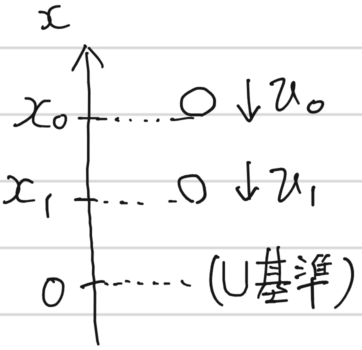
125

・「位置エネルギーの基準」について.

位置エネルギーで大切なのは「差」であり、基準はどこにとってもよいのだ



左図のようなモデルで、力学エネの保存の式をたてると

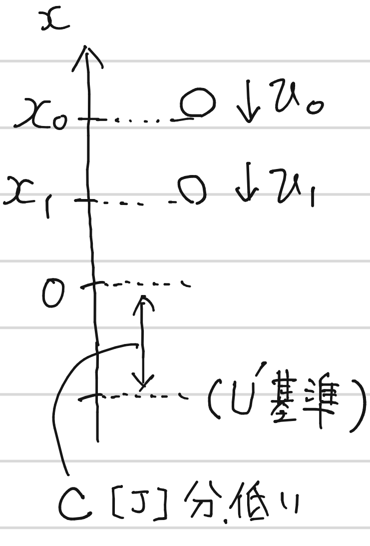
$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgx_0 = \frac{1}{2}mv_1^2 + mgx_1$$

となり、変形すると

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = mgx_0 - mgx_1$$

(運動エネの変化) = (重力エネの減少量)

という風に書け、「重力エネの差」がポイントなのがわかる。



これは、Cを定数として

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgx_0 + C = \frac{1}{2}mv_1^2 + mgx + C$$

と書いても支障がない。これは、「$mgx_0 + C$」や「$mgx + C$」が、基準がもとより低いときの位置エネといえて、低い分のエネルギー量をCとすると、

$$U' = mgx + C$$

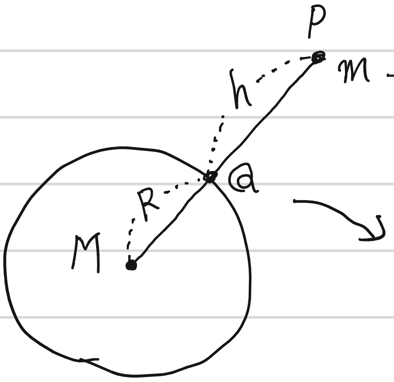
と重力エネの式を書けるのだ。(左図参照)

さて、万有引力の位置エネルギーは、無限遠点を基準にすると、

$$U = -G\frac{mM}{x}$$

と計算できるけれど、基準をかえたらどう書けるか、というのが今回の問題である。

125 続き



$$U_P = -G\frac{mM}{R+h}$$

$$U_Q = -G\frac{mM}{R}$$

無限遠点を基準としたときの万有引力による位置エネルギー

ここで Qを基準としたとき、基準の差によるエネルギーの差を定数 C とおき、基準がちがうときのエネルギー U' を書くと

$$U_Q' = -G\frac{mM}{R} + C$$

となり、$U_Q' = 0$ なので

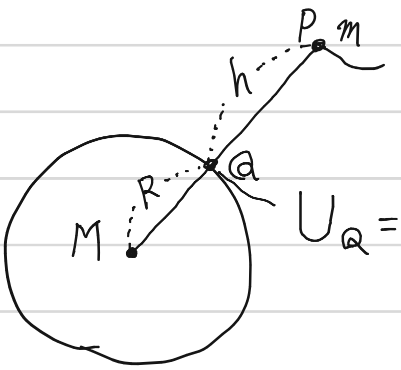
$$C = G\frac{mM}{R}$$

となる。すると U_P' は

$$U_P' = -G\frac{mM}{R+h} + C$$

$$= -G\frac{mM}{R+h} + G\frac{mM}{R} = \underline{GMm\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right)}_{/\!/}$$

※ もっとかみくだいて解釈してみる。



$$U_P = -G\frac{mM}{R+h}$$

$$U_Q = -G\frac{mM}{R}$$

差 $\Delta U = U_P - U_Q$

⇓

$U_Q' = 0$ としたら U_P' は

$$\underset{(0)}{U_Q'} + \Delta U = U_P'$$

$$\therefore U_P' = \Delta U$$

$$= \underline{\left(-G\frac{mM}{R+h}\right) - \left(-G\frac{mM}{R}\right)}_{/\!/}$$

125 続き

(2) $(1+\alpha)^n \fallingdotseq 1+n\alpha$ の近似で指数を下げることを目指す。
$\alpha \ll 1$ である必要があるので $\frac{h}{R}$ を作る。

$$U_p' = GmM\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right)$$
$$= \frac{GmM}{R}\left(1 - \frac{R}{R+h}\right)$$
$$= \frac{GmM}{R}\left\{1 - \left(\frac{R+h}{R}\right)^{-1}\right\}$$
$$= \frac{GmM}{R}\left\{1 - \left(1+\frac{h}{R}\right)^{-1}\right\}$$
近似
$$\fallingdotseq \frac{GmM}{R}\left\{1 - \left(1-\frac{h}{R}\right)\right\}$$
$$= \frac{GmM}{R^2}h \quad \cdots ①$$

ここで地表での万有引力と mg の関係から G を消去する。

$$G\frac{mM}{R^2} = mg$$

① に代入して

$$\underline{U_p' = mgh}$$

※ $U = mgh$ は、地表付近での重力エネで
$U = -G\frac{mM}{x}$ は、地表から離れたときの重力エネなのだ
万有引力の問題で $U = mgh$ は使わないようにしよう。