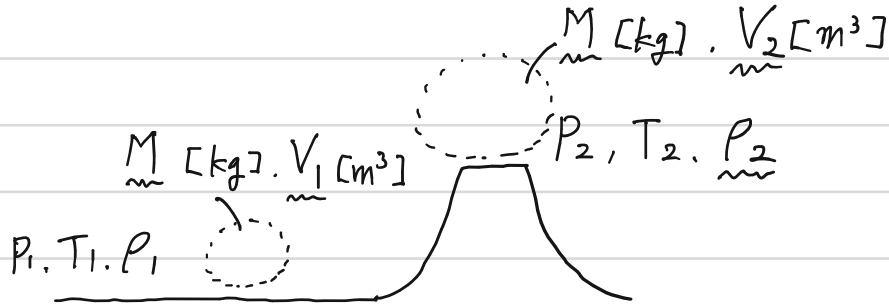
$\boxed{145}$ 解答の解き方とちがってしまいましたが、こちらの方が直感的かなと思うので紹介します。

$M\,[kg]$ の気体を設定、追跡して考えてみる。
頂上だと膨張しているはずである。$V_1 \to V_2$ になったとする。



〜 は不明数

状態方程式より

$$P_1 V_1 = nRT_1 \qquad P_2 V_2 = nRT_2$$

密度と体積と質量の関係より

$$M = \rho_1 V_1 \qquad M = \rho_2 V_2$$

→ 連立して V を消去

$$P_1 \cdot \frac{M}{\rho_1} = nRT_1 \qquad P_2 \frac{M}{\rho_2} = nRT_2$$

共通している文字を集めて消去する

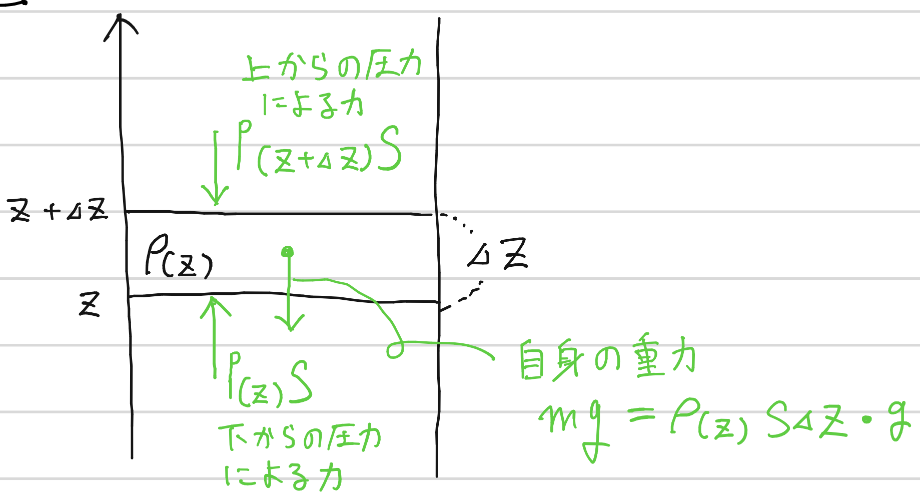
$$\frac{M}{nR} = \frac{\rho_1 T_1}{P_1} \qquad \frac{M}{nR} = \frac{\rho_2 T_2}{P_2}$$

よって

$$\frac{\rho_1 T_1}{P_1} = \frac{\rho_2 T_2}{P_2} \Rightarrow \therefore \rho_2 = \frac{P_2 T_1}{P_1 T_2}\rho_1$$

※ 解説は、物質量 $n\,[mol]$ と密度と体積の関係から n を消去して、その後、共通部分を消去している。
※ 別解では $n\,[mol]$ を設定、追跡して、共通部分を消去している。

146



(ア)

力のつりあいより

$$P_{(z+\Delta z)}S+\rho_{(z)}S\Delta z\cdot g=P_{(z)}S$$

$$\Rightarrow P_{(z+\Delta z)}S-P_{(z)}S=\underline{-\rho_{(z)}Sg\Delta z}_{/\!/}\ (ア)$$

(イ) 状態方程式より

$$PV=nRT$$

$$\Rightarrow P_{(z)}\cdot S\Delta z=\frac{\rho_{(z)}S\Delta z}{m}\cdot RT$$

$$\Rightarrow \underline{P_{(z)}=\frac{RT}{m}\rho_{(z)}}_{/\!/}\ (イ)$$

(ウ)

(イ)式を解釈すると

$$P_{(z)}=\frac{RT}{m}\rho_{(z)}$$ ← Pの関数は $\frac{RT}{m}$ の係数をつけた ρの関数といえる.

$\boxed{146}$ (ウ)続き

これを用いて(ア)式をρの関数にすると.

$$\frac{RT}{m}\rho_{(z+\Delta z)}S-\frac{RT}{m}\rho_{(z)}S=-\rho_{(z)}Sg\Delta z$$

$$\Rightarrow \frac{RTS}{m}\left\{\rho_{(z+\Delta z)}-\rho_{(z)}\right\}=-\rho_{(z)}Sg\Delta z$$

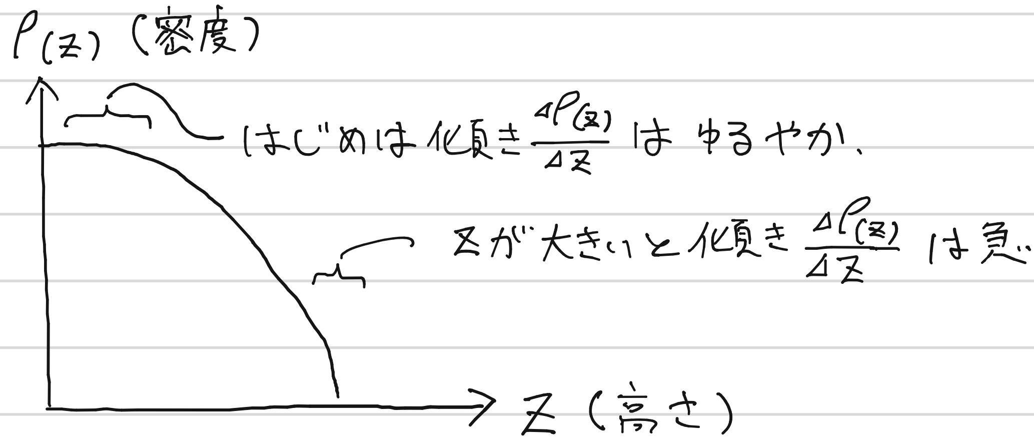
$$\Rightarrow \frac{RTS}{m}\Delta\rho_{(z)}=-\rho_{(z)}Sg\Delta z$$

$$\therefore \frac{\Delta\rho(z)}{\Delta z}=\underline{\underline{-\frac{mg}{RT}\rho(z)}} \quad (ハ)$$

※補足

これは高さzによる密度の変化率(傾き)を示す.

これをもとにグラフを書くと.



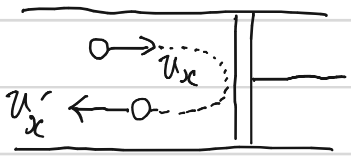
・傾きが負なので、上空程、密度が小さいといえる。

・また、上空程、急激に密度が小さくなるといえる。

これを考えたい問題だったのだ

$\boxed{147}$

(ア)



弾性衝突なので $e=1$ である。

$$e = \frac{|遠ざかる|}{|近づく|}$$

$$1 = \frac{v_x' - v_0}{v_x + v_0}$$ ← ※ v_x', v_x は「速さ」なので正負の符合はつかず大きさで考えてよい

$\therefore v_x' = \underline{v_x + 2v_0}$ // (ア)

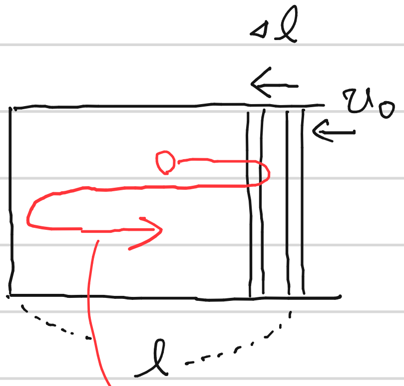
(イ)

誘導では $v_x'^2 - v_x^2$ を計算せよといっている。

$$v_x'^2 - v_x^2 = (v_x + 2v_0)^2 - v_x^2$$
$$= 4v_x v_0 + 4v_0^2$$
$$= 4v_x \left(v_0 + \frac{v_0^2}{v_x}\right)$$
$$\fallingdotseq \underline{4v_x v_0}$$ // (イ) $\left(\because v_x \gg v_0 より \frac{v_0^2}{v_x} \fallingdotseq 0\right)$

$\boxed{147}$ 続き

(ウ)



ピストンがΔlうごくのにかかる時間Δtは

$$\Delta t = \frac{\Delta l}{v_0}$$

この間、分子の進む距離は

$$v_x \cdot \Delta t = \frac{v_x \Delta l}{v_0}$$

近似的に分子が$2l$うごく間に分子が1回衝突するといえるので、ぶつかる回数は

$$\frac{\frac{v_x \Delta l}{v_0}}{2l} = \frac{v_x \Delta l}{2 l v_0} \text{[回]} \quad /\!/ \text{(ウ)}$$

(エ) (イ)より1回につき、v_x^2が$4 v_x v_0$増加するとわかっているので、

$$\Delta v_x^2 = 4 v_x v_0 \cdot \frac{v_x \Delta l}{2 l v_0}$$

$$= \frac{2 v_x^2 \Delta l}{l} \quad /\!/ \text{(エ)}$$

(オ) (エ)の増加分が3方向にわかれて与えられるので、$\overline{v_x^2}$の増加$\Delta(\overline{v_x^2})$は

$$\Delta(\overline{v_x^2}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2 v_x^2 \Delta l}{l} = \frac{2 \overline{v_x^2} \Delta l}{3 l} \quad /\!/ \text{(オ)}$$

$\boxed{147}$ 続き

(カ) ボルツマン定数の定義より,

$$\frac{1}{2}m\overline{v_x^2} = \frac{1}{2}kT \quad (参考\boxed{143})$$

$$\Rightarrow \overline{v_x^2} = \frac{k}{m}T$$

これより

$$\Delta(\overline{v_x^2}) = \frac{k}{m}\Delta T$$

(オ)の式を代入して,

$$\frac{2\overline{v_x^2}\Delta l}{3l} = \frac{k}{m}\Delta T$$

$$\Delta T = \frac{m}{k}\cdot\frac{2\overline{v_x^2}\Delta l}{3l}$$

$\overline{v_x^2} = \frac{k}{m}T$ より

$$\Delta T = \frac{2\Delta l}{3l}T$$

// (カ)