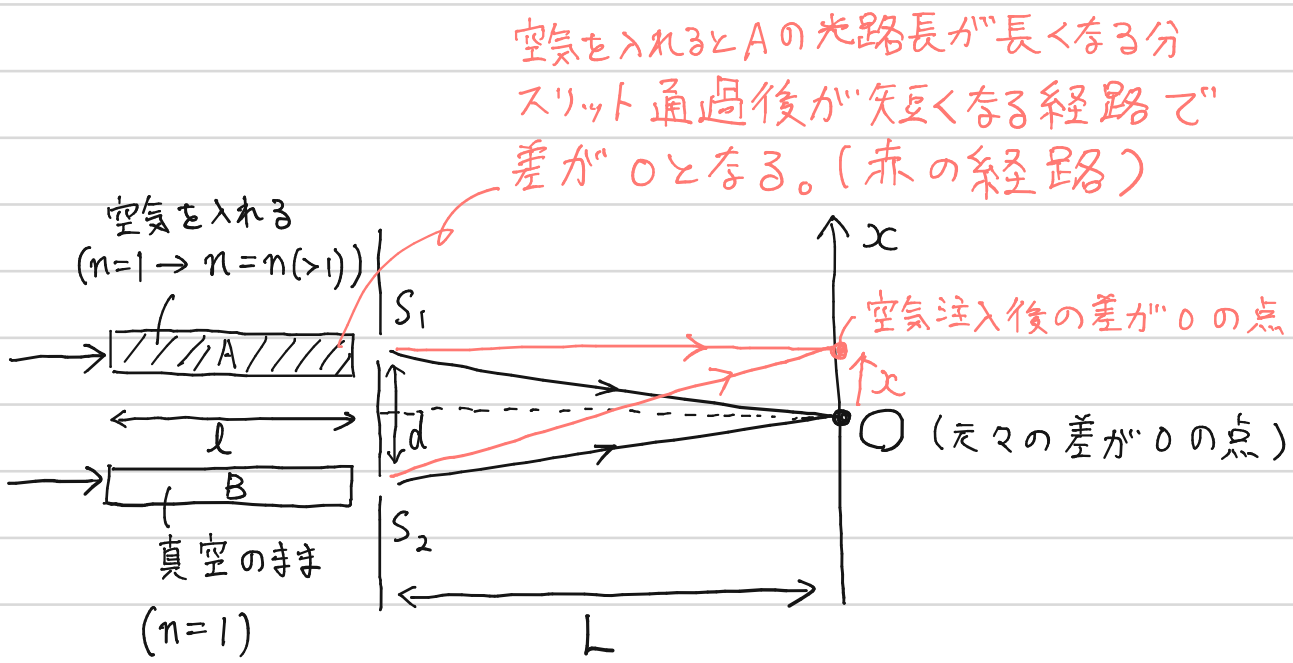
$\boxed{246}$

(1) 光路差 0 の点を追跡して考える



図より縞の移動方向は 正方向 //(イ)

(2) (ロ)

A, Bの区間で発生する光路差を考える

$\boxed{\text{Aの光路長}}$ nl　　$\boxed{\text{Bの光路長}}$ l

差は

$$nl - l \Rightarrow (n-1)l$$

この差がスリット通過後の経路差と同じになる点がxの点である。

$\boxed{\text{スリット通過後の経路差}}$ $d\sin\theta$

$$\Rightarrow d\frac{x}{L}$$

よって

$$d\frac{x}{L} = (n-1)l \qquad \therefore x = \frac{(n-1)lL}{d} \text{ //(ロ)}$$

$\boxed{246}$ (2) 続き

(ハ)

赤と青だと、青の方が曲がりやすく、nが大きい。

(暗記事項：波長が短い程、曲がりやすい。)

(λ長 ← 赤 橙 黄 緑 青 藍 紫 → 短λ)

問題文にも少し書いてある。

⇒ 空気を入れていくと青のnの方が、より大きくなる

ここで

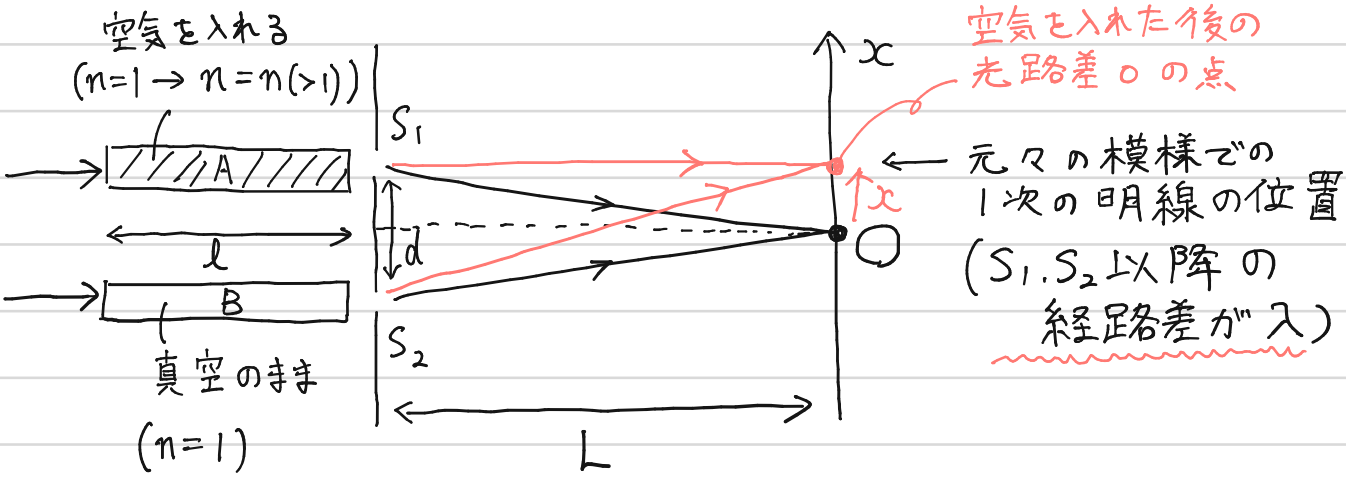
$$x = \frac{(n-1)lL}{d}$$

より、nが大きくなる程、xが大きくなることが分かるので

nが大きくなりやすい青が速く動くと分かる。

((ハ)… 大き)

(3) 元々の1次の明線まで移動したということから、S_1, S_2以降の経路差 $d\sin\theta\ (= d\frac{x}{L})$ がλとわかる



一方で、A, Bの区間での光路差は(ロ)のときと同様、

$(n-1)l$ (=) であり、これが、S_1, S_2以降の経路差λと等しければ、全体での差が0になる。よって

$$(n-1)l = \lambda \qquad \therefore n = 1 + \frac{\lambda}{l} \ (ホ)$$

$\boxed{246}$ (3) 続き

(ヘ) 問題文の「空気の屈折率 1からの増加分は、圧力に比例」
「1気圧の空気の屈折率は 1.000292」
ということを式にすると、

$$n = \underbrace{1 + 0.000292P}_{\text{増加分}} \quad /\!/ (ヘ)$$

(ト) (ホ)、(ヘ) より

$$1 + \frac{\lambda}{l} = 1 + 0.000292P$$

$$P = \frac{\lambda}{0.000292l} = \frac{\lambda}{2.92l} \times 10^4 \text{ [気圧]} \quad /\!/ (ト)$$

$\boxed{247}$

(イ) Aからの光の点Pでの変位が

$$z_1 = a\sin 2\pi \frac{c}{\lambda} t$$

で、Bからの光はこれより $d\sin\theta = d\frac{y}{l}$ の経路を進む時間だけ遅れる。時間にして $d\frac{y}{lc}$ [s] であり、これを z_1 の式に組み込んで

$$z_2 = a\sin 2\pi \frac{c}{\lambda}\left(t - d\frac{y}{lc}\right)$$

$$\Rightarrow z_2 = \underline{a\sin 2\pi\left(\frac{c}{\lambda}t - \frac{dy}{\lambda l}\right)} \quad (イ)$$

※ 元々の解説では、位相差を $2\pi\frac{(経路差)}{\lambda} = 2\pi\frac{dy}{\lambda l}$ と求めてそれを式に組み込む形で求めている。

(ロ) $z = z_1 + z_2$ より

$$z = a\sin 2\pi\frac{c}{\lambda}t + a\sin 2\pi\left(\frac{c}{\lambda}t - \frac{dy}{\lambda l}\right)$$

ここで $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ を用いて変形する。$\left(\alpha = 2\pi\frac{c}{\lambda}t,\ \beta = 2\pi\left(\frac{c}{\lambda}t - \frac{dy}{\lambda l}\right)\right)$

$$z = a(\sin\alpha + \sin\beta)$$

$$= a\left(2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$= a\left(2\sin\frac{4\pi\frac{c}{\lambda}t - 2\pi\frac{dy}{\lambda l}}{2}\cos\frac{2\pi\frac{dy}{\lambda l}}{2}\right)$$

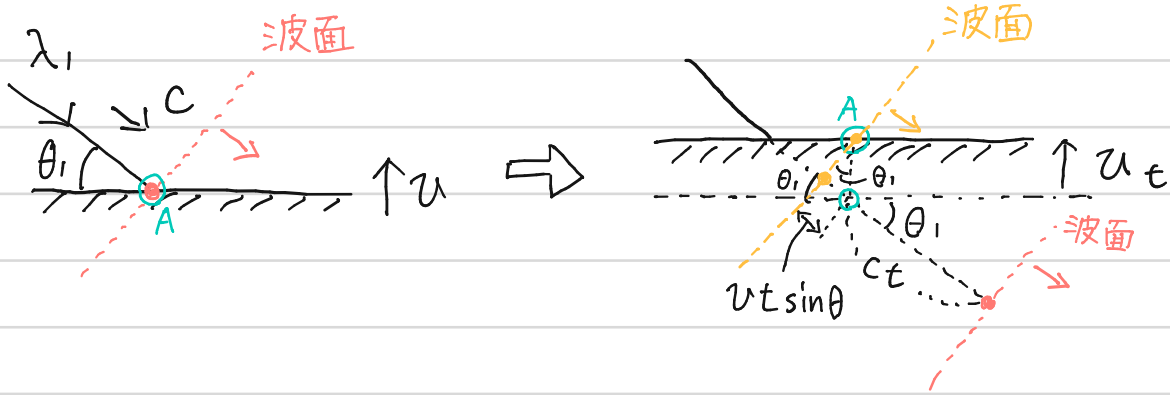
$$= \underbrace{\underline{2a\cos 2\pi\frac{dy}{2\lambda l}}}_{振幅項} \quad (ロ)$$

$$\sin 2\pi\left(\frac{c}{\lambda}t - \frac{dy}{2\lambda l}\right)$$

(ハ) 振幅項を2乗して $I \propto \underline{(2a)^2\cos^2\left\{2\pi\left(\frac{dy}{2\lambda l}\right)\right\}}$ (ハ)

248　ドップラー効果のときと同様に考える。(参考：211)
ただし、斜めの入射なので平面波
t [s] で壁にあたる波の個数を数えると

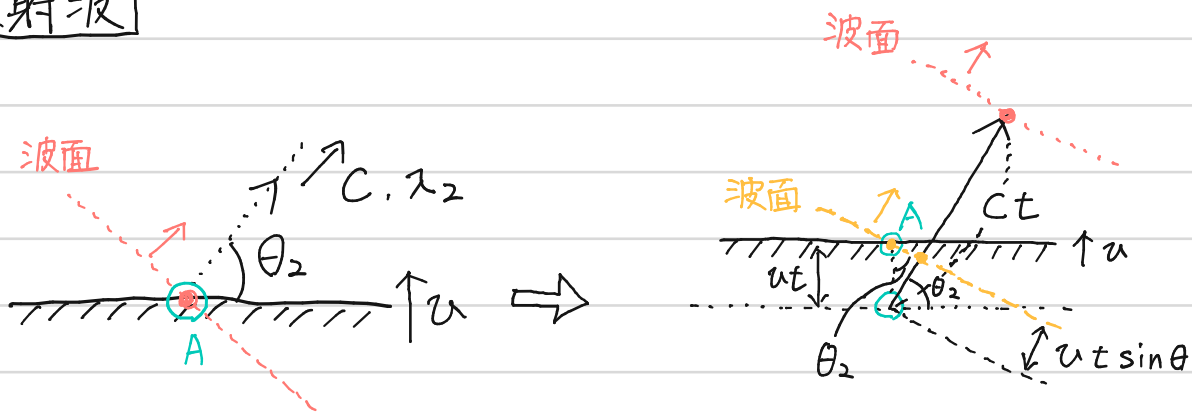
入射波



赤の波面から黄の波面までがA点にあたっている。長さが $ct+vt\sin\theta_1$ なので波の個数Nは

$$N=\frac{ct+vt\sin\theta_1}{\lambda_1}$$

反射波



赤の波面から黄色の波面までがA点から反射していっている。
長さが $ct-vt\sin\theta_2$ なので
波の個数Nは

$$N=\frac{ct-vt\sin\theta_2}{\lambda_2}$$

$\boxed{248}$ 続き

ここで 波の個数 N は同じなので

$$\frac{ct+vt\sin\theta_1}{\lambda_1}=\frac{ct-vt\sin\theta_2}{\lambda_2}$$

$$\therefore\ \lambda_2=\frac{c-v\sin\theta_2}{c+v\sin\theta_1}\lambda_1$$

※ 別解

ドップラー効果の公式から逆算する.

① 壁を観測者と見立てて. 振動数 $f_{壁}$ を計算

$$f_{壁}=\frac{c+v\sin\theta_1}{c}f_0$$ ← 斜めドップラーで公式を立式

② 壁を $f_{壁}$ の波をだす波源と見立て. 変化後の振動数 f'、波長 λ' を計算

$$f'=\frac{c}{c-v\sin\theta_2}f_{壁}$$ ← 斜めドップラーで公式を立式

$$=\frac{c}{c-v\sin\theta_2}\cdot\frac{c+v\sin\theta_1}{c}f_0$$

$$=\frac{c+v\sin\theta_1}{c-v\sin\theta_2}f_0$$

$v=f\lambda$ より

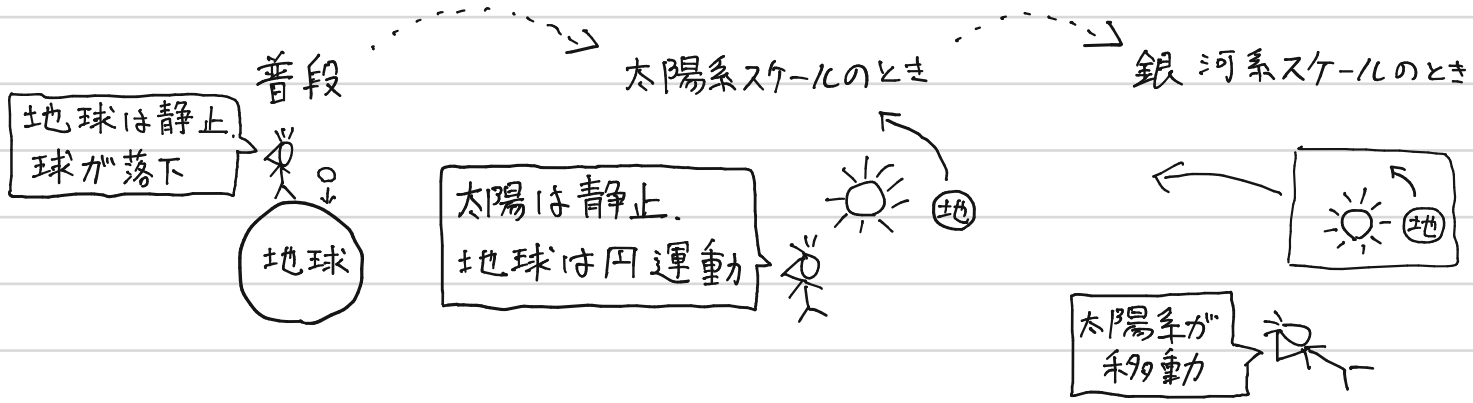
$$\lambda'=\frac{c}{f'}=\frac{c-v\sin\theta_2}{c+v\sin\theta_1}\cdot\frac{c}{f_0}$$

元々の光の波の式 $c=f_0\lambda$ より $\frac{c}{f_0}=\lambda$ なので代入して

$$\lambda'=\frac{c-v\sin\theta_2}{c+v\sin\theta_1}\lambda$$

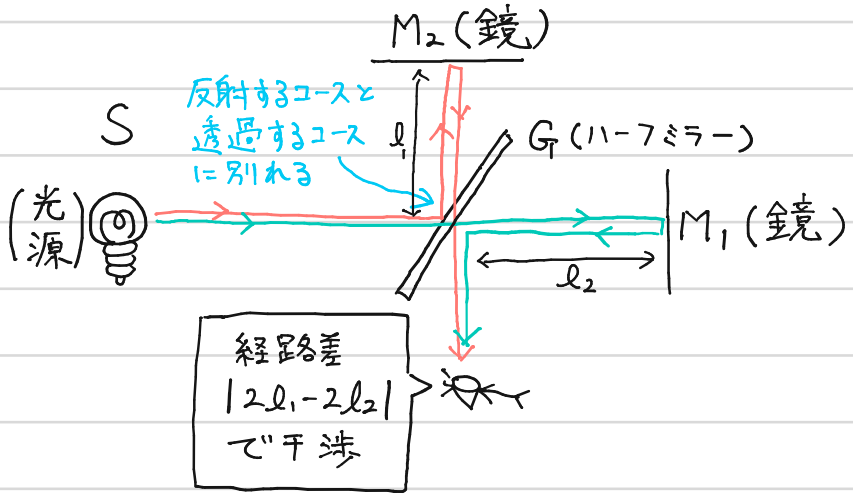
249

Point① 絶対静止のエーテル… 静止している空間のこと、空間を満たす素材をエーテルと呼んでいる。



これをどんどん拡大していって、完全に静止している空間があると想定しているのだ。そこからみた、地球の速度を検証しようとした問題である。

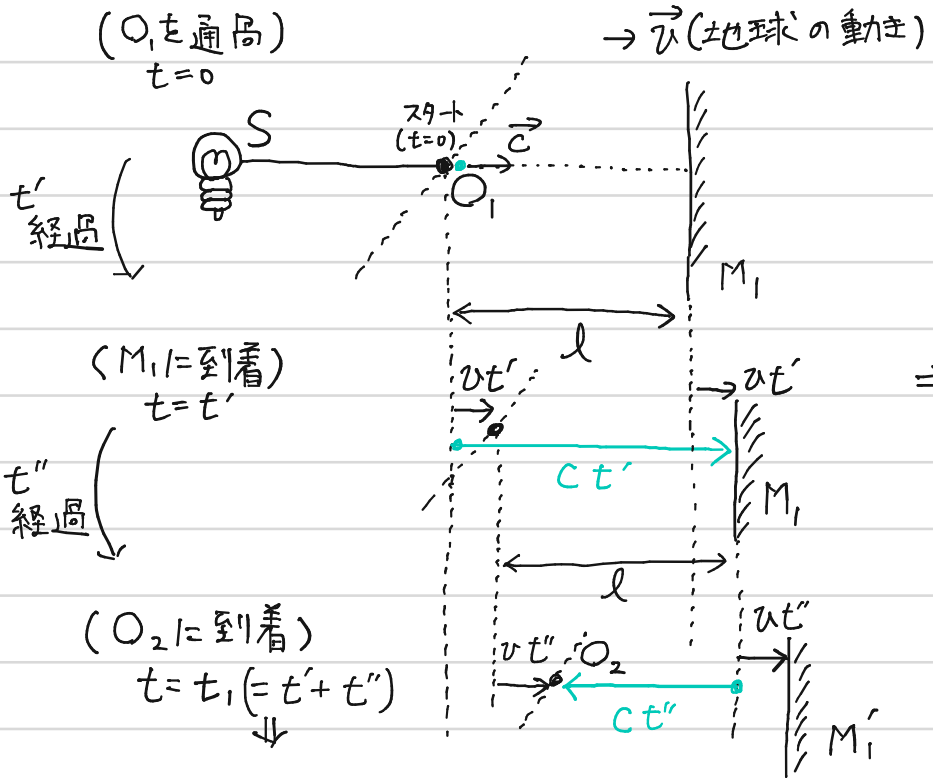
Point② マイケルソン干渉計の仕組み



今回は地球の運動速度と同じ速度で、この実験装置も動いてしまっている、というモデルなのである。

249 続き

(イ) 地球が $\overrightarrow{OM_1}$ 方向に $\vec{v}$ で動いているとする。



図より

$$\Rightarrow l + vt' = ct'$$

$$t' = \frac{l}{c-v}$$

相対速度 $u = c - v$ で
l の区間を移動したといえる
(図3の伝えたいこと)

図より

$$\Rightarrow l - vt'' = ct''$$

$$t'' = \frac{l}{c+v}$$

相対速度 $u = c + v$ で
l の区間を移動したといえる
(図3の伝えたいこと)

これより

$$t_1 = t' + t'' = \frac{l}{c-v} + \frac{l}{c+v}$$

$$= \frac{l\{(c+v)+(c-v)\}}{(c-v)(c+v)}$$

$$= \frac{2cl}{c^2 - v^2}$$

$$= \frac{2l}{c} \cdot \frac{1}{\frac{c^2-v^2}{c^2}}$$

答えの形

$$\frac{2l}{c} \times \boxed{}$$ に変形

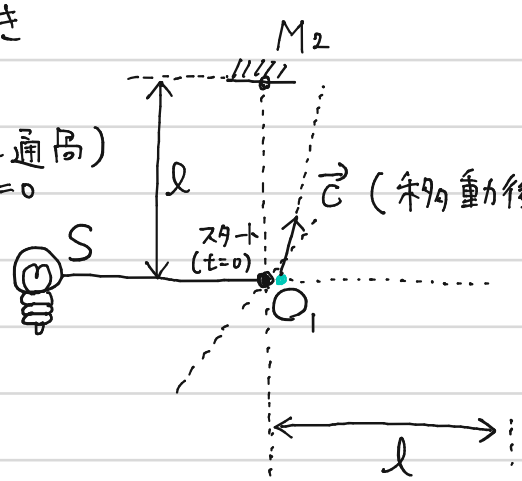
$$= \frac{2l}{c} \cdot \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}$$ //(イ)

249 続き

(ロ)(ハ)

(O_1を通過)

$t=0$

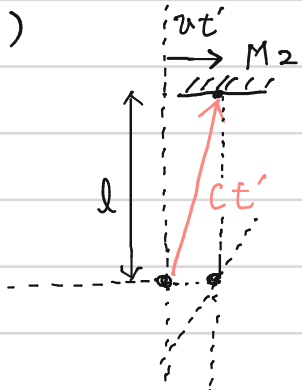


$\vec{c}$ (射出後のM_2にあたるように光は進むので$\vec{c}$はななめとする)

t' 経過

(M_2に到着)

$t=t'$



図より

$$\Rightarrow (ct')^2=(vt')^2+l^2$$

$$t'^2=\frac{l^2}{c^2-v^2}$$

$$t'=\frac{l}{\sqrt{c^2-v^2}}$$

相対速度$u=\sqrt{c^2-v^2}$でlの区間を進んだということ。(図4の伝えたいこと)

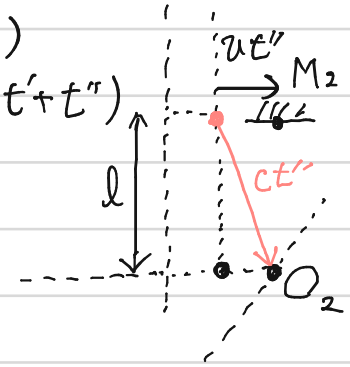
$$\left(\begin{array}{l}\vec{u}=\vec{c}-\vec{v}\\ \text{図より}\Rightarrow |\vec{u}|=\sqrt{c^2-v^2}\end{array}\right)$$

(ロ)

t'' 経過

(O_2に到着)

$t=t_2(=t'+t'')$



図より

$$\Rightarrow (ct'')^2=(vt'')^2+l^2$$

$$t'^2=\frac{l^2}{c^2-v^2}$$

$$t''=\frac{l}{\sqrt{c^2-v^2}}$$

相対速度$\sqrt{c^2-v^2}$でlの区間を進んだということ。(図4の伝えたいこと)

$$\left(\begin{array}{l}\vec{u}=\vec{c}-\vec{v}\\ \text{図より}\Rightarrow |\vec{u}|=\sqrt{c^2-v^2}\end{array}\right)$$

行きも帰りも大きさの関係は同じになる

$\boxed{249}$ (ロ)(ハ)続き

$$t_2 = t' + t''$$
$$= \frac{l}{\sqrt{c^2 - v^2}} + \frac{l}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$
$$= \frac{2l}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$
$$= \frac{2l}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad // (ハ)$$

(ニ)(ホ)

$v \ll c$ なら

$\frac{v^2}{c^2} \ll 1$ なので $\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right)^n \fallingdotseq 1 + n\frac{v^2}{c^2}$ と近似できる

t_1, t_2で適用すると.

$$t_1 = \frac{2l}{c} \cdot \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$
$$= \frac{2l}{c} \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1}$$
$$= \frac{2l}{c} \cdot \left\{1 - (-1)\frac{v^2}{c^2}\right\}$$
$$= \frac{2l}{c} \cdot \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) \quad // (ニ)$$

$$t_2 = \frac{2l}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$
$$= \frac{2l}{c}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$
$$\fallingdotseq \frac{2l}{c}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{v^2}{c^2}\right\}$$
$$= \frac{2l}{c}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) \quad // (ホ)$$

$\boxed{249}$ 続き

(ハ)

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{2l}{c}\cdot\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right) - \frac{2l}{c}\left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right)$$

$$= \frac{2l}{c}\cdot\left(\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right)$$

$$= \frac{l}{c}\cdot\left(\frac{v}{c}\right)^2 \quad /\!/ (ハ)$$

(ト) M_1を通る経路と，M_2を通る経路で

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{l}{c}\cdot\left(\frac{v}{c}\right)^2$$

の時間差があるなら，光路差Δlは

$$\Delta l = c\Delta t = c(t_1 - t_2)$$

$$= c\cdot\frac{l}{c}\cdot\left(\frac{v}{c}\right)^2$$

$$= l\left(\frac{v}{c}\right)^2 \quad /\!/ (ト)$$

(チ) (リ)

干渉の条件式をたてると

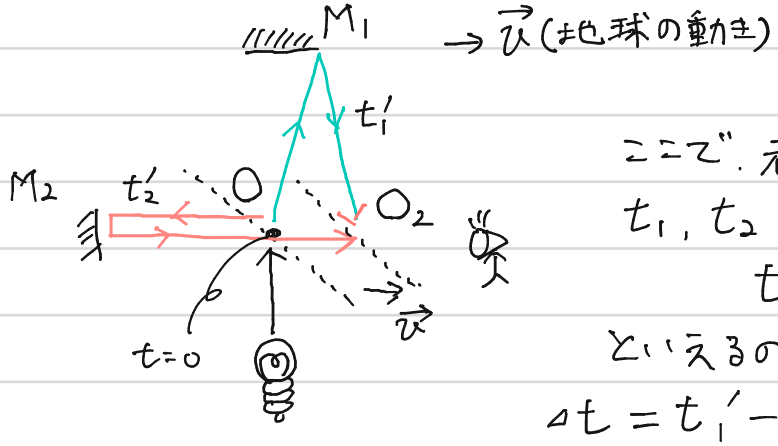
$$\Delta l = m\lambda \quad /\!/ (チ)$$

$$\Rightarrow l\left(\frac{v}{c}\right)^2 = m\lambda$$

$$l = m\lambda\left(\frac{c}{v}\right)^2 \quad /\!/ (リ)$$

249 続き

(又) 装置を90°回転させると下図の経路での干渉となる.



ここで、元の経路で求めた時間 t_1, t_2 を用いて t_1', t_2' を示すと、

$$t_1' = t_2 \qquad t_2' = t_1$$

といえるので

$$\Delta t = t_1' - t_2' = t_2 - t_1$$

となり

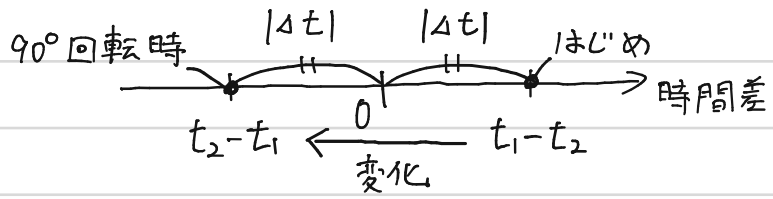
時間の差 $|\Delta t|$ は同じだが

符合が逆になっているといえる.

(途中で t_1' と t_2' の大小関係が逆転する)

⇓ このようなイメージ

時間差を数直線に示すと



すると、90°回転させる中で、時間差にして $2\Delta t$ 分の光路長の変化がおきている。(その際、経路差0になる時刻を経由している)

時間ではなく、長さの差でこれを示すと光路差は $2\Delta l$ 変化しているといえる。(ここまでが問題文 P117 上部の説明である)

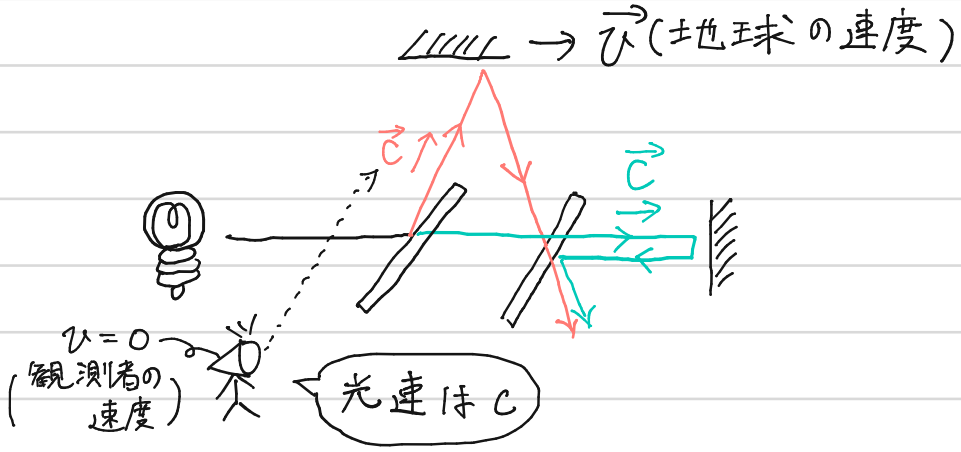
ここで、干渉の特徴として、光路差が λ 変わるごとに明線が表れるといえるので、「明→暗→明」の変化は光路差が λ 変わるごとに起こる。よってその回数 N は

$$N = \frac{2\Delta l}{\lambda} = \frac{2\cdot l\left(\frac{v}{c}\right)^2}{\lambda} = \underline{\frac{2l}{\lambda}\left(\frac{v}{c}\right)^2} \quad /\!/ (又)$$

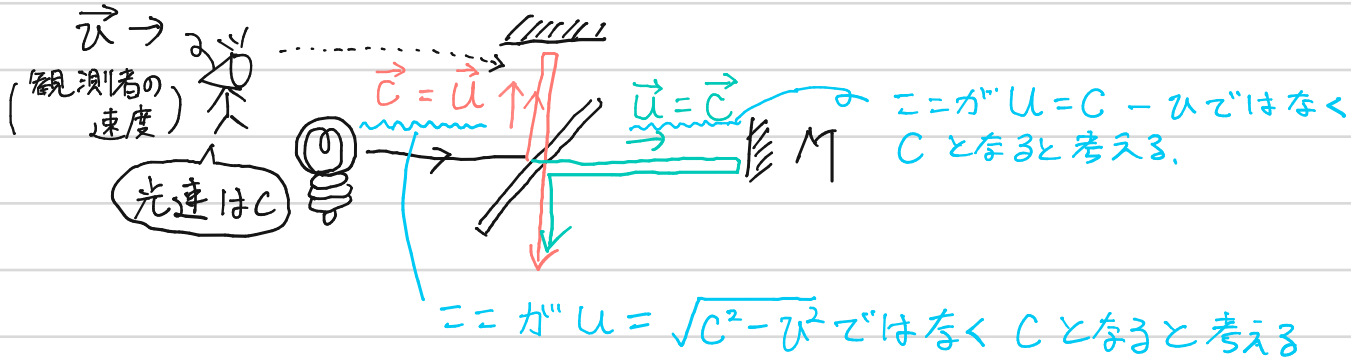
249 補足　この実験の結果と相対性理論

問題文にあるように、この実験では想定した結果が表れなかった。そこでアインシュタインは「光速不変の原理」を提唱した。

地球外の人視点



地球上の人視点



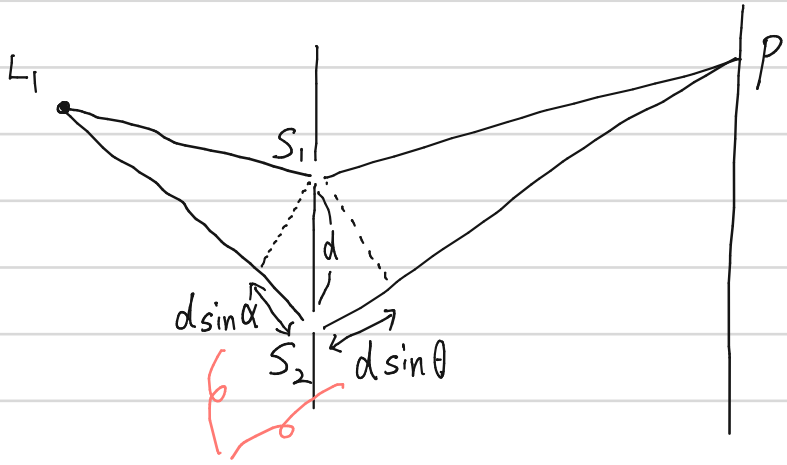
光速不変の原理は、上図のように、同じ現象をちがう視点で見たとき、どの観測者から見ても光速 $\vec{c}$ の大きさは同じになるという原理である。

そうすると、装置を90°回転させても、u に変化はなく、干渉の様子が変化しない実験結果に説明がつくのである。

ただし、作図した通り、相対速度の大きさは地球外の人視点の光速cをもとに考えると $|\vec{u}|=\sqrt{c^2-v^2}$ や $|\vec{u}|=c-v$ となるので $|\vec{u}|=|\vec{c}|$ とするのはおかしく感じる。このおかしさは、観測者によって時間のすすむはやさがちがう、ということで補正されている。地球上の人から見たときの時間のすすみは地球外の人に比べてゆったりしているのである。これが相対性理論の基礎となっている。

$\boxed{250}$

(イ) 図1



ここの分 $\overline{L_1S_2P}$ の方が長い

よって

$$\overline{L_1S_2P} - \overline{L_1S_1P} = d\sin\theta + d\sin\alpha$$
$$\fallingdotseq d\theta + d\alpha$$
$$= \underline{(\theta+\alpha)d} \quad (イ)$$

(ロ) S_1を通る経路より光路長が$(\theta+\alpha)d$長いので

$$y_1 = A\sin\omega t$$

の式より時間が$\dfrac{(\theta+\alpha)d}{c}$おくれている式にすればよい

$$y_2 = A\sin\omega\left\{t - \frac{(\theta+\alpha)d}{c}\right\}$$
$$= A\sin\left\{\omega t - \frac{\omega(\theta+\alpha)d}{c}\right\}$$

$\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, $Tc = \lambda$ より

$$= \underline{A\sin\left\{\omega t - 2\pi\frac{(\theta+\alpha)d}{\lambda}\right\}} \quad (ロ)$$

※ 元々の解説では、位相差を $2\pi\dfrac{(光路差)}{\lambda} = 2\pi\dfrac{(\theta+\alpha)d}{\lambda}$ と求めてそれを式に組み込む形で求めている。

$\boxed{250}$ 続き

(ハ)(ニ)

y_1 と y_2 を合成する。問題文で与えられている公式を用いて、

$$y_1 + y_2 = A\sin\underbrace{\omega t}_{x} + A\sin\underbrace{\left\{\omega t - 2\pi\frac{(\theta+\alpha)d}{\lambda}\right\}}_{y}$$

$$= 2A\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$= 2A\sin\frac{2\omega t - 2\pi\frac{(\theta+\alpha)d}{\lambda}}{2}\cos\frac{2\pi\frac{(\theta+\alpha)d}{\lambda}}{2}$$

$$= \underbrace{2A\cos\pi\frac{(\theta+\alpha)d}{\lambda}}_{\text{tを含まない項（振幅項）}}\sin\left\{\omega t - \pi\frac{(\theta+\alpha)d}{\lambda}\right\}$$

問題文に、光の強度Iは振幅の2乗に比例し $I = kA^2$ となる、とあるので

$$I_1 = k\cdot\left\{2A\cos\pi\frac{(\theta+\alpha)d}{\lambda}\right\}^2$$

$$= 4kA^2\cos^2\pi\frac{(\theta+\alpha)d}{\lambda}$$

ここで問題文の $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ を用いて

$$I_1 = 4kA^2\frac{1+\cos 2\pi\frac{(\theta+\alpha)d}{\lambda}}{2}$$

$$= \underbrace{2kA^2}_{B\ (ハ)}\left\{1+\cos\underbrace{2\pi\frac{(\theta+\alpha)d}{\lambda}}_{\beta\ (ニ)}\right\}$$

$\boxed{250}$ 続き

(ホ)(ヘ)(ト)

問題文の誘導に従うと、$\alpha \to -\alpha$ として、

$$I_2 = 2kA^2\left\{1+\cos 2\pi\frac{(\theta-\alpha)d}{\lambda}\right\}$$

よって

$$I = I_1 + I_2$$

$$= 2kA^2\left\{1+\cos 2\pi\frac{(\theta+\alpha)d}{\lambda}\right\} + 2kA^2\left\{1+\cos 2\pi\frac{(\theta-\alpha)d}{\lambda}\right\}$$

$$= 2kA^2\left\{2+\cos\underbrace{2\pi\frac{(\theta+\alpha)d}{\lambda}}_{x} + \cos\underbrace{2\pi\frac{(\theta-\alpha)d}{\lambda}}_{y}\right\}$$

$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$ を用いて

$$I = 2kA^2\left(2+2\cos 2\pi\frac{\theta d}{\lambda}\cdot\cos 2\pi\frac{\alpha d}{\lambda}\right)$$

$$I = \underbrace{4kA^2}_{C\,(ホ)}\left(1+\cos\underbrace{2\pi\frac{\theta d}{\lambda}}_{\gamma\,(ヘ)}\cdot\cos\underbrace{2\pi\frac{\alpha d}{\lambda}}_{\delta\,(ト)}\right)$$

(チ) コントラスト $V = \left|\frac{I_{max}-I_{min}}{I_{max}+I_{min}}\right|$ が1に近い程はっきり見える。について。

$V = \left|\frac{I_{max}-I_{min}}{I_{max}+I_{min}}\right|$ は I_{max} と I_{min} の差が激しい程1に近づく

例えば $I_{max}=40$, $I_{min}=10$ とすると、

$$V = \frac{30}{50} = \frac{3}{5}$$

これに対し、$I_{max}=190$, $I_{min}=10$ とすると

$$V = \frac{180}{200} = \frac{9}{10}$$

といった感じ。

$\boxed{250}$ (チ) 続き

θを変数として、I_{max}, I_{min}を考えると、

I_{max}は $\cos 2\pi \dfrac{\theta d}{\lambda}$ が1のときで

I_{min}は $\cos 2\pi \dfrac{\theta d}{\lambda}$ が-1のときなので、

$$I_{max} = 4kA^2\left(1+\cos 2\pi \frac{\alpha d}{\lambda}\right)$$

$$I_{min} = 4kA^2\left(1-\cos 2\pi \frac{\alpha d}{\lambda}\right)$$

Vの式に代入すると

$$V = \left|\frac{4kA^2\left(1+\cos 2\pi \frac{\alpha d}{\lambda}\right) - 4kA^2\left(1-\cos 2\pi \frac{\alpha d}{\lambda}\right)}{4kA^2\left(1+\cos 2\pi \frac{\alpha d}{\lambda}\right) + 4kA^2\left(1-\cos 2\pi \frac{\alpha d}{\lambda}\right)}\right|$$

$$= \left|\frac{4kA^2\left(2\cos 2\pi \frac{\alpha d}{\lambda}\right)}{8kA^2}\right|$$

$$= \underline{\left|\cos 2\pi \frac{\alpha d}{\lambda}\right|}_{//(チ)}$$

(リ) $d = d$のとき $V=1$ という条件から、

$$\pm 1 = \cos 2\pi \frac{\alpha d}{\lambda} \qquad \therefore 2\pi \frac{\alpha d}{\lambda} = n\pi \cdots ①$$

$d = d+\Delta d$のとき $V=0$ という条件から

$$0 = \cos 2\pi \frac{\alpha(d+\Delta d)}{\lambda} \qquad \therefore 2\pi \frac{\alpha(d+\Delta d)}{\lambda} = \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi \cdots ②$$

② − ①より

$$2\pi \frac{\alpha \Delta d}{\lambda} = \frac{1}{2}\pi$$

$$2\alpha = \underline{\frac{\lambda}{2\Delta d}}_{//(リ)}$$