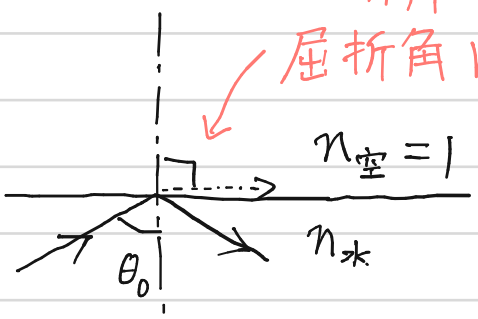
242

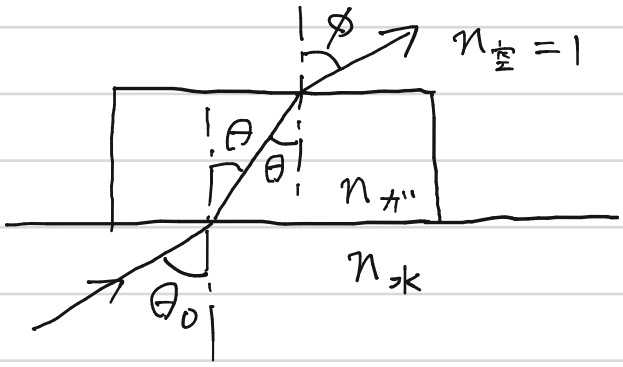
臨界角での屈折なので
屈折角 $r = 90°$ といえる



屈折の法則より

$$n_{水} \sin\theta_0 = n_{空} \sin 90° \quad \cdots ①$$

$$(\Rightarrow n_{水} \sin\theta_0 = 1)$$



屈折の法則より

$$n_{水} \sin\theta_0 = n_{ガ} \sin\theta \quad \cdots ②$$

$$n_{ガ} \sin\theta = n_{空} \sin\phi \quad \cdots ③$$

$$(\Rightarrow n_{ガ} \sin\theta = \sin\phi)$$

②, ③より

$$n_{水} \sin\theta_0 = n_{空} \sin\phi$$

これと①を比べると.

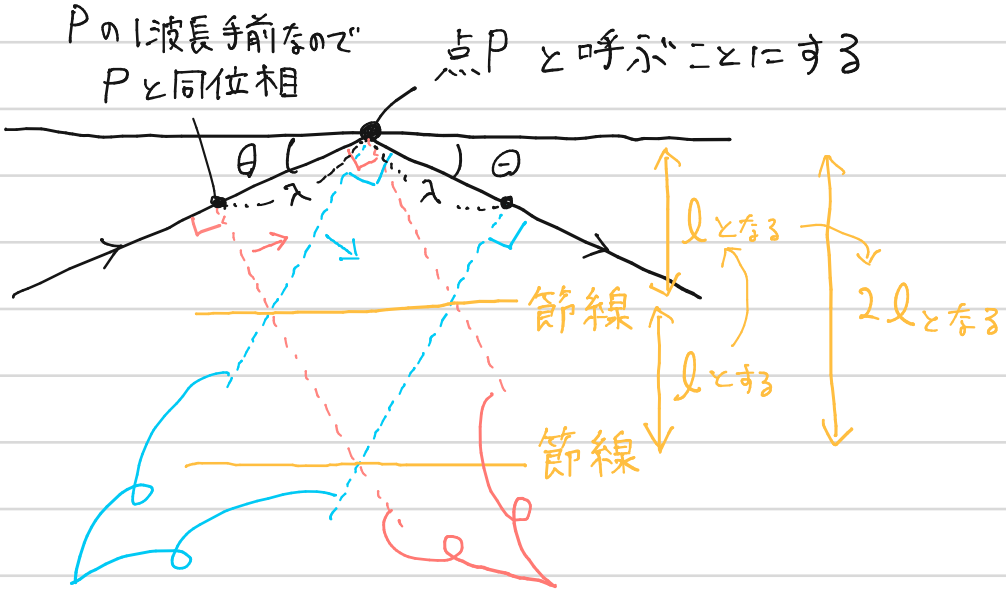
$$\phi = 90°$$

※ 間にガラスなどが入っても.
臨界角が変化しないということを意味する.

243 作図のポイント

- 波の進む向きと波面は90°
  (波面は同位相を結んだ線)
- 固定端は必ず節
- 角度の追跡のコツ.
  平行直線, 90°, 180°, を意識

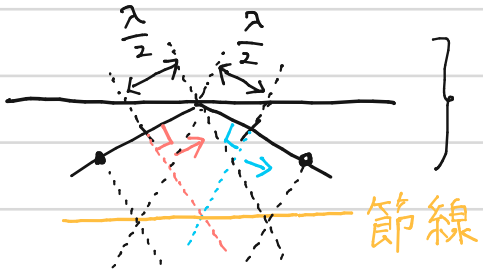
それぞれの線と, l, $2l$を解釈する



反射波におけるPと同位相の波面
(進行と90°)
(矢印は波面の進む向き)

入射波におけるPと同位相の波面
(進行と90°)
(矢印は波面の進む向き)

この2本が重なる場所は, 元々同位相だった波の一方がPで位相が反転した状態で重なっている
⇒媒質の変位0の点となる

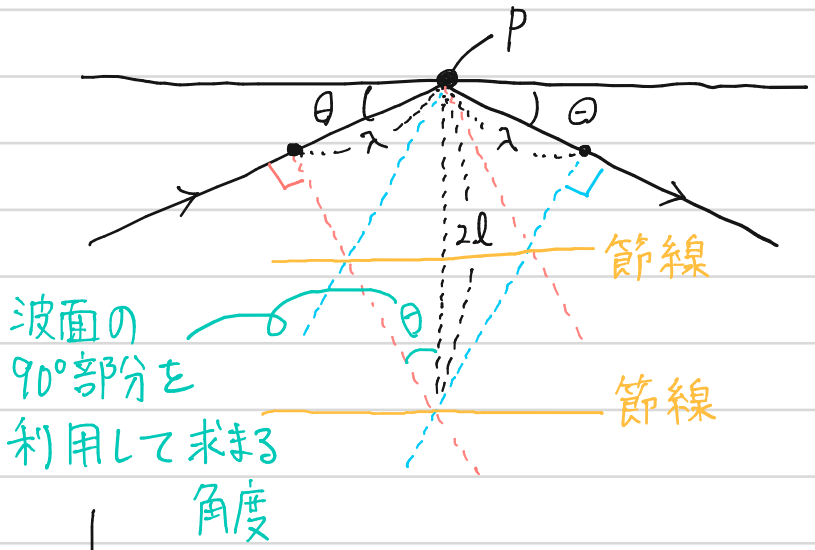


そして
入離れた波面なら, どこでも同様に逆位相の波が重なるので媒質の変位0の点となる
⇒節線が書ける

243 続き

(イ)

問いで聞かれている長さの検証をする



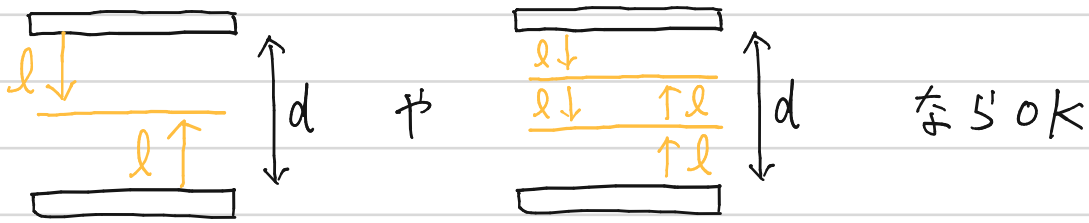
↓

$$\sin\theta = \frac{\lambda}{2l} \qquad \therefore\ l = \frac{\lambda}{2\sin\theta}$$ //(イ)

(ロ)

定常波のできる条件

→ 上面の反射で作る節線と、下面の反射で作る節線が一致すること.



⇒ $d = ml$ といえる (左図は $m=2$, 右図は $m=3$)

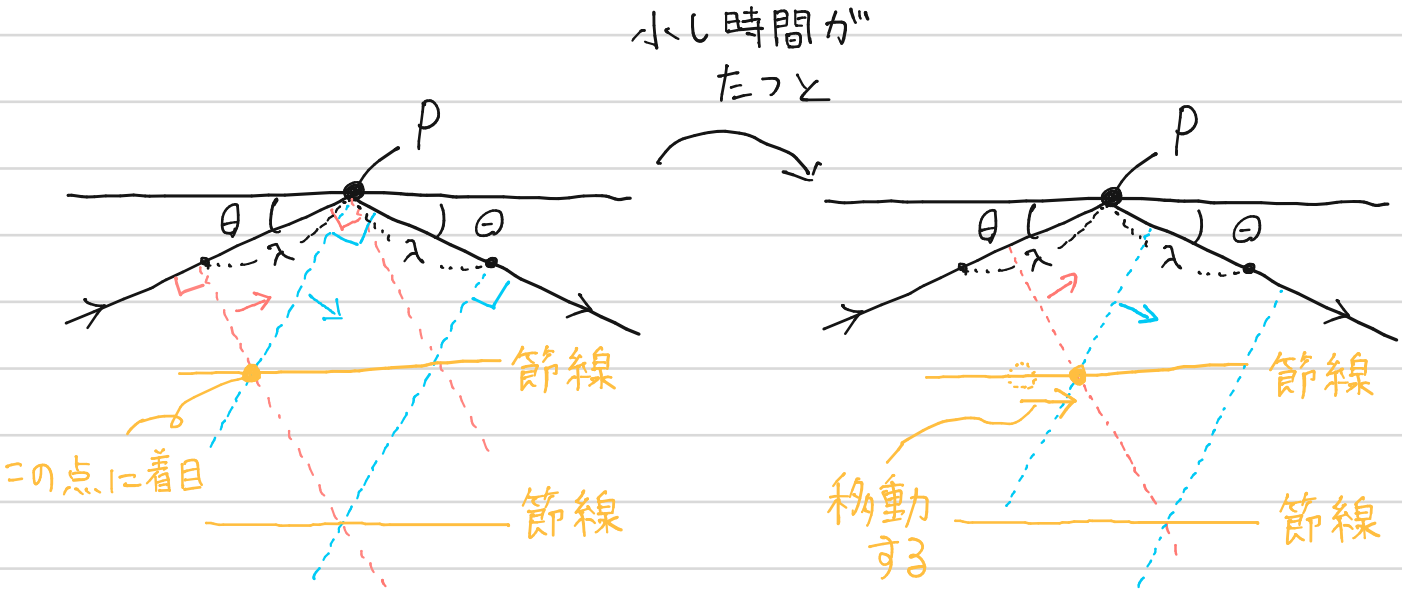
(イ)の式を代入して

$$d = m\frac{\lambda}{2\sin\theta}$$ //(ロ)

243 続き

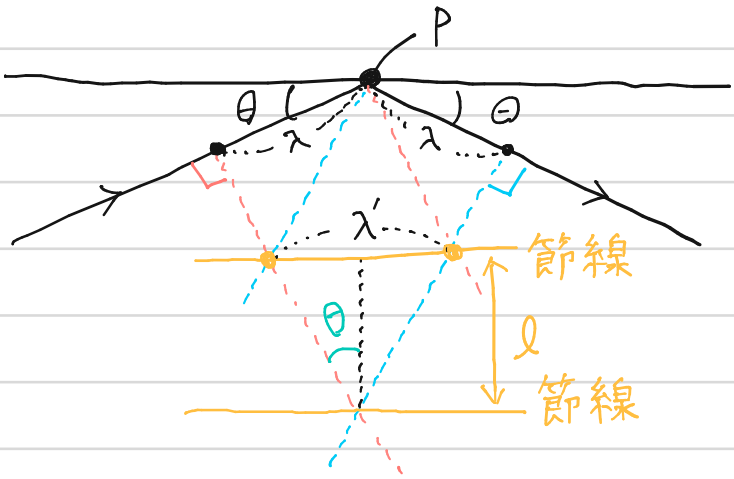
(ハ)

$\boxed{\lambda' \text{の解釈をする}}$



ここで、入射波、反射波の周期T [s] だけ時間が経過したときの、● 点の移動量を λ' としている。

⇒ 下図のように λ' が書ける。



図より

$$\tan\theta = \frac{\frac{\lambda'}{2}}{l}$$

$$\Rightarrow \lambda' = 2l\tan\theta = 2\cdot\frac{\lambda}{2\sin\theta}\tan\theta \quad \therefore \lambda' = \underline{\frac{\lambda}{\cos\theta}}_{\#}$$ (ハ)

$\boxed{243}$ 続き

(二)

(ロ)式 $d = m\dfrac{\lambda}{2\sin\theta}$　　(ハ)式 $\lambda' = \dfrac{\lambda}{\cos\theta}$

を連立する。

(ロ)式を変形して

$$\sin\theta = m\frac{\lambda}{2d}$$

(ハ)式を変形して

$$\cos\theta = \frac{\lambda}{\lambda'}$$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ に代入して θ を消去

$$\left(m\frac{\lambda}{2d}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{\lambda'}\right)^2 = 1$$

$$\frac{m^2\lambda^2}{4d^2} + \frac{\lambda^2}{\lambda'^2} = 1$$

$$\frac{\lambda^2}{\lambda'^2} = 1 - \frac{m^2\lambda^2}{4d^2}$$

$$\frac{1}{\lambda'^2} = \frac{1}{\lambda^2} - \frac{m^2}{4d^2}$$

$$\frac{1}{\lambda'^2} = \frac{4d^2 - m^2\lambda^2}{4d^2\lambda^2}$$

$$\lambda'^2 = \frac{4d^2\lambda^2}{4d^2 - m^2\lambda^2} \qquad \therefore \lambda' = \frac{2d}{\sqrt{4d^2 - m^2\lambda^2}}\lambda$$

(ホ)

λ が最大のとき、できる節線の数は 0 となる。これは(ロ)の図において $m = 0$ のときといえる。そして、$\sin\theta$ の最大値は 1 であるから、(ロ)式 $d = m\dfrac{\lambda}{2\sin\theta}$ を変形した式 $\lambda = \dfrac{2d\sin\theta}{m}$ より

$$\lambda_{Max} = 2d \quad \text{(ホ)}$$

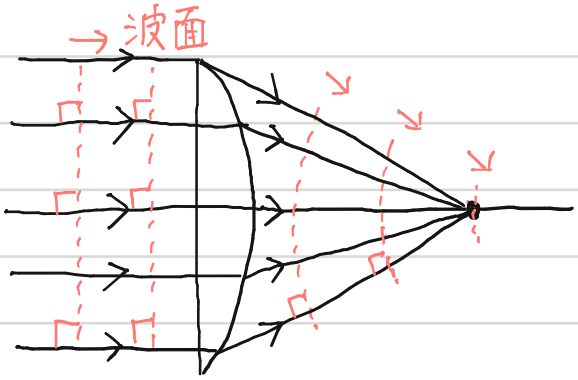
← 壁に垂直にぶつかり定常波を作るモデルである。

※ 光波の問題というより、平面波の干渉の問題である。

244

光がFに集まるには、Ⅰ,Ⅱの光が同時にFに来ればいい、について

屈折後の光の経路を考える際は波面をベースに考えたい
(ホイヘンスの原理)



ある時刻に到達していた点をむすぶと波面になるので、逆に考えると同一波面上の点まで到達するまでの時間は全ての経路で同じといえるのだ。

(イ)

屈折の法則より

$n_{真空}c = nv$

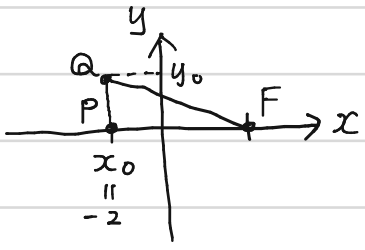
$\therefore v = \dfrac{c}{n}$ //(イ)

$n_{真空}=1$ は屈折率の定義.
一般に $n_{空気} \fallingdotseq n_{真空} = 1$ とする

(ロ)

x_0 が負の値であることに注意

(例えば下図のように $x_0=-2$ の場合



$\overline{PF} = f-(-2)$
$= f+2$
と計算する。)

よって今回の場合、

$\overline{PF} = f - x_0$

となり

$\overline{QF} = \sqrt{\overline{PF}^2 + \overline{QP}^2} = \sqrt{(f-x_0)^2 + y_0^2}$ //(ロ)

$\boxed{244}$ 続き

(ロ)を含む式を立てる

QとPは同一波面上なので同位相で、ここからFまでの時間を計算する.

$\boxed{\text{I}}$

$$t = \frac{\overline{QF}}{c} = \frac{\sqrt{(f-x_0)^2+y_0^2}}{c}$$

$\boxed{\text{II}}$

$$t = \underbrace{\frac{-x_0}{\frac{c}{n}}}_{P\to Q\text{まで}} + \underbrace{\frac{f}{c}}_{Q\to F\text{まで}}$$

これより

$$\frac{\sqrt{(f-x_0)^2+y_0^2}}{c} = \frac{f}{c} - \frac{x_0}{\frac{c}{n}}$$

← 問題文にある式

これを変形して

$$\sqrt{(f-x_0)^2+y_0^2} = f - nx_0$$

$$(f-x_0)^2+y_0^2 = (f-nx_0)^2$$

$$\cancel{f^2} - 2fx_0 + x_0^2 + y_0^2 = \cancel{f^2} - 2fnx_0 + n^2x_0^2$$

ここで $x_0 = -\frac{1}{2R}y_0^2$ より $y_0^2 = -2Rx_0$ であり、これを代入して

$$-2fx_0 + x_0^2 - 2Rx_0 = -2fnx_0 + n^2x_0^2$$

$$2x_0(n-1)f = (n^2-1)x_0^2 + 2Rx_0$$

$$f = \frac{(n^2-1)x_0 + 2R}{2(n-1)} \quad (ハ)$$

(二) $R \gg x_0$ のとき

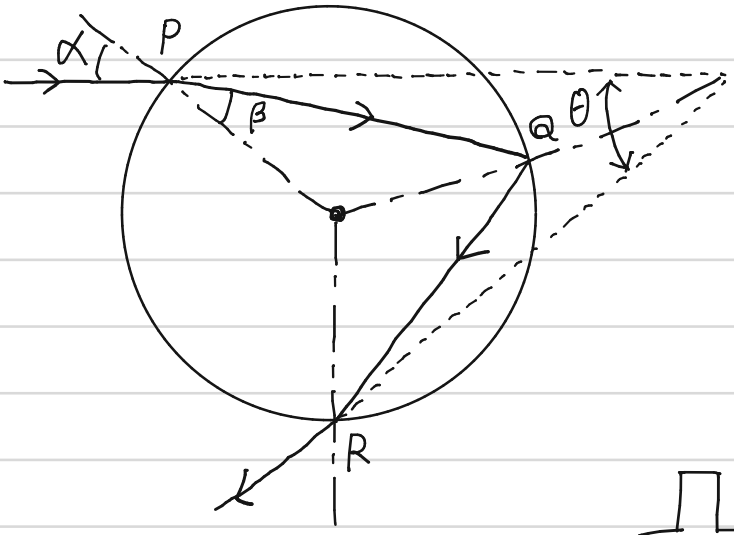
0 ($\frac{x_0}{R} \fallingdotseq 0$, 2乗がないので荒い近似)

$$f = \frac{R\left\{\frac{(n^2-1)x_0}{R} + 2\right\}}{2(n-1)} \fallingdotseq \frac{2R}{2(n-1)} = \frac{R}{n-1}$$

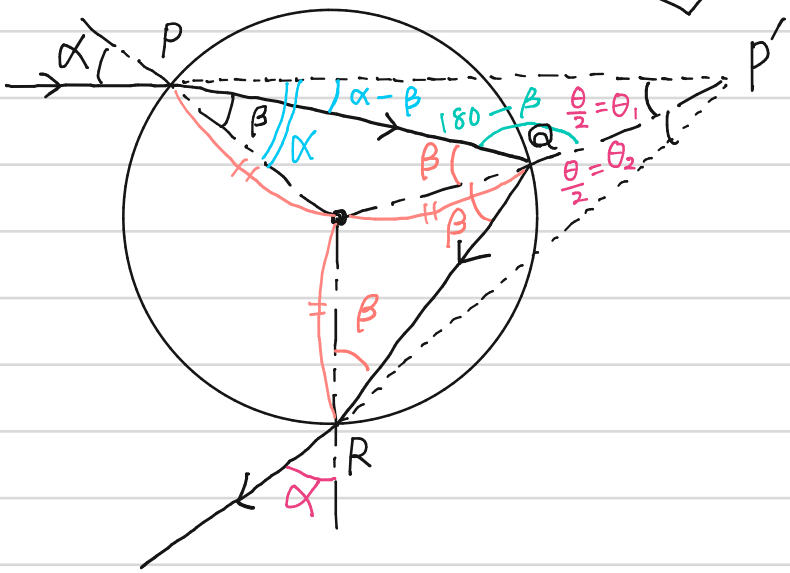
$\boxed{245}$

(イ) 屈折の法則より $1\times\sin\alpha = n\sin\beta$ $\therefore\ n = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ // (イ)

(ロ) 角度の追跡を自分でできた方がよい



この図からθとα, βの関係を書けるようになろう



① 二等辺三角形と反射の法則でβとなる角度がわかる.

② 対頂角でαを書け, α−βとなる角度がわかる

③ 直線とβの関係から 180°−βとなる角度がわかる.

④ 屈折の法則より、でていくときの屈折角がαとわかり, 図の対称性から $\theta_1=\theta_2=\frac{\theta}{2}$ とかける

⇒ PQP′の三角形に注目して

$$(\alpha-\beta)+(180-\beta)+\frac{\theta}{2}=180$$

$$\frac{\theta}{2}=2\beta-\alpha$$

$$\theta=4\beta-2\alpha \quad // \text{(ロ)}$$

※ PQP′の三角形の2角の和が外角になることから

$(\alpha-\beta)+\frac{\theta}{2}=\beta$ としてもよい.

$\boxed{245}$ 続き

(ハ) 解説で簡略化されている計算を書くと以下のようになる。

$$\begin{cases} \theta_0 = 4\beta_0 - 2\alpha_0 \\ \theta' = 4(\beta_0 + \Delta\beta) - 2(\alpha_0 + \Delta\alpha) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta\theta = \theta' - \theta_0$$
$$= \{4(\beta_0 + \Delta\beta) - 2(\alpha_0 + \Delta\alpha)\} - \{4\beta_0 - 2\alpha_0\}$$
$$= 4\Delta\beta - 2\Delta\alpha$$

ここで $\Delta\theta = 0$ とすると

$$0 = 4\Delta\beta - 2\Delta\alpha$$

$$\therefore \Delta\alpha = \underset{(ハ)}{\underline{\underline{2\Delta\beta}}}$$

(ニ) 誘導の通り計算する。

屈折の法則より

$$1 \times \sin(\alpha_0 + \Delta\alpha) = n \times \sin(\beta_0 + \Delta\beta)$$

$$\Rightarrow n = \frac{\sin(\alpha_0 + \Delta\alpha)}{\sin(\beta_0 + \Delta\beta)}$$

$$= \frac{\sin\alpha_0 \underbrace{\cos\Delta\alpha}_{\fallingdotseq 1} + \cos\alpha_0 \underbrace{\sin\Delta\alpha}_{\fallingdotseq \Delta\alpha}}{\sin\beta_0 \underbrace{\cos\Delta\beta}_{\fallingdotseq 1} + \cos\beta_0 \underbrace{\sin\Delta\beta}_{\fallingdotseq \Delta\beta}}$$

$$\fallingdotseq \frac{\sin\alpha_0 + \Delta\alpha\cos\alpha_0}{\sin\beta_0 + \Delta\beta\cos\beta_0}$$

$$= \frac{\sin\alpha_0 + 2\Delta\beta\cos\alpha_0}{\sin\beta_0 + \Delta\beta\cos\beta_0}$$

ここで(イ)より $n = \dfrac{\sin\alpha_0}{\sin\beta_0}$ なので、

$$\frac{\sin\alpha_0}{\sin\beta_0} = \frac{\sin\alpha_0 + 2\Delta\beta\cos\alpha_0}{\sin\beta_0 + \Delta\beta\cos\beta_0}$$

$\boxed{245}$ (二) 続き

$$\sin\alpha_0(\cancel{\sin\beta_0}+\Delta\beta\cos\beta_0)=\sin\beta_0(\cancel{\sin\alpha_0}+2\Delta\beta\cos\alpha_0)$$

$$\sin\alpha_0\cdot\cancel{\Delta\beta}\cos\beta_0=\sin\beta_0\cdot 2\cancel{\Delta\beta}\cos\alpha_0$$

$$\therefore\ \cos\alpha_0=\frac{\sin\alpha_0}{2\sin\beta_0}\cos\beta_0 \quad // \text{(二)}$$

(ホ) α_0を消去するため $\sin\alpha_0$ と $\cos\alpha_0$ を作る。

(イ)より $n=\dfrac{\sin\alpha_0}{\sin\beta_0}$ なので

$$\sin\alpha_0=n\sin\beta_0$$

また $\cos^2\alpha_0=1-\sin^2\alpha_0$ なので

$$\cos\alpha_0=\sqrt{1-(n\sin\beta_0)^2}$$

これらを(二)の式に代入すると

$$\sqrt{1-(n\sin\beta_0)^2}=\frac{n\cancel{\sin\beta_0}}{2\cancel{\sin\beta_0}}\cos\beta_0$$

$\sin\beta_0$ について解いて

$$1-(n\sin\beta_0)^2=\frac{n^2}{4}\cos^2\beta_0$$

$$1-(n\sin\beta_0)^2=\frac{n^2}{4}(1-\sin^2\beta_0)$$

$$1-n^2\sin^2\beta_0=\frac{n^2}{4}-\frac{n^2}{4}\sin^2\beta_0$$

$$\frac{3}{4}n^2\sin^2\beta_0=1-\frac{n^2}{4}$$

$$\sin^2\beta_0=\frac{4-n^2}{4}\left(\frac{4}{3n^2}\right)$$

$$\sin^2\beta_0=\frac{4-n^2}{3n^2}$$

$$\therefore\ \sin\beta_0=\frac{1}{n}\sqrt{\frac{4-n^2}{3}} \quad // \text{(ホ)}$$

$\boxed{245}$ 続き

(へ)

屈折の法則の式

$$1 \times \sin \alpha_0 = n \times \sin \beta_0$$

に(ホ)の式を代入して

$$\sin \alpha_0 = n \cdot \frac{1}{n} \sqrt{\frac{4-n^2}{3}}$$

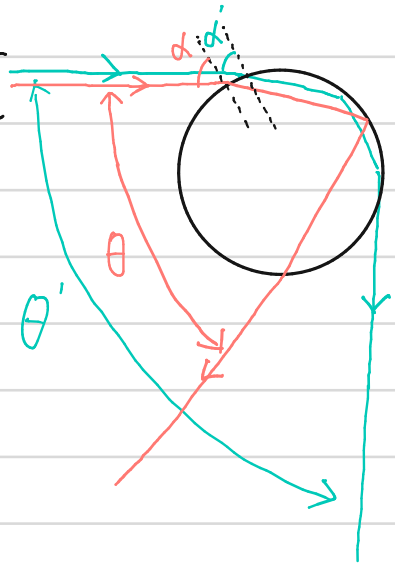
$$\therefore \sin \alpha_0 = \underline{\sqrt{\frac{4-n^2}{3}}} \quad // \text{(へ)}$$

$\boxed{245}$ 続き

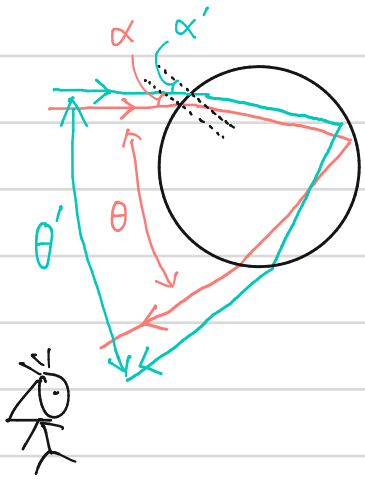
※ 重要　この計算と虹の原理を結びつけよう。

① 「θ と θ' の変化が小さいとき強度最大」について

太陽光線は平行に複数入射する



例えば左図の
→ と → の光線は
入射角 α が微小変化した
光だが θ が大きく変化している。
結果、光は散らばっている。

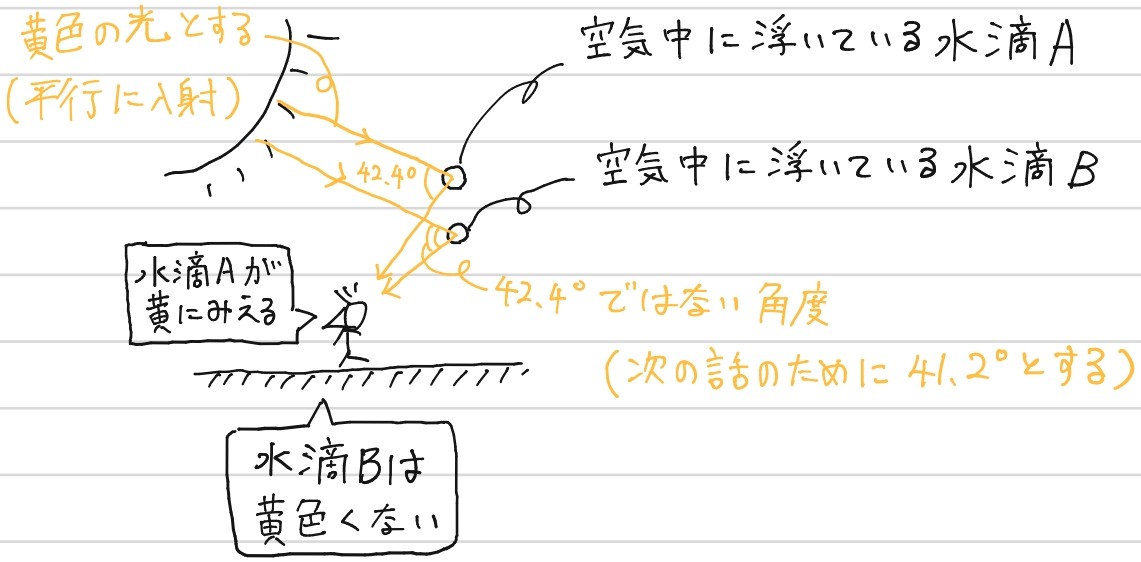


そして左図のように
θ と θ' の変化が小さいときは、
2本の光線がほぼ同じ向きに
進む。
⇒ 観測される光が多く、
強度が大きいといえるのだ。
⇒ 今回は、$\Delta\theta=0$ になるような α, β, θ を
求め、強度が最大となる角度を求めた。

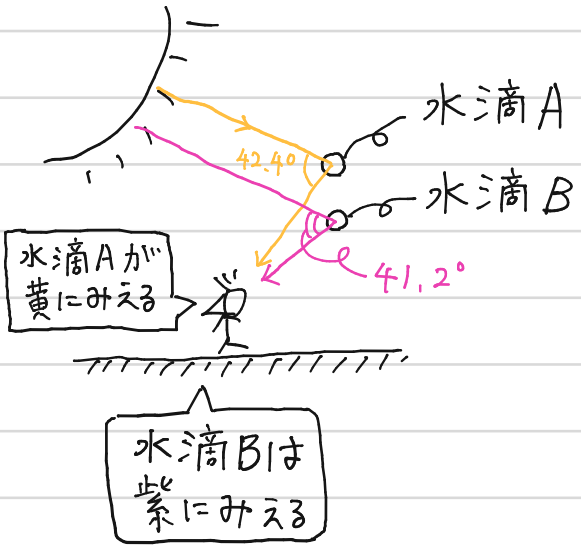
245 続き

② 実際の虹の見え方

- 問題文より $n=1.33$ だと $\theta_0=42.4°$ で強度最大。



- 光は色(波長)のちがいで屈折率がかわり、紫色はすごく曲がりやすく、$n=1.34$ 程度になる。赤は曲がりづらく $n=1.32$ くらい。
$n=1.34$ だと $\alpha_0=59.0°$, $\beta_0=39.8°$, $\theta_0=41.2°$ が得られる。



すると左図のように黄に見えなかった水滴Bは紫に見えたりする。

太陽光には、様々な色の光が含まれ、水滴の場所により強度が大きい色がかわるので、水滴ごとに色が異なり虹となるのである。
(下側に紫などの λ が小さい光がくることもわかる)