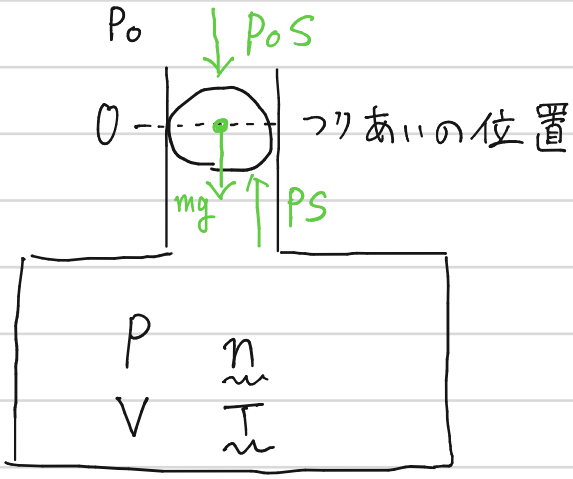
179

(1) 力のつりあいより，Pを求める．



つりあいの式

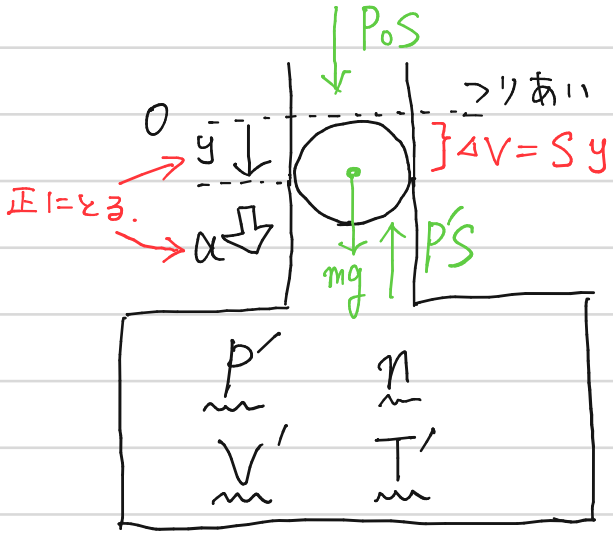
$$PS = P_0S + mg$$

$$\therefore P = P_0 + \frac{mg}{S}$$

(以後，Pは使っていい文字となる)

(2)

(a) 適当な変位yの作図を行う．



断熱変化なので"ポアソンの式"が成立する．

$$PV^\gamma = P'V'^\gamma \left(\leftarrow \text{前}PV^\gamma = \text{後}PV^\gamma\right)$$

ここで

$$V' = V - \Delta V$$

$$\Rightarrow V' = V - Sy$$

なので

$$PV^\gamma = P'(V-Sy)^\gamma$$

$$\Rightarrow P' = \frac{V^\gamma}{(V-Sy)^\gamma}P = \left(\frac{V}{V-Sy}\right)^\gamma P$$

$$= \left\{\frac{V}{V\left(1-\frac{Sy}{V}\right)}\right\}^\gamma P$$

$$= \left(1-\frac{Sy}{V}\right)^{-\gamma} P$$

$$\fallingdotseq \left(1+\gamma\frac{Sy}{V}\right)P$$

179 続き

(b) 運動方程式をたてて

$$ma = P_0S + mg - P'S$$

$$ma = PS - P'S \quad (\because \text{つりあいより } P_0S + mg = PS)$$

$$ma = PS - \left(1 + \gamma\frac{Sy}{V}\right)PS \quad (\because \text{(a)より } P' = \left(1 + \gamma\frac{Sy}{V}\right)P)$$

$$ma = -\frac{\gamma PS^2}{V}y \quad \leftarrow \text{単振動の形「} -\square x \text{」の形になった。}$$

$$\Rightarrow a = -\frac{\gamma PS^2}{mV}y$$

(c) $a = -\omega^2 x$ とくらべて

$$\omega^2 = \frac{\gamma PS^2}{mV}$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{\gamma PS^2}{mV}}$$

$T = \frac{2\pi}{\omega}$ より

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{mV}{\gamma PS^2}}$$

(d) 説明はされていないが、T を実験で計測して γ を求めようとしているのだ。

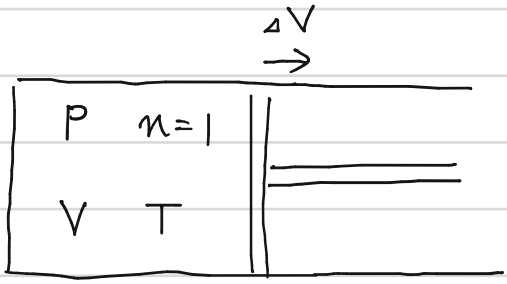
(C)の式を γ について解いて、

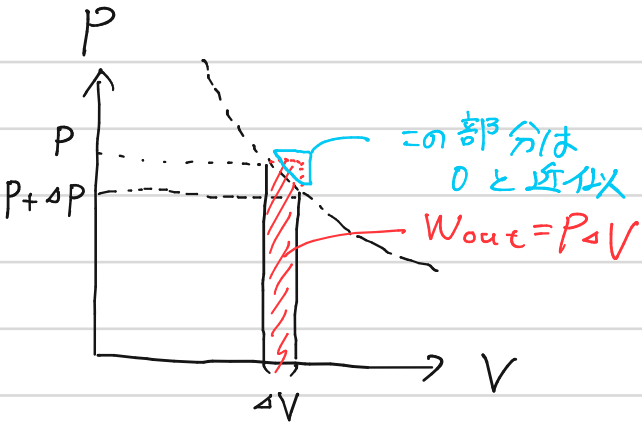
$$T^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{mV}{\gamma PS^2}$$

$$\therefore \gamma = \frac{4\pi^2 mV}{PS^2T^2}$$

180

(1)





グラフより $W_{out} \fallingdotseq P\Delta V$

状態方程式より

$$PV = 1 \cdot RT$$

$$\Rightarrow P = \frac{RT}{V}$$

これを代入して

$$W_{out} \fallingdotseq RT\frac{\Delta V}{V}$$

(2) 断熱変化なので $Q_{in}=0$ であり，$Q_{in} = \Delta U + W_{out}$ より，

$$0 = \Delta U + RT\frac{\Delta V}{V}$$

ここで $\Delta U = \frac{3}{2}nR\Delta T$ なので

$$0 = \frac{3}{2}R\Delta T + RT\frac{\Delta V}{V}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}R\Delta T = -RT\frac{\Delta V}{V}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta T}{T} = -\frac{2\Delta V}{3V}$$

180 続き

(3) 状態方程式より

$$(P+\Delta P)(V+\Delta V)=1\cdot R(T+\Delta T)$$

$$\Rightarrow PV+P\Delta V+\Delta PV+\underbrace{\Delta P\Delta V}_{=0}=R(T+\Delta T)$$

↘ (前)の状態方程式より $PV=RT$

$$\Rightarrow \cancel{PV}+P\Delta V+\Delta PV=\cancel{PV}+R\Delta T$$

$$\Rightarrow P\Delta V+\Delta PV=R\Delta T$$

$\frac{\Delta P}{P}$ を作るように変形する．全体を PV で割って

$$\frac{\Delta V}{V}+\frac{\Delta P}{P}=\frac{R}{PV}\Delta T$$

状態方程式より ↘ $\frac{R}{PV}=\frac{1}{T}$

$$\Rightarrow \frac{\Delta P}{P}=\frac{\Delta T}{T}-\frac{\Delta V}{V}$$

↘ (2)の答えより

$$\frac{\Delta P}{P}=-\frac{2\Delta V}{3V}-\frac{\Delta V}{V}$$

$$=-\frac{5\Delta V}{3V}$$ //

181

(1) ポアソンの式の立て方.

(一定)なので (前 PV^{γ} = 後 PV^{γ} となる)

$$T_1 V_A^{\gamma-1} = T_2 V_B^{\gamma-1} \quad \cdots (イ)$$

$$T_1 V_D^{\gamma-1} = T_2 V_C^{\gamma-1} \quad \cdots (ロ)$$

辺々割って

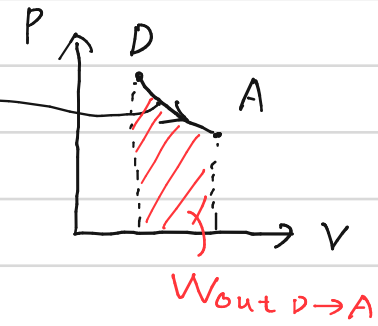
$$\frac{V_A^{\gamma-1}}{V_D^{\gamma-1}} = \frac{V_B^{\gamma-1}}{V_C^{\gamma-1}} \Rightarrow \frac{V_A}{V_D} = \frac{V_B}{V_C}$$

(2) (導入部分の文章について)

等温膨張時の仕事をグラフの面積で求める.

状態方程式 $PV = nRT$ より

$P = nRT_1 \cdot \frac{1}{V}$ ← グラフの式.



$V_D \to V_A$ の面積を求めると

$$\int_{V_D}^{V_A} nRT_1 \cdot \frac{1}{V} dV = nRT_1 \int_{V_D}^{V_A} \frac{1}{V} dV$$

$$= nRT_1 \left[\log|V| \right]_{V_D}^{V_A}$$

$$= nRT_1 (\log V_A - \log V_D)$$

$$= nRT_1 \log \frac{V_A}{V_D} \quad \cdots \text{これが } W_{out\ A \to B}$$

熱力学第一法則の式をたてると

$$Q_{in\ D \to A} = 0 + W_{out\ D \to A}$$

$$Q_{D \to A} = nRT \log \frac{V_A}{V_D}$$

となる.

[81] (2) 続き

(ハ) (B→C)

同様に $W_{out\ B\to C}$ を求めると、

$$W_{out\,B\to C} = -nRT_2 \log \frac{V_B}{V_C}$$

(面積が $nRT_2 \log \frac{V_B}{V_C}$ で、Vの小さくなる変化なので負の仕事。)

熱力学第一法則の式をたてると、

$$Q_{in\,B\to C} = 0 + W_{out\,BC}$$

$$\Rightarrow \quad Q_{in\,B\to C} = -nRT_2 \log \frac{V_B}{V_C}$$

今回、放出する熱量 $Q_{out\,B\to C}$ を Q_{BC} としているので、$Q_{in\,B\to C}$ の符合を逆にして、

$$Q_{B\to C} = nRT_2 \log \frac{V_B}{V_C} \quad //\ (ハ)$$

(ニ) 断熱変化の部分は $Q_{in}=0$ なので、熱効率 e を Q ベースで考えれば、$Q_{D\to A}$ と $Q_{B\to C}$ だけで立式できる。

$$e = \frac{W_{out\,トータル}}{Q_{in\,の+}}$$

$$= \frac{Q_{in\,D\to A} + Q_{in\,B\to C}}{Q_{in\,D\to A}}$$

$$= 1 + \frac{Q_{in\,B\to C}}{Q_{in\,D\to A}}$$

$$= 1 + \frac{\left(-nRT_2 \log \frac{V_B}{V_C}\right)}{nRT_1 \log \frac{V_A}{V_D}}$$

$$= 1 - \frac{T_2 \log \frac{V_B}{V_C}}{T_1 \log \frac{V_A}{V_D}} \quad //\ (ニ)$$

(トータルで $\Delta U = 0$ なので
$Q_{in\,トータル} = 0 + W_{out\,トータル}$ であり
$Q_{in\,トータル} = Q_{in\,D\to A} + Q_{in\,B\to C}$)

(ホ) (ハ)の結果 $\frac{V_B}{V_C} = \frac{V_A}{V_D}$ より (ニ) を整理して、

$$e = 1 - \frac{T_2}{T_1} \quad //\ (ホ)$$

※この問題の設定のように in と out を混ぜて考えると、符合がややこしくなる。
Q は in, W は out を基本としよう。