94

$$x_G = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \quad \cdots ①$$

（重心の公式）

(1)

(ア) 速度は位置の微分という関係 $v = \frac{dx}{dt}$ があるので

$$v_G = \frac{dx_G}{dt}$$

$$= \frac{m_1 \frac{dx_1}{dt} + m_2 \frac{dx_2}{dt}}{m_1 + m_2} = \underline{\frac{m v_1 + m v_2}{m_1 + m_2}} \quad \cdots ②$$

// (ア)

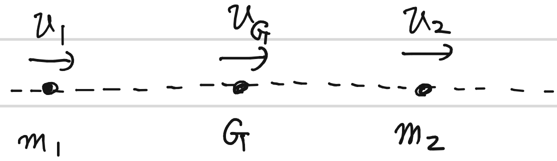
(イ) 運動量が保存するとき, $(m v_1 + m v_2)$ が保存するので

$$v_G = \frac{m v_1 + m v_2}{m_1 + m_2}$$

も保存する。(<u>一定になる</u>) // (イ)

(2)

(ウ)



重心から見た相対速度は

（みられる）－（みる）

$$v_{G\to 1} = u_1 = v_1 - v_G$$

$$v_{G\to 2} = u_2 = v_2 - v_G$$

ここで重心に対する運動量の和は.

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1(v_1 - v_G) + m_2(v_2 - v_G)$$

$$= m_1 v_1 + m_2 v_2 - (m_1 + m_2) v_G$$

② より $v_G = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$

$$= m_1 v_1 + m_2 v_2 - (m_1 + m_2) \frac{m v_1 + m v_2}{m_1 + m_2}$$

$$= \underline{0}$$ // (ウ)

$\boxed{94}$ 続き

(3) $v_1 = u_1 + v_G$, $v_2 = u_2 + v_G$ を用いて.
運動エネルギーの和を求めると、

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2$$
$$= \frac{1}{2}m_1 (u_1 + v_G)^2 + \frac{1}{2}m_2 (u_2 + v_G)^2$$
$$= \frac{1}{2}m_1 (u_1^2 + 2u_1 v_G + v_G^2) + \frac{1}{2}m_2 (u_2^2 + 2u_2 v_G + v_G^2)$$
$$= \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_G^2 + (m_1 u_1 + m_2 u_2) v_G + \left(\frac{1}{2}m_1 u_1^2 + \frac{1}{2}m_2 u_2^2\right)$$

(2)の答えより
$m_1 u_1 + m_2 u_2 = 0$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_G^2}_{(エ)} + \left(\frac{1}{2}m_1 u_1^2 + \frac{1}{2}m_2 u_2^2\right) \cdots ③$$

$\Downarrow$ 重心の運動エネ (オ) + $\Downarrow$ 重心に対する相対運動の運動エネ

※ 運動量は

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v_G$$

が成り立つけれど、
エネルギーは

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_G^2$$

とならない、ということがポイントである。

(4) ③式: $\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_G^2 + \left(\frac{1}{2}m_1 u_1^2 + \frac{1}{2}m_2 u_2^2\right)$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m_1 u_1^2 + \frac{1}{2}m_2 u_2^2$$
$$= \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_G^2$$
$$= \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\left(\frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}\right)^2$$

$\boxed{94}$ 続き

$$= \frac{m_1 v_1^2(m_1+m_2) + m_2 v_2^2(m_1+m_2) - (m_1 v_1 + m_2 v_2)^2}{2(m_1+m_2)}$$

$$= \frac{\cancel{m_1^2 v_1^2} + m_1 m_2 v_1^2 + m_1 m_2 v_2^2 + \cancel{m_2^2 v_2^2} - \cancel{(m_1 v_1)^2} - 2m_1 m_2 v_1 v_2 - \cancel{(m_2 v_2)^2}}{2(m_1+m_2)}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} (v_1^2 - 2v_1 v_2 + v_2^2)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} (v_2 - v_1)^2$$ // (カ)

※ $$\underbrace{\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2}_{\text{運動エネルギーの和}} = \underbrace{\frac{1}{2}(m_1+m_2) v_G^2}_{\text{重心の運動エネ}} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} (v_2 - v_1)^2}_{\text{換算質量を考えた相対運動のエネルギー}}$$

という関係が見出だせる.