148

(1) 理想気体では

(内部エネルギー) = (全分子の運動エネルギーの和)

と考えてよい。

また、温度と運動エネルギーには相関があるので

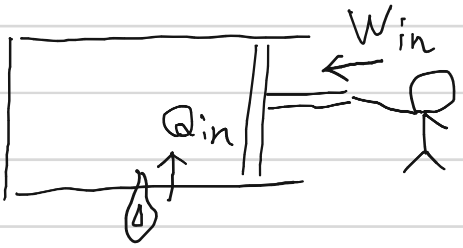
(内部エネルギー)は温度が高い程大きい(増加する(ア))

といえる

(2) 熱力学第一法則には、2つの表記の仕方がある。

(その1) $\Delta U = Q_{in} + W_{in}$ …①

(イメージ)



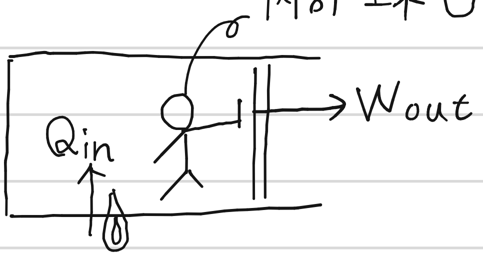
2つの要素で内部エネU(温度)をUP

$\Rightarrow \Delta U = Q_{in} + W_{in}$

(温度上昇) (もらった分)

(その2) $Q_{in} = \Delta U + W_{out}$ …①'

(イメージ)



内部エネは、QをもらってW_{out}仕事をする。あまった分をたくわえる。

(たくわえが温度上昇)

$\Rightarrow Q_{in} = \Delta U + W_{out}$

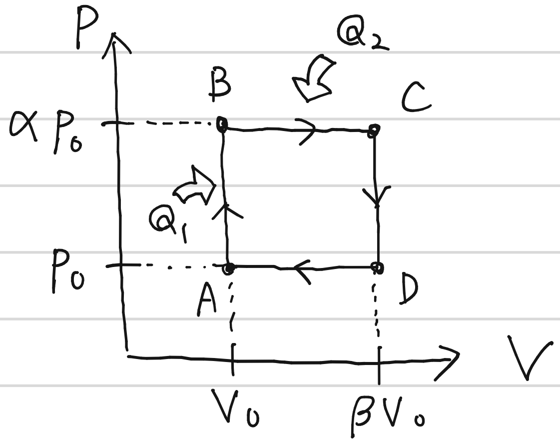
(もらった分) (あまり) (使った分)

(ウ) 気体が外にする仕事

2式を比べて、

$W_{out} = -W_{in}$ (イ) といえる

149 熱サイクルでは情報が多くなるので、エネルギー表を書くようにする。



①
$U=\frac{3}{2}nRT$
$(=\frac{3}{2}PV)$
で計算

②
グラフの面積で計算

③
⇒ 合計して Q_{in}

（エネルギー表）

	Q_{in} =	ΔU +	W_{out}
A→B	$+Q_1$	U_B-U_A $=\frac{3}{2}\alpha P_0V_0-\frac{3}{2}P_0V_0$	0
B→C	$+Q_2$	U_C-U_B $=\frac{3}{2}\alpha P_0\beta V_0-\frac{3}{2}\alpha P_0V_0$	$\alpha P_0\cdot(\beta V_0-V_0)$
C→D			
D→A			
合計			

}（ア）の式
}（イ）〜（エ）の式

（ア）A→B の式をたてると

$$Q_1=\underline{\frac{3}{2}(\alpha-1)P_0V_0}\ /\!/\ \text{(ア)}$$

（イ）（ウ）（エ）B→C の式をたてると

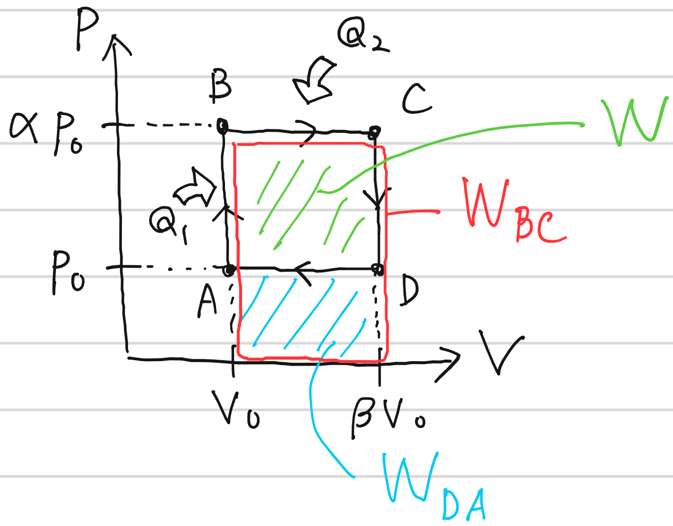
$$Q_2=\underbrace{\underline{\frac{3}{2}\alpha(\beta-1)P_0V_0}\ /\!/\ \text{(イ)}}_{\Delta U}+\underbrace{\underline{\alpha\cdot(\beta-1)P_0V_0}}_{W_{out}}\ \text{(ウ)}$$

$$\therefore\ Q_2=\underline{\frac{5}{2}\alpha(\beta-1)P_0V_0}\ /\!/\ \text{(エ)}$$

$\boxed{149}$ 続き

(オ)(カ)　熱効率は

$$\boxed{e = \frac{W_{out}\text{の全部の和}}{Q_{in}\text{の}+\text{の和}}}$$



エネルギー表でこの式について考えてみる。

	Q_{in} =	ΔU +	W_{out}
A→B	$+Q_1$	$U_B - U_A$ $= \frac{3}{2}\alpha P_0 V_0 - \frac{3}{2}P_0 V_0$	0
B→C	$+Q_2$	$U_C - U_B$ $= \frac{3}{2}\alpha P_0 \beta V_0 - \frac{3}{2}\alpha P_0 V_0$	$\underline{\alpha P_0 \cdot (\beta V_0 - V_0)}$ W_{BC}
C→D	Qは負 ⟸	温度が下がるので ΔUは負	0
D→A	Qは負 ⟸	温度が下がるので ΔUは負	$-W_{DA}$　合計
合計			$W_{BC} - W_{DA}$

Q_{in}の+だけを合計したら $+Q_1 + Q_2$

⇒ グラフのWの部分

⇒よって $e = \dfrac{W}{Q_1 + Q_2}$ となる。

$\boxed{149}$ (オ)(カ)続き

Wの部分をグラフから求めると.

$$W = (\alpha P_0 - P_0)(\beta V_0 - V_0)$$
$$= \underline{(\alpha - 1)(\beta - 1)P_0V_0} \text{ // (オ)}$$

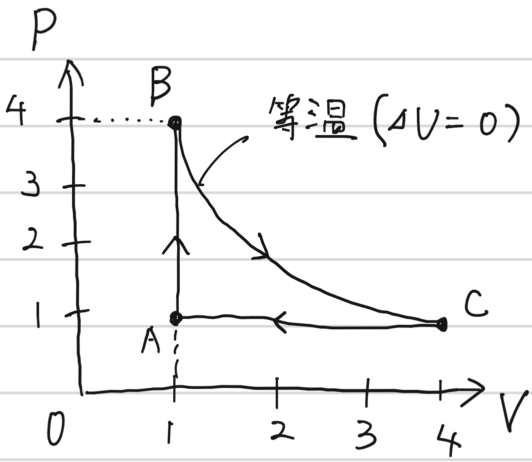
(ア)と(エ)で求めたQ_1. Q_2を熱効率の式に代入して.

$$e = \frac{W}{Q_1 + Q_2}$$

$$= \frac{(\alpha - 1)(\beta - 1)\ P_0V_0}{\frac{3}{2}(\alpha - 1)P_0V_0 + \frac{5}{2}\alpha(\beta - 1)\ P_0V_0}$$

$$= \underline{\frac{2(\alpha - 1)(\beta - 1)}{3(\alpha - 1) + 5\alpha(\beta - 1)}} \text{ // (カ)}$$

150 エネルギー表を書いて情報を整理しよう。



ポイント

PV=nRTの式より
P×V が大きい程、温度が高い

→ $T_B = T_C > T_A$ である

(1) (ア)(イ)(ウ)

	③ Q_{in}	=	① ΔU	+	② W_{out}
A→B	Q_{in}は (+)(吸収)〃(ウ)	⇐	温度があがるので (+)(増加)〃(ア)		グラフより 0〃(イ)

①、②、③は考える順番

(2) (エ)(オ)(カ)
(3) (キ)(ク)(ケ)

(1)と同様にうめていく。

	Q_{in}	=	ΔU	+	W_{out}
A→B	Q_{in}は (+)(吸収)〃(ウ)	⇐	温度があがるので (+)(増加)〃(ア)		グラフより 0〃(イ)
B→C	(+)(吸収)〃(カ)	⇐	0 (変化しない)〃(エ)		(+)(仕事をする)〃(オ)
C→A	(−)(放出)〃(ケ)	⇐	(−) (減少)〃(キ)		(−)(負の仕事をする) (⇒外から仕事をされる)〃(ク)

150 続き

エネルギー表で考えてみる.

①

	Q_{in}	=	ΔU	+	W_{out}
A → B	ΔU_{AB}	⟸	ΔU_{AB}	+	0
B → C	$+W_{BC}$	⟸	0	+	W_{BC}
合計	$\Delta U_{AB}+W_{BC}$				

②

	Q_{in}	=	ΔU	+	W_{out}
A → C	$\Delta U_{AC}+W_{AC}$	⟸	ΔU_{AC}	+	W_{AC}

ここで

$\Delta U_{AB}+W_{BC}$ と $\Delta U_{AC}+W_{AC}$ をくらべる.

(①のQ_{in}トータル)　(②のQ_{in}トータル)

最終的な温度が同じなので

$$\Delta U_{AB}=\Delta U_{AC}$$

グラフの面積より

$$W_{BC}>W_{AC}$$

これらより

$$\Delta U_{AB}+W_{BC} > \Delta U_{AC}+W_{AC}$$

(①のQ_{in}トータル)　(②のQ_{in}トータル)

よって ①の方が Q_{in} は大きい//

151　エネルギー表を書いてみる

	Q_{in} =	ΔU +	W_{out} (グラフより)
A→B	0 (断熱)	(+) (断熱圧縮は温度あがる)	(−)
B→C	(+) (1)	⇐ (+) ※ P×V が大きくなる	(+)
C→D	0 (断熱)	(−) (断熱膨張は温度さがる)	(+)
D→A	(−) (2)	⇐ (−) ※ P×V が小さくなる	(−)
サイクル合計	⇓ $Q_{トータル}$	0 (元の温度になっているので)	$W_{トータル}$

$\Delta U_{トータル}$ が 0 なので $Q_{トータル} = W_{トータル}$

(1) B→Cの過程で受けとる
(よって $Q_{in(BC)} = +Q_1$)

(2) D→Aの過程で放出する
(よって $Q_{in(DA)} = -Q_2$)

(3) サイクル合計の式は

$$Q_{トータル} = 0 + W_{トータル}$$

$$\Rightarrow Q_1 - Q_2 = 0 + W$$

(4)

$$e = \frac{W_{トータル}}{+のQ_{in}} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$$

$\boxed{152}$

(ア) ボルツマン定数の定義より

$$\frac{1}{2}m\overline{v^2} = \underline{\frac{3}{2}kT} \text{ // (ア)}$$

(イ) 問題文より

$$U = \underbrace{\sum\frac{1}{2}mv^2}_{\text{全分子の運動エネルギーを合計したい、という意味}} = N\cdot\frac{1}{2}m\overline{v^2}$$

結果こうなる。

これと(1)の式をあわせて

$$U = \underline{N\cdot\frac{3}{2}kT} \text{ // (イ)}$$

(ウ) $k = \dfrac{R}{N_A}$ もボルツマン定数の定義である。

ここで n に関して考えると

$$n = \frac{N}{N_A}$$

これをボルツマン定数で示すと

$$n = \frac{N}{\frac{R}{k}} = \frac{kN}{R}$$

$$\Rightarrow k = \frac{R}{N}n$$

これを(2)の式に代入して

$$U = N\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{R}{N}nT$$

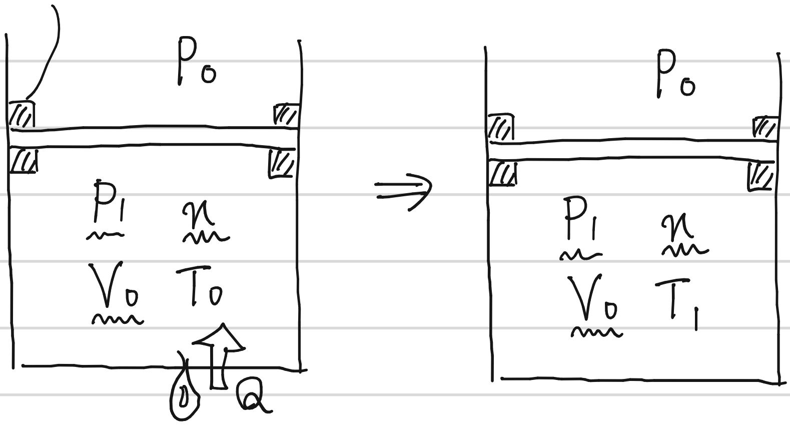
$$= \underline{\frac{3}{2}nRT} \text{ // (ウ)}$$

← この式より Uは絶対温度Tの関数

(P. Vは無関係)

153 ・力学の式をたてるのを忘れがち。常に意識しておこう。

(1) 固定しているので力学の式は立てられない。



〜は不明数

熱力学第一法則 $Q_{in} = \Delta U + W_{out}$ より

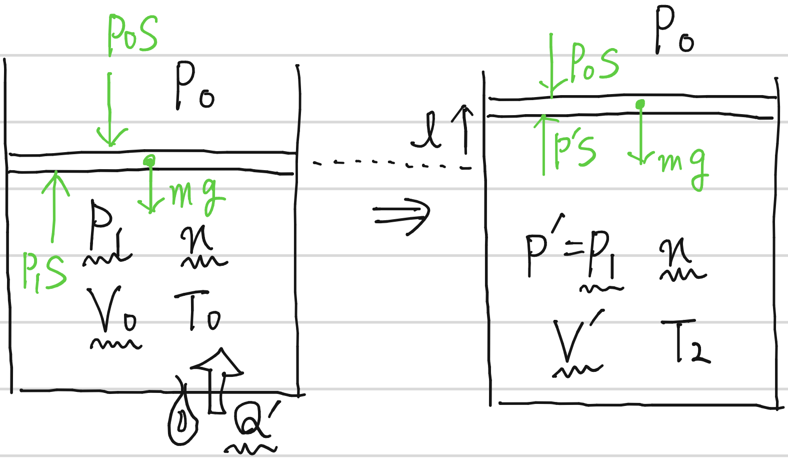
$Q = \Delta U + 0$ $\therefore \Delta U = Q$ //

(※一方でこの条件より 定積モル比熱 C_v をだせる。

$Q = nC_v\Delta T$ (← モル比熱の定義 1molの1℃分がCより)

$\therefore C_v = \dfrac{Q}{n(T_1 - T_0)}$ ・・・① ((2)で使う))

(2)



力のつりあいより

前 $P_1S = P_0S + mg$

$\therefore P_1 = P_0 + \dfrac{mg}{S}$

後 $P'S = P_0S + mg$

$\therefore P' = P_0 + \dfrac{mg}{S}$

⇒ 等圧変化なのだ

(a) 単原子分子と書いてないので $\Delta U = \dfrac{3}{2}nR\Delta T$ が使えない。

このときは 定積モル比熱 C_v を使った式

$\Delta U = nC_v\Delta T$

で考える。

定積モル比熱 C_v は Q ではなく、ΔU をだすために使うのが計算のテクニック。定積変化でなくても $\Delta U = nC_v\Delta T$ は成立。

153 (2) (a) 続き

①式 $C_V = \dfrac{Q}{n(T_1 - T_0)}$ を用いてΔUを考えると

$$\Delta U = n C_V (T_2 - T_0) \quad (\because \Delta U = n C_V \Delta T)$$

$$= n \cdot \frac{Q}{n(T_1 - T_0)} \cdot (T_2 - T_0)$$

$$\therefore \Delta U = \underline{\frac{T_2 - T_0}{T_1 - T_0} Q}_{//}$$

※付属の解説のように，ぱっと出す形はめずらしい。
C_Vを使ってΔUを求めることに慣れておこう。

(b) 図の右に書いたつりあいの式より，今回の変化は定圧変化であり，そのときの圧力P_1は

$$P_1 = P_0 + \frac{mg}{S}$$

となる。定圧変化のときは特別に $W_{out} = P\Delta V$ が成立するので

$$W_{out} = P_1 \cdot S l$$

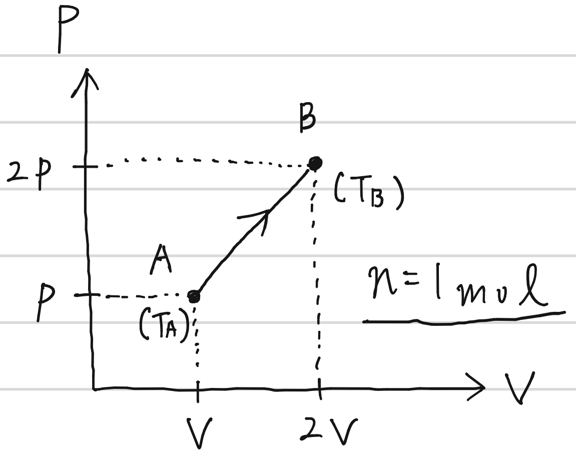
$$= \left(P_0 + \frac{mg}{S}\right) \cdot S l$$

$$= \underline{P_0 S l + mg l}_{//}$$

(C) 熱力学第1法則の式 $Q_{in} = \Delta U + W_{out}$ に (a) (b) の答えを代入して，

$$Q_{in} = \underline{\frac{T_2 - T_0}{T_1 - T_0} Q + P_0 S l + mg l}_{//}$$

$\boxed{154}$



(1) 状態方程式より

$\boxed{A}$ $PV = 1 \cdot RT_A$

$\therefore T_A = \dfrac{PV}{R}$ (ア)

$\boxed{B}$ $2P \cdot 2V = 1 \cdot RT_B$

$\therefore T_B = \dfrac{4PV}{R}$ (イ)

(2) $\Delta U = \dfrac{3}{2} nR\Delta T$ より

$\Delta U = \dfrac{3}{2} \cdot 1 \cdot R \left(\dfrac{4PV}{R} - \dfrac{PV}{R} \right)$ ($\because \Delta T = T_B - T_A$)

$\therefore \Delta U = \dfrac{9}{2} PV$ (ウ)

グラフの面積を求めて

$W_{out} = (P + 2P) \cdot (2V - V) \cdot \dfrac{1}{2}$ (台形の面積)

$= \dfrac{3}{2} PV$ (エ)

熱力学第一法則より

$Q_{in} = \Delta U + W_{out}$

$= \dfrac{9}{2} PV + \dfrac{3}{2} PV$

$= 6PV$ (オ)

(3) モル比熱 C … 1 mol が 1 K 上昇するのに必要な Q が C.

$\Rightarrow Q = nC\Delta T$ (定義式)

(2) の情報より $Q_{in} = 6PV$, かつ, $Q_{in} = nC\Delta T$ なので

$nC\Delta T = 6PV$

$\Rightarrow 1 \cdot C \cdot \left(\dfrac{4PV}{R} - \dfrac{PV}{R} \right) = 6PV$ ($\Delta T = T_B - T_A$)

$\therefore C = 2R$ (カ)

155

問題文の前半について

定積変化の熱力学第一法則より

$$Q_{in} = \Delta U + W_{out}$$

$$\Rightarrow Q_{in} = \Delta U + 0$$

モル比熱の定義より

$$Q_{in} = nC_V \Delta T$$

2式より

$$\Delta U = nC_V \Delta T$$

ということを言っている。

そして、$\Delta U = nC_V \Delta T$ は他の変化(等圧など)でも使える。

(ア) ピストンが自由に動く ⇒ 力のつりあいより等圧変化である。

熱力学第一法則の式をたてると、

$$Q_{in} = \Delta U + W_{out}$$

モル比熱の定義　$\Delta U = nC_V \Delta T$ はいつでも使える　等圧変化なら $W = P\Delta V$

$$\Rightarrow nC_p \Delta T = nC_V \Delta T + P\Delta V$$

$$\Rightarrow nC_p(T' - T) = \underline{nC_V(T' - T)}_{(ア)} + P(V' - V)$$

(イ) 状態方程式より

前 $PV = nRT$　　後 $PV' = nRT'$

後 − 前 として、

$$P(V' - V) = \underline{nR(T' - T)}_{(イ)}$$

(ウ) これを(イ)の式に代入して

$$nC_p(T' - T) = nC_V(T' - T) + nR(T' - T)$$

$$\therefore \underline{C_p = C_V + R}_{(ウ)}$$

(マイヤーの関係式)

(これはいつでも成立する)

$\boxed{156}$ (単原子分子理想気体の内部エネ)=(運動エネルギーの総和)
という関係を用いる。

(1) 内部エネルギーUが

$$U=\frac{3}{2}nRT$$

であり、分子の総数Nが

$$N=nN_A$$

なので分子1個あたりの運動エネルギーの平均$\overline{K}$は

$$\overline{K}=\frac{U}{N}$$

$$=\frac{\frac{3}{2}nRT}{nN_A}=\underline{\frac{3RT}{2N_A}}_{\#}$$

※おそらく解説はボルツマン定数kの定義より

$$\overline{K}=\frac{3}{2}kT\ ,\quad k=\frac{R}{N_A}\ ,$$ として求めている。

ただし、このことは受験生はあまり知らないはずなので
ノートのように解けばよいだろう。

(2) $U=\frac{3}{2}nRT$ より

$$\underline{U=\frac{3}{2}RT}_{\#}$$

(3) テクニック $\Delta U=nC_V\Delta T$ を使えば

$$\frac{3}{2}R\Delta T=1\cdot C_V\cdot\Delta T\qquad \therefore\ \underline{C_V=\frac{3}{2}R}_{\#}$$

※ 定義通り立式すれば 1mol が $T\to T+1$ になったとき、

$$\underset{(Q)}{nC_V\Delta T}=\Delta U+W_{out}$$

$$\Rightarrow 1\cdot C_V\cdot 1=\underbrace{\frac{3}{2}R(T+1)-\frac{3}{2}RT}_{\Delta U}\ \underbrace{+0}_{W_{out}}\qquad \therefore\ \underline{C_V=\frac{3}{2}R}_{\#}$$

$\boxed{156}$ 続き

(4) マイヤーの関係式 $C_p = C_v + R$ より

$$C_p = \frac{3}{2}R + R$$

$$\therefore C_p = \underline{\frac{5}{2}R}_{//}$$

(5) $\gamma = \dfrac{C_p}{C_v}$ より

$$\gamma = \frac{\frac{5}{2}R}{\frac{3}{2}R} = \underline{\frac{5}{3}}_{//}$$

※ γ は 断熱変化の式 (ポアソンの式)

$$PV^{\gamma} = (一定)$$

にでてくる。