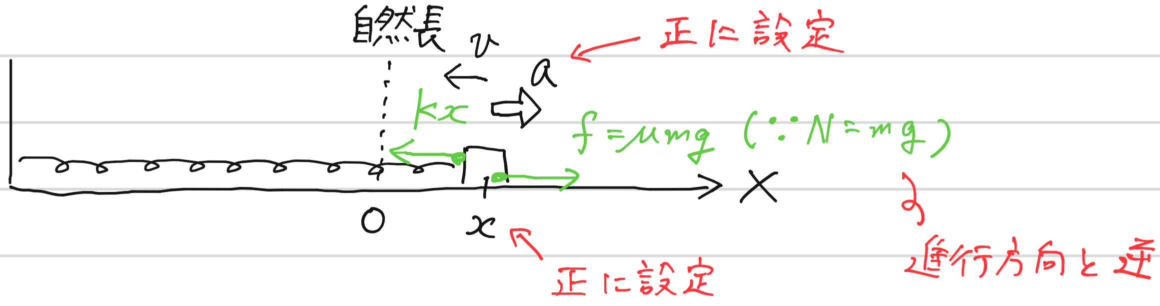
133

(1) 適当 $x$ での作図をしてみる




運動方程式 $ma=F$ より

$$ma=f-kx$$

$$\Rightarrow ma=\mu mg-kx$$

$$a=\mu g-\frac{k}{m}x$$

単振動の式 $-\bigcirc(x-\square)$ の形にする

$$a=-\frac{k}{m}\left(x-\underbrace{\frac{\mu mg}{k}}\right)$$

ここが中心座標を示す.

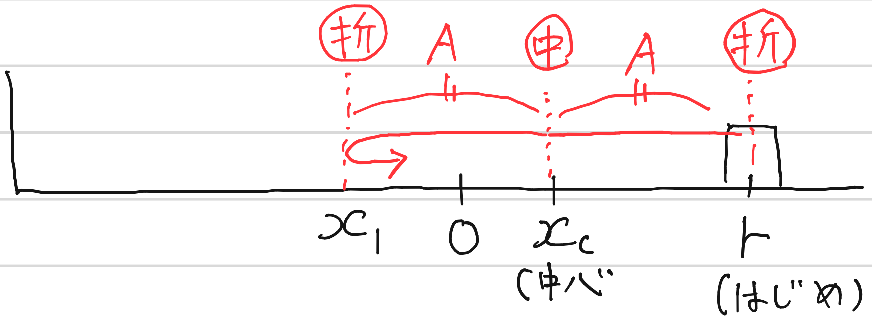
(中心) $=\dfrac{\mu mg}{k}$ と読める.

(2) 前問(1)より

$$x_c=\frac{\mu mg}{k}$$

※ つりあいの位置が中心。
$\Rightarrow$ $a=0$ となる $x$ が中心.

(3) 単振動の軌道で考えてみる.




反対の折り返し点で $v=0$ となる。振幅 $A$ は

$$A=r-x_c$$

といえ. $x_1$ は $r$ より $2A$ だけ負の向きなので

$$x_1=r-2A$$

$\boxed{133}$ (3) 続き

$$x_1 = r - 2A$$

$$\Rightarrow x_1 = r - 2(r - x_c)$$

$$= -r + 2x_c$$

$$= -r + \frac{2\mu mg}{k}$$

$$= -\left(r - \frac{2\mu mg}{k}\right) \quad \text{//}$$

← 符合と大きさが見やすい形に変形した。

※ エネルギーと仕事の関係でだしてもいいけど大変

(4) 単振動の周期を T とすると、1往復の半分の移動なので

$$t_1 = \frac{T}{2}$$

といえる。

前問(1)で求めた $a$ の式と $\boxed{公式}$ をヒヒべて、$\omega$ をだす。

$$a = \underbrace{-\frac{k}{m}}\underbrace{\left(x - \frac{\mu mg}{k}\right)}$$

$$a = -\omega^2 X$$ ← $\boxed{公式}$ ※公式の X は中心からの変位である

よって

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \qquad \therefore \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$T = \frac{2\pi}{\omega}$ より

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$t_1 = \frac{T}{2}$ より

$$t_1 = \pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \text{//}$$

$\boxed{133}$ 続き

(5)（解答のやり方）

$\boxed{公式}$ $v_{Max} = A\omega$ より

$$v_{Max} = (r - x_c) \cdot \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$= \left(r - \frac{\mu mg}{k}\right)\sqrt{\frac{k}{m}} \quad /\!/$$

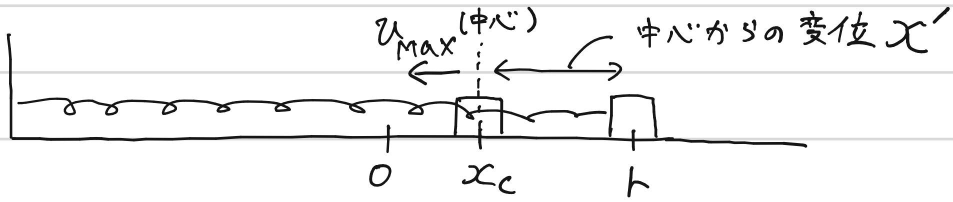
（マスターしてほしいやり方）

復元力による位置エネルギーを用いた保存則．

運動方程式をたてるときに求めた復元力の式より．

$$F = \mu mg - kx$$

$$\Rightarrow F = -\underbrace{k}_{\text{単振動の比例定数 } K=k}\left(x - \frac{\mu mg}{k}\right)$$




ここで復元力による位置エネルギーは，中心からの変位 $x'$ を用いて

$$U = \frac{1}{2}Kx'^2$$

となり，エネルギー保存則をたてると

$$\frac{1}{2}kx'^2 = \frac{1}{2}mv_{Max}^2$$

$$\therefore v_{Max} = x'\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$= (r - x_c)\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$= \left(r - \frac{\mu mg}{k}\right)\sqrt{\frac{k}{m}} \quad /\!/$$

※鉛直ばね振り子で，中心からの変位を，のびとみなしてばねのエネルギーの式をたてると，重力エネが表れなかったように，今回，摩擦力による仕事が表れなくなっているのだ。

$\boxed{133}$ (5) 続き.

(さらに別解)

運動エネルギーと全ての仕事の関係から立式する。

$$\underbrace{0}_{K_{前}} + \underbrace{\frac{1}{2}kr^2 - \frac{1}{2}kx_c^2}_{W_{ばね}\ (U_{前}-U_{後})} \underbrace{- \mu mg(r - x_c)}_{W_{摩擦}} = \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{K_{後}}$$

$\mu mg = kx_c$ を代入

$$\Rightarrow \frac{1}{2}kr^2 - \frac{1}{2}kx_c^2 - kx_c(r - x_c) = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\Rightarrow kr^2 - kx_c^2 - 2kx_c r + 2kx_c^2 = mv^2$$

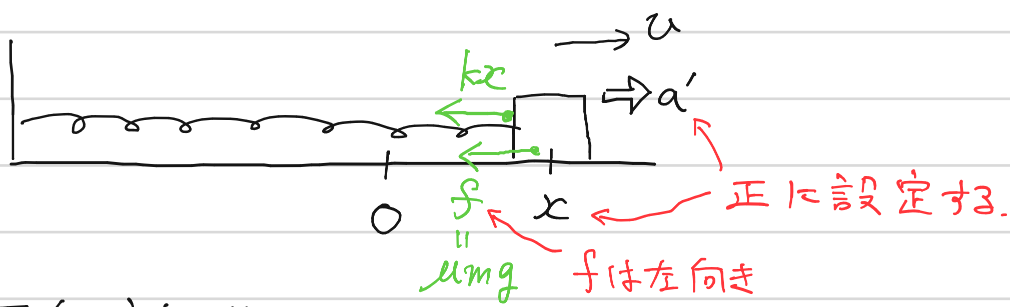
$$\Rightarrow mv^2 = kr^2 - 2kx_c r + kx_c^2$$

$$\Rightarrow mv^2 = k(r - x_c)^2$$

$$v = (r - x_c)\sqrt{\frac{k}{m}} = \underline{\left(r - \frac{\mu mg}{k}\right)\sqrt{\frac{k}{m}}}$$

(6) 右向きに運動するときは、摩擦の向きが変わっているので中心も変わる.

適当な位置 $x$ で作図をすると




運動方程式をたてると

$$ma' = -kx - \mu mg$$

$$ma' = -k\left(x + \frac{\mu mg}{k}\right)$$

この式より中心 $x_c'$ は

$$\underline{x_c' = -\frac{\mu mg}{k}}$$

($a=0$, $F=0$ となる $x$)

$\boxed{133}$ (6) 続き、

運動方程式より $\omega'$ を求める。

$$ma' = -k\left(x + \frac{\mu m g}{k}\right)$$

$$a' = -\frac{k}{m}\left(x + \frac{\mu m g}{k}\right)$$

$a' = -\omega^2 X$ と比較して

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$\therefore \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

よって

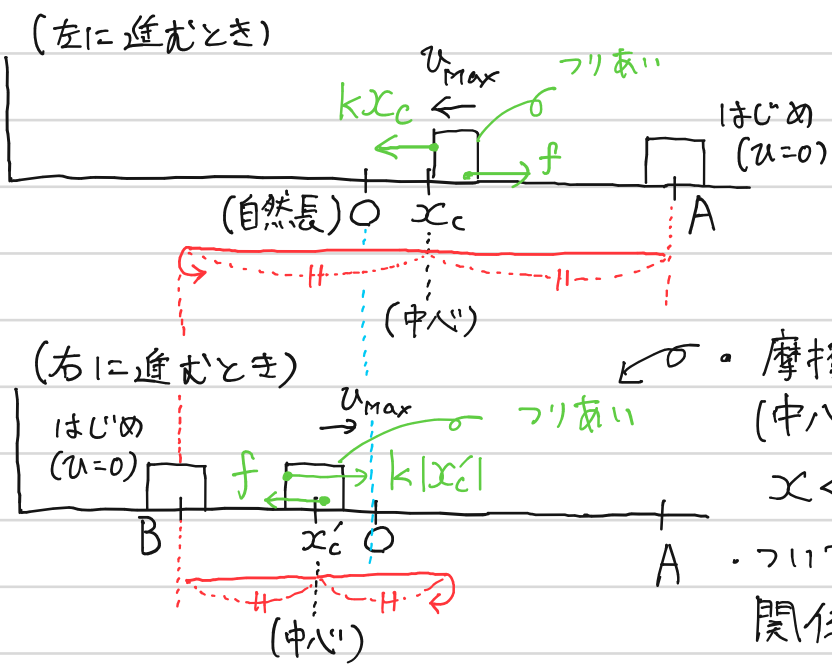
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{k}{m}}$$ ← 周期は左に移動してるときとかわらない。

Bは一番左の折り返しで、そこから反対の折り返しまでの時間が $t_2$ なので、1往復の半分である。

$$t_2 = \frac{T}{2}$$

$$= \pi\sqrt{\frac{k}{m}}$$ //

※ 式だけだと実際の運動をイメージするのは難しい。
図とグラフで考えてみよう。

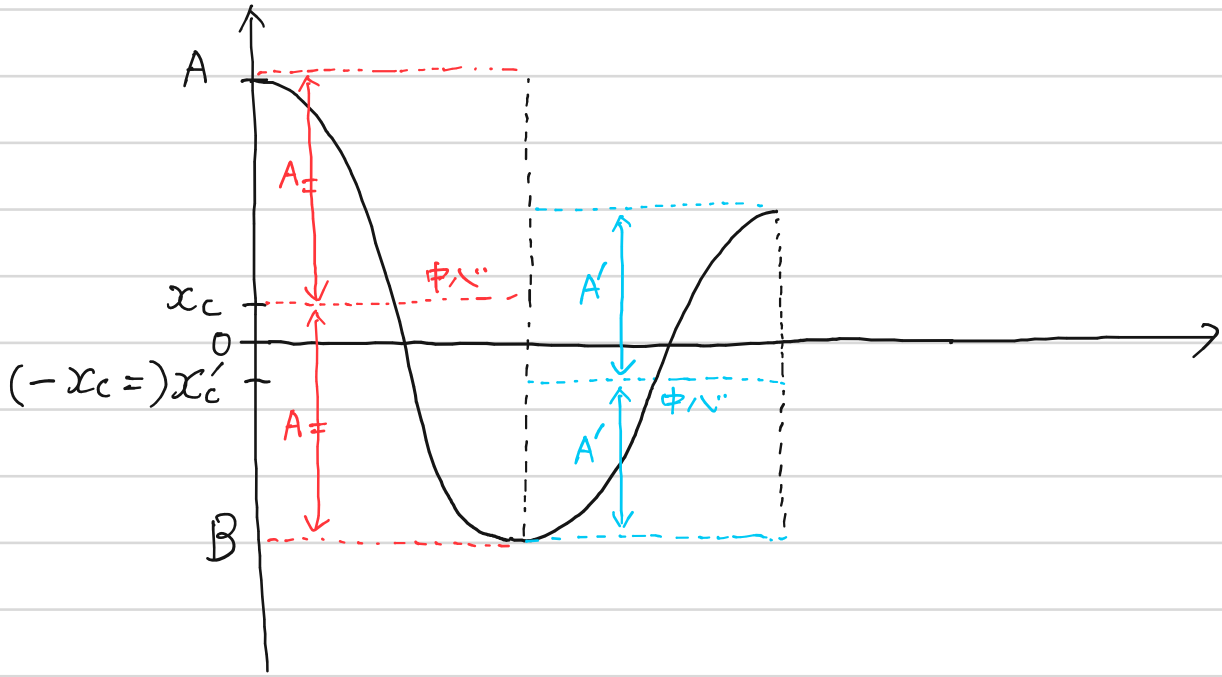



・摩擦の向きが左になったので(中心)は弾性力が右にはたらく $x<0$ の領域になるのだ。

・ついでに $x_c = |x_c'|$ という関係も見出だせる。

133 ※続き

グラフにすると




という動きをする
- 折り返すたびに振動中心の変わる単振動となるのだ.
- 周期Tが変わらない. というのは. 誘導がなくても導けるようになっておきたい。