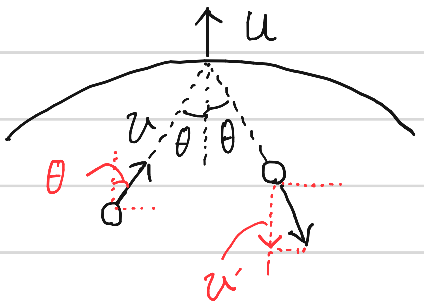
165 気体分子運動論の発展問題にあたる。(たまにでる)

(1)




(垂直成分をv'とおいているので注意)

$$e = \frac{|遠ざかる|}{|近づく|}$$ より

$$1 = \frac{v' + u}{v\cos\theta - u}$$ (弾性衝突なので $e=1$)

$$\Rightarrow v' + u = v\cos\theta - u$$

$$\therefore v' = \underline{v\cos\theta - 2u} \quad (1)$$

(2) 変化量なので、不変である平行成分は考えなくてよい。
垂直成分の速さから、運動エネルギーの変化量を求めると

$$\Delta K = \frac{1}{2}mv'^2 - \frac{1}{2}m(v\cos\theta)^2$$

$$= \frac{1}{2}m(v\cos\theta - 2u)^2 - \frac{1}{2}m(v\cos\theta)^2$$

$$= \frac{1}{2}m\left(\cancel{v^2\cos^2\theta} - 4vu\cos\theta + \underbrace{4u^2}_{\fallingdotseq 0} - \cancel{v^2\cos^2\theta}\right)$$

$$\fallingdotseq \frac{1}{2}m(-4vu\cos\theta)$$

$$= \underline{-2mvu\cos\theta}$$

(3) 半径が $r \to \Delta r$ になるまでの時間 $t$ は

$$t = \frac{\Delta r}{u}$$

一方で、この時間での分子の移動距離は

$$vt \Rightarrow \frac{v\Delta r}{u}$$ (衝突するごとに$v$はおそくなるが、その差は小さいとみなし、$v$は一定とする)

問題文の図より分子は$2r\cos\theta$すすむごとに1回衝突するので

$$\frac{\frac{v\Delta r}{u}}{2r\cos\theta} \Longrightarrow \underline{\frac{v\Delta r}{2ur\cos\theta}}$$ 回衝突するといえる。

165 続き

(4) 1回につき $-2mvu\cos\theta$ の変化があるので、回数をかけて、

$$\Delta K = -2mvu\cos\theta \cdot \frac{v\Delta r}{2ur\cos\theta}$$

$$= -\frac{mv^2\Delta r}{r}$$

(5) $\Delta V = (V+\Delta V) - V$

$$= \frac{4}{3}\pi(r+\Delta r)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$= \frac{4}{3}\pi r^3\left(1+\frac{\Delta r}{r}\right)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3$$

近似

$$\fallingdotseq \frac{4}{3}\pi r^3\left(1+3\cdot\frac{\Delta r}{r}\right) - \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$= \frac{4}{3}\pi r^3 + 4\pi r^2\Delta r - \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\therefore \Delta V = 4\pi r^2\Delta r$$

(6) 内部エネルギーUは運動エネルギーの総和なので

$$U = N_A \cdot \frac{1}{2}mv^2$$

問題文の誘導より $\Delta U = \Delta K \times$(分子数)なので

$$\Delta U = \Delta K \times N_A$$

$$= -\frac{mv^2\Delta r}{r} \cdot N_A$$

2式より、

$$\frac{\Delta U}{U} = \frac{-\frac{mv^2\Delta r}{r}\cdot N_A}{N_A\cdot\frac{1}{2}mv^2}$$

$$= -\frac{2\Delta r}{r}$$

165 続き

(7) 前問(5)より

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{4\pi r^2 \Delta r}{V}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta V}{V} = \frac{4\pi r^2 \Delta r}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{3\Delta r}{r}$$

前問(6)より

$$\frac{\Delta U}{U} = -\frac{2\Delta r}{r}$$

2式で$\frac{\Delta r}{r}$を独立させて連立すると、

$$\frac{\Delta V}{3V} = -\frac{\Delta U}{2U}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta U}{U} = -\frac{2}{3}\frac{\Delta V}{V}$$

(8) の前の文章について、

$$\Delta U = \frac{3}{2}P'V' - \frac{3}{2}PV$$

$$= \frac{3}{2}(P+\Delta P)(V+\Delta V) - \frac{3}{2}PV$$

$$= \frac{3}{2}(PV + P\Delta V + \Delta P V + \underbrace{\Delta P \Delta V}_{\fallingdotseq 0}) - \frac{3}{2}PV$$

$$= \frac{3}{2}(P\Delta V + \Delta P V)$$ としている。

(8) これを前問(7)に代入すると

$$\frac{\frac{3}{2}(P\Delta V + \Delta P V)}{\frac{3}{2}PV} = -\frac{2}{3}\frac{\Delta V}{V}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta V}{V} + \frac{\Delta P}{P} = -\frac{2}{3}\frac{\Delta V}{V}$$

$$\therefore \frac{\Delta P}{P} = -\frac{5}{3}\frac{\Delta V}{V}$$

(問題文にある通り、この式を積分して、ポアソンの式 $PV^{\frac{5}{3}} = $(一定) が求まる。)