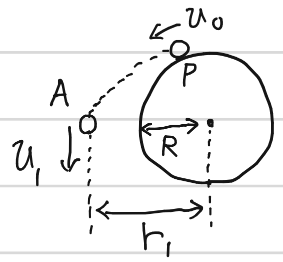
135 （いきなり模範解答のような計算をするのはきびしい、地道にゴリ押そう）

(1)

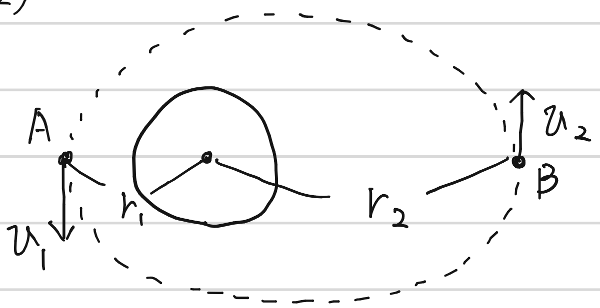


力学的エネルギーの保存より

$$\overset{(P)}{K_0+\left(-G\frac{mM}{R}\right)} = \overset{(A)}{\frac{1}{2}mv_1^2+\left(-G\frac{mM}{r_1}\right)}$$

$$\therefore K_0 = \frac{1}{2}mv_1^2 + GmM\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{r_1}\right)$$ //

(2)



(a) 面積速度一定

$$\frac{1}{2}r_1v_1 = \frac{1}{2}r_2v_2 \quad \cdots ①$$ //

(b) 力学的エネルギーの保存

$$\overset{(A)}{\frac{1}{2}mv_1^2+\left(-G\frac{mM}{r_1}\right)} = \overset{(B)}{\frac{1}{2}mv_2^2+\left(-G\frac{mM}{r_2}\right)} \quad \cdots ②$$ //

(3) ①より

$$v_1 = \frac{r_2}{r_1}v_2$$

②に代入して

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{r_2}{r_1}v_2\right)^2 - G\frac{mM}{r_1} = \frac{1}{2}mv_2^2 - G\frac{mM}{r_2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv_2^2\left(\frac{r_2^2}{r_1^2}-1\right) = GmM\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$$

135 (3) 続き

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv_2^2\left(\frac{r_2}{r_1}+1\right)\cancel{\left(\frac{r_2}{r_1}-1\right)} = \frac{GmM}{r_2}\cancel{\left(\frac{r_2}{r_1}-1\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv_2^2\left(\frac{r_2}{r_1}+1\right) = \frac{GmM}{r_2}$$

ここで Bでの運動エネルギーは $\frac{1}{2}mv_2^2$, そのときの位置エネルギーは $G\frac{mM}{r_2}$ なので求めたい式は

$$\frac{\frac{1}{2}mv_2^2}{G\frac{mM}{r^2}}$$ である。

②'を変形して

$$\frac{\frac{1}{2}mv_2^2}{G\frac{mM}{r_2}}\left(\frac{r_2}{r_1}+1\right) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{2}mv_2^2}{G\frac{mM}{r_2}} = \frac{r_1}{r_1+r_2} \quad \cdots ③$$

(4) だ円軌道では使えないが、円軌道になったら、円運動の運動方程式

$$m\frac{v^2}{r} = F$$

がたてられる。今回のモデルでたてると

$$m\frac{V^2}{r_2} = G\frac{mM}{r_2^2} \quad \cdots ④$$

となる。Vとv_2を関連づけるため③の式を使う。
④を変形して

$$\frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{GmM}{r_2} \quad \cdots ④'$$

135 (4) 続き

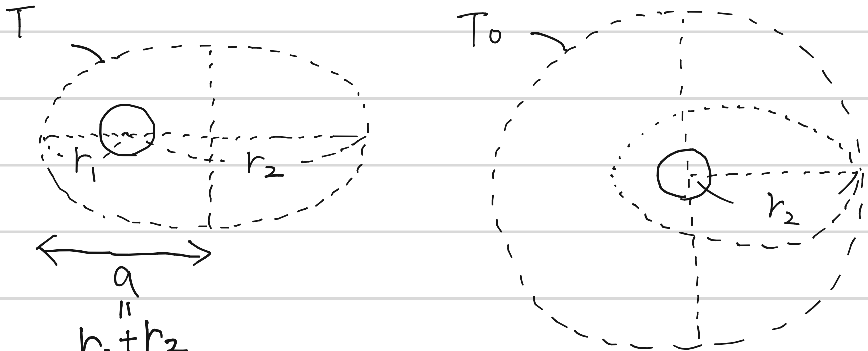
$\frac{④}{③}$ で $\frac{V}{v}$ を作ると

$$\frac{\frac{1}{2}mV^2}{\frac{\frac{1}{2}mv_2^2}{\frac{GmM}{r_2}}} = \frac{\overbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{GmM}{r_2}}^{④}}{\underbrace{\frac{r_1}{r_1+r_2}}_{③}}$$

$$\Rightarrow \frac{V^2}{v_2^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{r_1+r_2}{r_1}$$

$$\therefore \frac{V}{v_2} = \sqrt{\frac{r_1+r_2}{2r_1}} \;/\!/$$

(5) ケプラーの第3法則 $T^2=ka^3$ を用いる。
半長軸 a をまちがえないように気をつける。



$$a = \frac{r_1+r_2}{2} \qquad a' = r_2$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$T^2 = ka^3 \qquad T_0^2 = ka'^3$$

2式より $\frac{T_0^2}{T^2} = \frac{ka'^3}{ka^3}$

$$= \frac{r_2^3}{\left(\frac{r_1+r_2}{2}\right)^3} = \frac{(2r_2)^3}{(r_1+r_2)^3} \qquad \therefore \frac{T_0}{T} = \left(\frac{2r_2}{r_1+r_2}\right)^{\frac{3}{2}} \;/\!/$$