Delta U}{U} = \frac{-\frac{mv^2\Delta r}{r}\cdot N_A}{N_A \cdot \frac{1}{2}mv^2}$$

$$= -\frac{2\Delta r}{r}$$

$\boxed{177}$ 続き

(7) 前問(5)より

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{4\pi r^2 \Delta r}{V}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta V}{V} = \frac{4\pi r^2 \Delta r}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{3\Delta r}{r}$$

前問(6)より

$$\frac{\Delta U}{U} = -\frac{2\Delta r}{r}$$

2式で $\frac{\Delta r}{r}$ を独立させて連立すると、

$$\frac{\Delta V}{3V} = -\frac{\Delta U}{2U}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta U}{U} = -\frac{2}{3}\frac{\Delta V}{V} \quad //$$

(8) の前の文章について、

$$\Delta U = \frac{3}{2}P'V' - \frac{3}{2}PV$$

$$= \frac{3}{2}(P+\Delta P)(V+\Delta V) - \frac{3}{2}PV$$

$$= \frac{3}{2}(PV + P\Delta V + \Delta P V + \underbrace{\Delta P \Delta V}_{\fallingdotseq 0}) - \frac{3}{2}PV$$

$$= \frac{3}{2}(P\Delta V + \Delta P V)$$ としている。

(8) これを前問(7)に代入すると

$$\frac{\frac{3}{2}(P\Delta V + \Delta P V)}{\frac{3}{2}PV} = -\frac{2}{3}\frac{\Delta V}{V}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta V}{V} + \frac{\Delta P}{P} = -\frac{2}{3}\frac{\Delta V}{V}$$

$$\therefore \frac{\Delta P}{P} = -\frac{5}{3}\frac{\Delta V}{V} \quad //$$

(問題文にある通り、この式を積分して、ポアソンの式 $PV^{\frac{5}{3}} = (一定)$ が求まる。)

178 熱サイクルでは エネルギー表を書く.

$\boxed{0 \to A}$

① $U = \frac{3}{2}PV$ より

$\Delta U = U_A - U_0$

$= \frac{3}{2}P_A V_0 - \frac{3}{2}P_0 V_0 = \frac{3}{2}(P_A - P_0)V_0$

② グラフの面積より

$W_{out} = 0$

③ $Q_{in} = \Delta U + W_{out}$ より

$Q_{in} = \underline{\frac{3}{2}(P_A - P_0)V_0}$ (イ)

$\boxed{A \to B}$

① 断熱変化なので

$Q_{in} = \underline{0}$ (0)

② $U = \frac{3}{2}PV$ なので

$\Delta U = U_B - U_A$

断熱膨張なので温度さがる.
よって $U_A > U_B$ である.

$= -(U_A - U_B)$

符合と大きさを見やすくする

$= -\left(\frac{3}{2}P_A V_0 - \frac{3}{2}P_0 V_B\right)$

$= -\frac{3}{2}(P_A V_0 - P_0 V_B)$

③ $Q_{in} = \Delta U + W_{out}$ より

$0 = -\frac{3}{2}(P_A V_0 - P_0 V_B) + W_{out}$

$\therefore W_{out} = \frac{3}{2}(P_A V_0 - P_0 V_B)$

断熱変化時の仕事は、面積からだせないので、このように
$Q_{in} = \Delta U + W_{out}$ から逆算することが多い.

178 続き

$\boxed{B \to O}$

① $U = \frac{3}{2}PV$ より

$\Delta U = U_O - U_B$ ← P×Vの大きさを比べると、$T_B > T_O$ といえるので $U_B > U_O$ である。

$= -(U_B - U_O)$ ← 符合と大きさを見やすくする

$= -\left(\frac{3}{2}P_O V_B - \frac{3}{2}P_O V_O\right)$

$= -\frac{3}{2}P_O(V_B - V_O)$

② グラフの面積より

$W_{out} = -P_O(V_B - V_O)$ ※ Vが小さくなっているので W_{out} は負の仕事

③ $Q_{in} = \Delta U + W_{out}$ より

$Q_{in} = -\frac{3}{2}P_O(V_B - V_O) + \{-P_O(V_B - V_O)\}$

$= -\frac{5}{2}P_O(V_B - V_O)$ …(ハ)

エネルギー表にまとめると

	Q_{in}	=	ΔU	+	W_{out}
$O \to A$	$+\frac{3}{2}(P_A - P_O)V_O$		$\frac{3}{2}(P_A - P_O)V_O$		0
$A \to B$	0		$-\frac{3}{2}(P_A V_O - P_O V_B)$		$+\frac{3}{2}(P_A V_O - P_O V_B)$
$B \to O$	$-\frac{5}{2}P_O(V_B - V_O)$		$-\frac{3}{2}P_O(V_B - V_O)$		$-P_O(V_B - V_O)$
サイクル合計	$\frac{3}{2}P_A V_O - \frac{5}{2}P_O V_B + P_O V_O$		0		$\frac{3}{2}P_A V_O - \frac{5}{2}P_O V_B + P_O V_O$

元の温度に戻るので0になるはず

$\Delta U = 0$ なので同じになるはず。

サイクル合計で計算ミスをチェックできる。

178 続き

$$e = \frac{W_{out\,トータル}}{Q_{in}の+の和}$$ なので

$$e = \frac{\frac{3}{2}P_A V_0 - \frac{5}{2}P_0 V_B + P_0 V_0}{\frac{3}{2}(P_A - P_0)V_0}$$

$$= \frac{\frac{3}{2}(P_A - P_0)V_0 - \frac{5}{2}P_0 V_B + \frac{5}{2}P_0 V_0}{\frac{3}{2}(P_A - P_0)V_0}$$

$$= 1 - \frac{\frac{5}{2}P_0 V_B - \frac{5}{2}P_0 V_0}{\frac{3}{2}(P_A - P_0)V_0}$$

$$= 1 - \frac{5P_0(V_B - V_0)}{3(P_A - P_0)V_0} \quad (=)$$

※ 別解（体系物理の解説の計算）

エネルギー表のサイクル合計の部分から

$$Q_{in\,トータル} = 0 + W_{out\,トータル}$$

といえて、

$$Q_{0\to A} + Q_{B\to 0} = W_{out\,トータル}$$

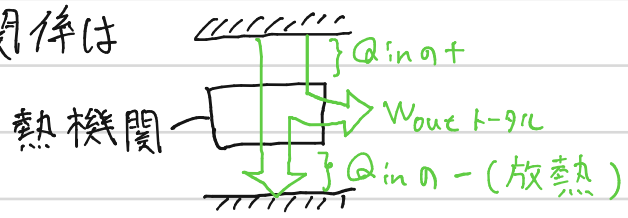
となる。よって

$$e = \frac{W_{out\,トータル}}{Q_{in}の+の和} = \frac{Q_{0\to A} + Q_{B\to 0}}{Q_{0\to A}}$$

$$= 1 + \frac{Q_{B\to 0}}{Q_{0\to A}}$$ となる。

エネルギー表の計算をきちんとこなすと、$Q_{in\,トータル}$と$W_{out\,トータル}$の関係を理解できて、この発想にたどりつける。
はじめからこの方法を覚えようとしないこと。

※ この関係は



と示されることもある。ここからも

$$W_{out\,トータル} = Q_{in}の+ - |Q_{in}の-|$$

と立式できる。