163 ポアソンの式 … 断熱変化のときのみ、成立する式。

主に変化後のPやTをだすのに使う。

$PV^{\gamma} = (一定)$ 基本の形 （γ … 比熱比のこと。定義：$\gamma = \frac{C_p}{C_v}$）

⇓ 状態方程式より　$PV = nRT \Rightarrow P = \frac{T}{V}nR$ より

$$\frac{T}{V}nR \cdot V^{\gamma} = (一定)$$

⇓

$$TV^{\gamma-1} = \frac{(一定)}{nR}$$

⇓ nが定数なら

$$TV^{\gamma-1} = (一定)$$ TとVの形

今回は、ポアソンの式を導く問題である。（必須事項ではないので、無理せず）

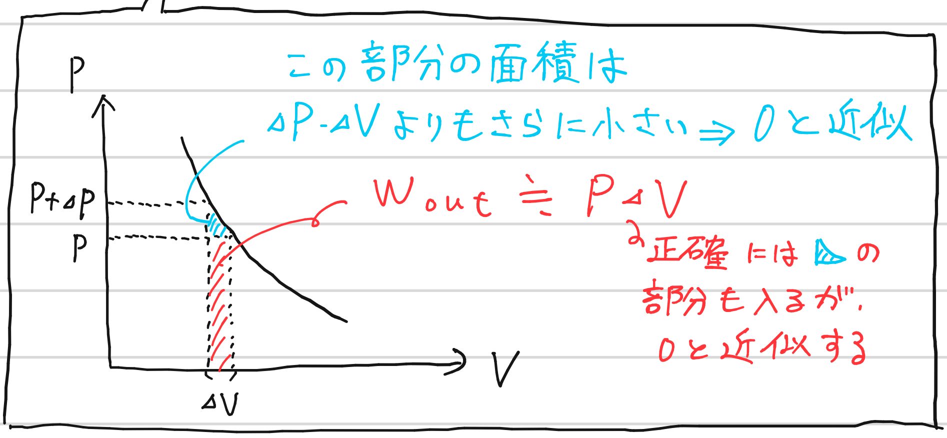
（導入）

断熱的に ΔP、ΔV、ΔT の変化があったとき、
熱力学第一法則より

$$0 = nC_v\Delta T + P\Delta V$$

$nC_v\Delta T$：$\Delta U = nC_v\Delta T$ より

$P\Delta V$：グラフの面積より



$$P\Delta V = -nC_v\Delta T$$

一方、状態方程式より

$$PV = nRT$$

163 (導入) 続き

辺々割って

$$\frac{P\Delta V}{PV} = \frac{-nC_v\Delta T}{nRT}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta V}{V} = -\frac{C_v}{R}\frac{\Delta T}{T}$$

$$\therefore \frac{\Delta T}{T} = -\frac{R}{C_v}\frac{\Delta V}{V}$$

これを積分すると

$$\int \frac{dT}{T} = \int -\frac{R}{C_v}\frac{dV}{V}$$

$$\Rightarrow \log T = -\frac{R}{C_v}\log V + C \quad (C：積分定数) \cdots ①$$

(ア) ところで、マイヤーの関係式 $C_p = C_v + R$ を C_v で割ると

$$\frac{C_p}{C_v} = \frac{C_v}{C_v} + \frac{R}{C_v}$$

$$\Rightarrow \frac{C_p}{C_v} = \underline{1 + \frac{R}{C_v}}_{\text{//(ア)}} \quad (= \gamma)$$

(イ) これより

$$\frac{R}{C_v} = \underline{\gamma - 1}_{\text{//(イ)}}$$

(ウ) これを①に代入して

$$\log T = -(\gamma-1)\log V + C$$

$$\Rightarrow \log T + (\gamma-1)\log V = C$$

$$\Rightarrow \log T + \underline{(\gamma-1)\log V}_{\text{//(ウ)}} = (一定)$$

Cは定数なので

(エ) $$\Rightarrow \log T + \log V^{\gamma-1} = (一定)$$

$$\Rightarrow \log \underline{(T \cdot V^{\gamma-1})}_{\text{//(エ)}} = (一定)$$

(オ) $\therefore \underline{TV^{\gamma-1}}_{\text{//(オ)}} = (一定)$