185

$$y = A\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

において、$\omega = \frac{2\pi}{T}$, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ とすると

$$y = A\sin(\omega t - kx)$$

となる.

(ア)

$(\omega t - kx)$ を位相 θ とおき、θ が一定の位置 x を考える。

$t = t$ のとき $x = x$ で、$t = t + \Delta t$ のとき $x = \Delta x$ に移動したとする.
位相 θ が一定の位置を考えているので

$$\omega t - kx = \omega(t + \Delta t) - k(x + \Delta x)$$

$$\Rightarrow 0 = \omega\Delta t - k\Delta x$$

となり、$v_p = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ にあわせると

$$v_p = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\omega}{k} \quad \text{(ア)}$$

(イ)

問題文の指示の通り、代入、合成すると、

$$y = y_1 + y_2$$

$$= A\sin\{(\omega + \Delta\omega)t - (k + \Delta k)x\} + A\sin\{(\omega - \Delta\omega)t - (k - \Delta k)x\}$$

$$= A\sin\{(\omega t - kx) + (\Delta\omega t - \Delta kx)\} + A\sin\{\underbrace{(\omega t - kx)}_{A\text{とする}} - \underbrace{(\Delta\omega t - \Delta kx)}_{B\text{とする}}\}$$

$\boxed{185}$ (イ) 続き

$$= A\sin(A+B) + A\sin(A-B)$$
$$= 2A\cos B\sin A$$
$$= 2A\cos\underbrace{(\Delta\omega t - \Delta k x)}_{\text{(イ)}}\sin(\omega t - kx)$$

(ウ) $2A\cos(\Delta\omega t - \Delta kx)$ の変動の速さ v_g を考える.

(イ)と同様に考えて

$$(t=t,\ x=x\text{の位相}) = (t=t+\Delta t,\ x=x+\Delta x\text{の位相})$$
$$\Delta\omega t - \Delta kx = \Delta\omega(t+\Delta t) - \Delta k(x+\Delta x)$$
$$\Rightarrow\quad 0 = \Delta\omega\Delta t - \Delta k\Delta x$$
$$\Rightarrow\quad \frac{\Delta x}{\Delta t} = \underbrace{\frac{\Delta\omega}{\Delta k}}_{\text{(ウ)}}\ (=v_g)$$

(エ) 位相速度 $v_p = \frac{\omega}{k}$ が等しいことから,

$$v_{p1} = v_{p2}$$
$$\Rightarrow \frac{\omega_1}{k_1} = \frac{\omega_2}{k_2}$$
$$\Rightarrow \frac{\omega+\Delta\omega}{k+\Delta k} = \frac{\omega-\Delta\omega}{k-\Delta k}$$
$$\Rightarrow (\omega+\Delta\omega)(k-\Delta k) = (\omega-\Delta\omega)(k+\Delta k)$$
$$\Rightarrow \cancel{\omega k} - \omega\Delta k + \Delta\omega k - \cancel{\Delta\omega\Delta k} = \cancel{\omega k} + \omega\Delta k - \Delta\omega k - \cancel{\Delta\omega\Delta k}$$
$$\Rightarrow \Delta\omega k = \omega\Delta k$$
$$\therefore \frac{\omega}{k} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$$
$$\therefore \underbrace{v_p = v_G}_{\text{(エ)}}$$

185 続き

(オ) 船が作る波なので(ニ)の条件 $v_{p1}=v_{p2}$ とちがう条件になることに注意.

$$\omega=\sqrt{gk}$$

から速度の関係を考える.

$$\omega+\Delta\omega=\sqrt{g(k+\Delta k)}$$

と言え. $\Delta\omega$ について解くと、

$$\omega+\Delta\omega=\sqrt{gk}\left(1+\frac{\Delta k}{k}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\fallingdotseq\sqrt{gk}\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{\Delta k}{k}\right)$$

$$=\omega\left(1+\frac{\Delta k}{2k}\right)$$

これより

$$\Delta\omega=\frac{\omega}{2k}\Delta k$$

$$\therefore\ \underbrace{\frac{\omega}{k}}_{v_p}=2\cdot\underbrace{\frac{\Delta\omega}{\Delta k}}_{v_G}$$

$$\therefore\ \frac{v_G}{v_p}=\frac{1}{2}$$ //(オ)