126

(ア) 公転周期がTなので

$$v=\frac{2\pi r}{T}$$

円運動の運動方程式より

$$m\frac{v^2}{r}=f$$

$$\Rightarrow m\frac{\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2}{r}=f$$

$$\therefore f=mr\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \quad /\!/ (ア)$$

※ $\omega=\frac{2\pi}{T}$ と求めて
$mr\omega^2=f$
$\Rightarrow mr\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2=f$
としてもよい

(イ) $\frac{T^2}{r^3}=k$ より $T^2=kr^3$。これを代入して.

$$f=mr\frac{(2\pi)^2}{kr^3}$$

$$f=\frac{4\pi^2}{k}\cdot\frac{m}{r^2} \quad /\!/ (イ)$$

(ウ) 誘導に従うと

$$f'=\frac{4\pi^2}{k'}\cdot\frac{M}{r^2} \quad /\!/ (ウ)$$

(※地球の運動方程式 $M\cdot\frac{\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2}{r}=f'$
ケプラーの第三法則 $T^2=k'r^3$
の連立. $m\rightarrow M$. $k\rightarrow k'$ に変わるだけ)

補足 $\Downarrow$

$f=f'$ より

$$\frac{4\pi^2}{k}\cdot\frac{m}{r^2}=\frac{4\pi^2}{k'}\cdot\frac{M}{r^2} \qquad \therefore kM=k'm$$

共通の定数 $\frac{4\pi^2}{kM}$, $\frac{4\pi^2}{k'm}$ を作るように変形し.これをGとおくと

$$f=\frac{4\pi^2}{k}\cdot\frac{m}{r^2}=\frac{4\pi^2}{kM}\cdot\frac{mM}{r^2}=G\frac{mM}{r^2}$$

$$f'=\frac{4\pi^2}{k'}\cdot\frac{M}{r^2}=\frac{4\pi^2}{k'm}\frac{mM}{r^2}=G\frac{mM}{r^2}$$