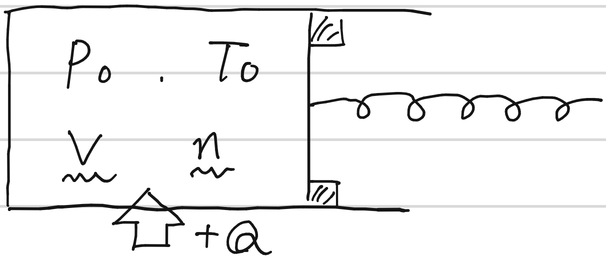
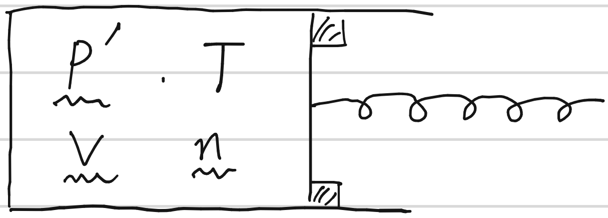
157

(1) ピストンを固定しているので、力のつりあいの式はたてられない。





〜は不明数

状態方程式より

前 $P_0 V = nRT_0$ 　　　 後 $P'V = nRT$

辺々割って

$$\frac{P_0 V}{P' V} = \frac{nRT_0}{nRT}$$

$$\Rightarrow \frac{P_0}{P'} = \frac{T_0}{T} \qquad \therefore P' = \frac{T}{T_0} P_0 \text{ // (ア)}$$

※ ボイル・シャルルを使うのはさける。状態方程式をたてる習慣をつけよう。

熱力学第一法則より

$$Q_{in} = \Delta U + W_{out}$$

$$\Rightarrow +Q = \Delta U + 0$$

$$\therefore \Delta U = Q \text{ // (イ)}$$

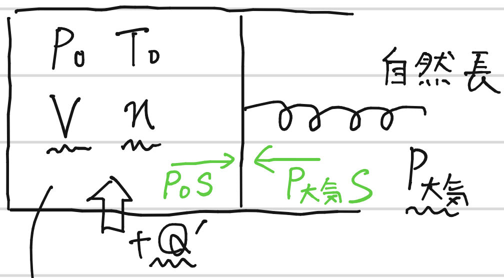
※ この変化より定積モル比熱 C_v をもとめると

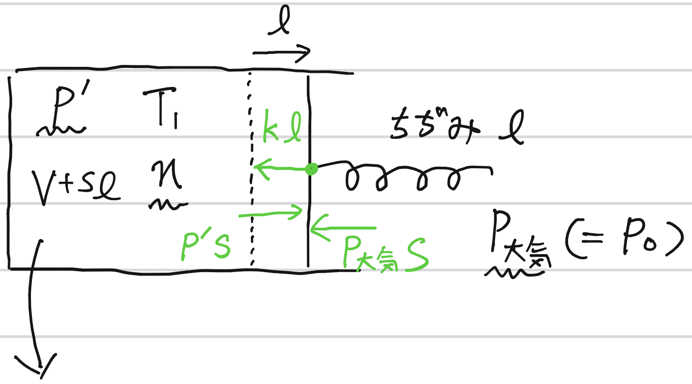
$$Q = nC_v(T - T_0)$$

$$\therefore C_v = \frac{Q}{n(T - T_0)}$$ … (2) 以降 ΔU をだすのに使う。

$\boxed{157}$ 続き

(2) 力のつりあいを忘れずにたてる





つりあいより

$$P_0S = P_{大気}S$$

$$\Rightarrow P_{大気} = P_0$$

つりあいより

$$P'S = kl + P_{大気}S$$

$$\Rightarrow P' = \frac{kl}{S} + P_0 \cdots ① \quad (\because P_{大気} = P_0)$$

$\boxed{\Delta U について}$

単原子分子理想気体と書いてないので $\Delta U = \frac{3}{2}nR\Delta T$ は使えない。

$\Rightarrow \Delta U = nC_v\Delta T$ を用いる。

C_v は(1)の ※ より $C_v = \dfrac{Q}{n(T-T_0)}$ である。

$\Delta U = nC_v\Delta T$ の式をたてると

$$\Delta U = nC_v(T_1 - T_0)$$

$$= n\cdot\frac{Q}{n(T-T_0)}(T_1-T_0)$$

$$= \underline{\frac{T_1-T_0}{T-T_0}Q} \quad (ウ)$$

$\boxed{W について}$ 考え方は2つ、どちらも大切。

考え方① エネルギー収支

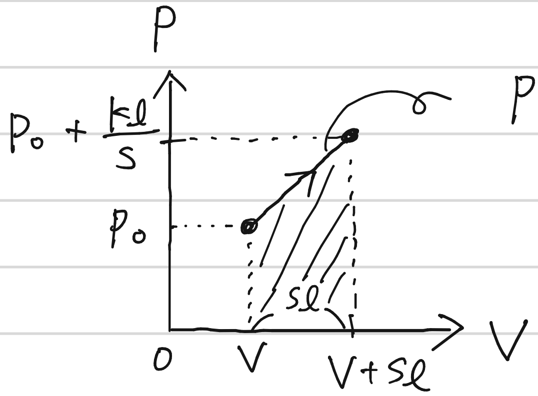
(気体がした仕事) = (気体以外が得るエネルギー)

$$W_{out} = \underbrace{\frac{1}{2}kl^2}_{ばねのエネ} + \underbrace{P_0Sl}_{大気のW_{in}} + \underbrace{0}_{ピストンのエネは増えない(運動エネや位置エネ)}$$

$$\therefore W_{out} = \underline{\frac{1}{2}kl^2 + P_0Sl} \quad (エ)$$

$\boxed{157}$ (2) 続き

考え方② $P-V$グラフの面積（こちらの方がおすすめ）



$P = P_0 + \frac{kx}{S}$ なので

xの増加に伴い、直線的に変化する。

⇒ xの増加とVの増加は連動しているので

Vの増加に伴い、直線的にPは増加といえる。

面積がW_{out}となるので

$$W_{out} = \left(P_0 + P_0 + \frac{kl}{S}\right) \cdot Sl \cdot \frac{1}{2} \quad \text{（台形の面積）}$$

$$= \underline{P_0 Sl + \frac{1}{2}kl^2} \ (\text{エ})$$

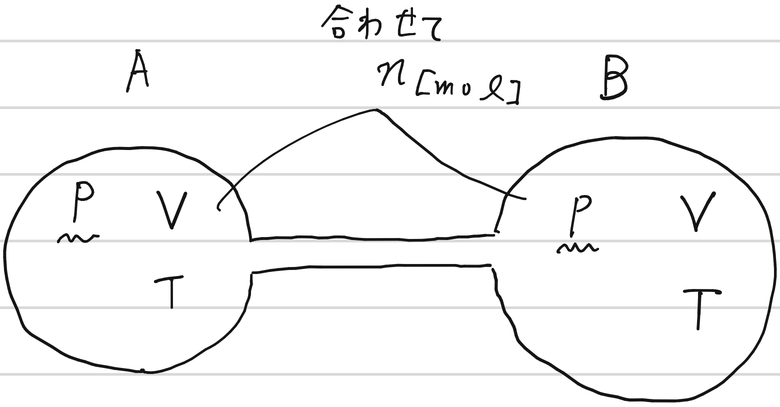
$\boxed{Q\text{について}}$

$Q_{in} = \Delta U + W_{out}$ より

$$Q_{in} = \underline{\frac{T_1 - T_0}{T - T_0} Q + P_0 Sl + \frac{1}{2}kl^2} \ (\text{オ})$$

158

(1)



(a) 全体を1つの気体として、状態方程式をたてると

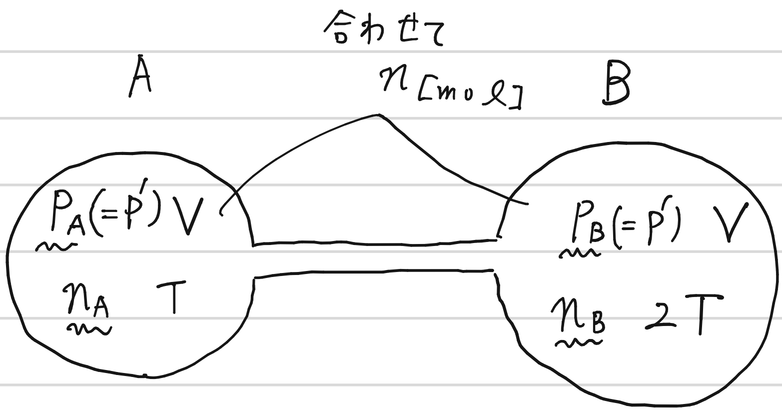
$P \cdot 2V = nRT$

$\therefore P = \dfrac{nRT}{2V}$ //

(b) $U = \frac{3}{2}nRT$ より

$U = \frac{3}{2}nRT$ //

(2)



(C) 自由に気体が行き来できるので

$P_A = P_B \Rightarrow P'$ とする。

状態方程式をたてると

A $P'V = n_A RT$ …①　　B $P'V = n_B R \cdot 2T$ …②

（Tがちがうので 全体で1つの気体にできない。）

物質量は合わせて n [mol] なので

$n = n_A + n_B$ …③

158 (2) (c) 続き

②を変形して

$$\frac{1}{2}p'V = n_B RT \cdots ②'$$

① + ②' をして $(n_A + n_B)$ を作る.

$$\frac{3}{2}p'V = (n_A + n_B)RT$$

③を代入して

$$\frac{3}{2}p'V = nRT \qquad \therefore p' = \frac{2nRT}{3V} \quad \text{(c)}$$

(d)

(2) のときの内部エネルギー U を計算する.

n_A, n_B をだすのが面倒なので $U = \frac{3}{2}PV$ で計算する.

$$\begin{aligned} U' &= U_A + U_B \\ &= \frac{3}{2}p'V + \frac{3}{2}p'V \\ &= 3p'V \\ &= 3 \cdot \frac{2nRT}{3V} V \\ &= 2nRT \end{aligned}$$

(解答では n_A, n_B を求めて $\frac{3}{2}nRT$ で計算している)

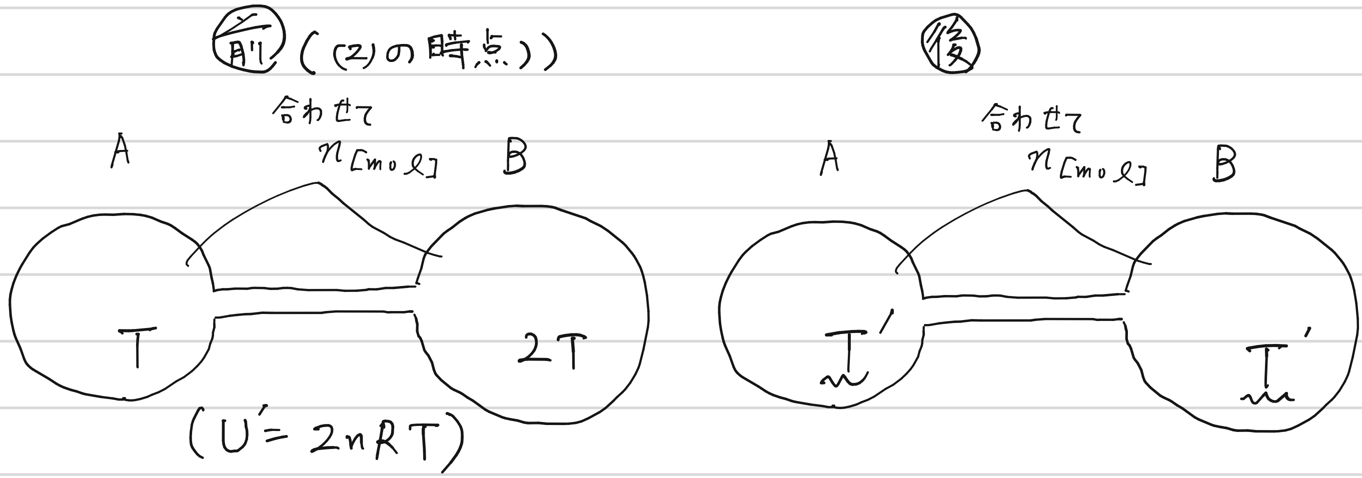
(1) から内部エネルギーの増えた分が、加えた熱量 Q であるので

$$\begin{aligned} Q &= U' - U \\ &= 2nRT - \frac{3}{2}nRT \\ &= \frac{1}{2}nRT \end{aligned}$$

158 続き

(3) 気体が外に仕事をせず、外部との熱のやりとりもないことから、内部エネルギーは保存する。

※(1)→(2)ではBをあたためているので熱のやりとりがある。



後の全体の内部エネルギー U'' は

$$U''=\frac{3}{2}nRT'$$

前後で内部エネルギーが保存するので

$$2nRT=\frac{3}{2}nRT'$$

$$T'=\frac{4}{3}T$$ //

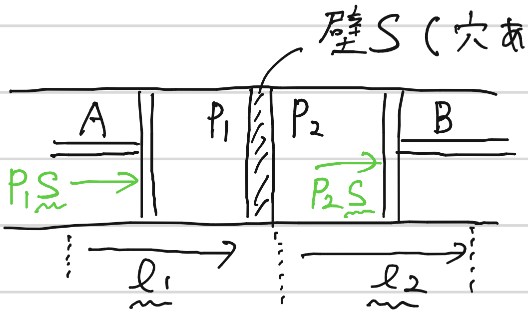
※解答では(1)→(3)での内部エネの変化を追っている。

$$\underbrace{U_1}_{\text{はじめ}}+\underbrace{Q}_{\text{トータルで加えた熱}}=\underbrace{U''}_{\text{最後}}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}nRT+\frac{1}{2}nRT=\frac{3}{2}nRT' \qquad \therefore T'=\frac{4}{3}T$$ //

159

(1) 動いている途中を図にして、実験の内容を整理しよう。



A側はピストンから、P_1Sの力で押される。
⇒ 押される距離を l_1 とする

B側はピストンを P_2S の力で押す
⇒ 押す距離を l_2 とする

(ア) $\boxed{\text{A側のされる仕事}}$

$W = Fx$ より

$$W_{inA} = P_1 S \cdot l_1$$

ここで $Sl_1 = V_1$ なので

$$W_{inA} = \underline{P_1 V_1}_{//} \text{ (ア)}$$

(イ) $\boxed{\text{B側のする仕事}}$

$W = Fx$ より

$$W_{outB} = P_2 S \cdot l_2$$

ここで $Sl_2 = V_2$ なので

$$W_{outB} = \underline{P_2 V_2}_{//} \text{ (イ)}$$

(ウ) $\boxed{\text{全体としてする仕事}}$

W_{outB} が正の仕事 W_{inA} が負の仕事といえるので。

$$W_{out\text{トータル}} = W_{outB} - W_{inA}$$
$$= \underline{P_2 V_2 - P_1 V_1}_{//} \text{ (ウ)}$$

159 続き

(2)

(エ) 熱力学第一法則より

$$Q_{in} = \Delta U + W_{out}$$

$$\Rightarrow \underline{0 = (U_2 - U_1) + (P_2V_2 - P_1V_1)} \text{ //(エ)}$$

(オ) 変形して

$$U_2 - U_1 = -(P_2V_2 - P_1V_1)$$

$$= \underline{P_1V_1 - P_2V_2} \text{ //(オ)}$$

(カ) $PV = nRT$ より

$$P_1V_1 = nRT_1 \quad , \quad P_2V_2 = nRT_2$$

(オ)に代入して.

$$U_2 - U_1 = nRT_1 - nRT_2$$

$$= \underline{nR(T_1 - T_2)} \text{ //(カ)}$$

(3) $U = \frac{3}{2}nRT$ より

$$U_2 = \frac{3}{2}nRT_2 \qquad U_1 = \frac{3}{2}nRT_1$$

よって

$$U_2 - U_1 = \frac{3}{2}nRT_2 - \frac{3}{2}nRT_1$$

$$= \underline{\frac{3}{2}nR(T_2 - T_1)} \text{ //(キ)}$$

(4) (カ)(キ) より

$$nR(T_1 - T_2) = \frac{3}{2}nR(T_2 - T_1)$$

$$\frac{5}{2}T_1 = \frac{5}{2}T_2$$

$$\therefore \underline{T_1 = T_2} \text{ //(ク)}$$

$\boxed{160}$

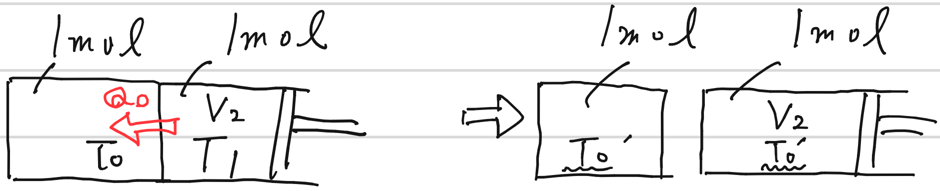
（ア） $\boxed{A \to B}$

熱力学第一法則より

$$Q_{in} = \Delta U + W_{out}$$

$$\Rightarrow Q_1 = \underbrace{0}_{\text{等温なので } \Delta U=0} + W_1 \qquad \therefore \underline{Q_1 = W_1}_{//} \text{（ア）}$$

（イ）（ウ） $\boxed{B \to C}$



全体で内部エネルギーは保存する，

$U = \frac{3}{2}nRT$ を用いて立式すると，

$$\frac{3}{2}\cdot 1\cdot RT_0 + \frac{3}{2}\cdot 1\cdot RT_1 = \frac{3}{2}\cdot 1\cdot RT_0' + \frac{3}{2}\cdot 1RT_0'$$

$$\Rightarrow T_0 + T_1 = 2T_0'$$

$$\therefore T_0' = \underline{\frac{1}{2}T_0 + \frac{1}{2}T_1}_{//} \text{（イ）（ウ）}$$

（エ） $\boxed{D \to E}$

熱力学第一法則より

$$Q_{in} = \Delta U + W_{out}$$

$$-Q_2 = 0 + (-W_2)$$

※ Q_{in} と W_{out} の正負に注意．

（Q_2：放出した熱量 $\Rightarrow Q_{in} = -Q_2$
W_2：された仕事 $\Rightarrow W_{out} = -W_2$）

$$\therefore \underline{Q_2 = W_2}_{//} \text{（エ）}$$

※ $\boxed{\text{補足}}$

「等温変化で気体がする仕事は温度に比例する」について

- 誘導されるまま $\frac{W_2}{W_1} = \frac{T_2}{T_1}$ を用いてよい。
- なぜそういえるかは，P−Vグラフの面積で仕事をだすと分かる。

$\Rightarrow$ 等温ならば状態方程式で

$$PV = \underbrace{nRT}_{\text{ここが一定}}$$

160 補足の続き

これより P-Vグラフの式を作ると

$$P(V) = \underbrace{nRT}_{\text{定数}} \frac{1}{V}$$

(Vに反比例のグラフ)

するとP-Vグラフの面積は

$$\int_{V_1}^{V_2} P(V)dV = \int_{V_1}^{V_2} nRT\frac{1}{V}\,dV = nRT\int_{V_1}^{V_2}\frac{1}{V}\,dV$$

$$= nRT\left[\log|V|\right]_{V_1}^{V_2}$$

となる。A→Bの変化とD→Eの変化で

$$\left[\log|V|\right]_{V_1}^{V_2}$$

の部分は同じなので、定数部分nRTの大小で面積が変わる。

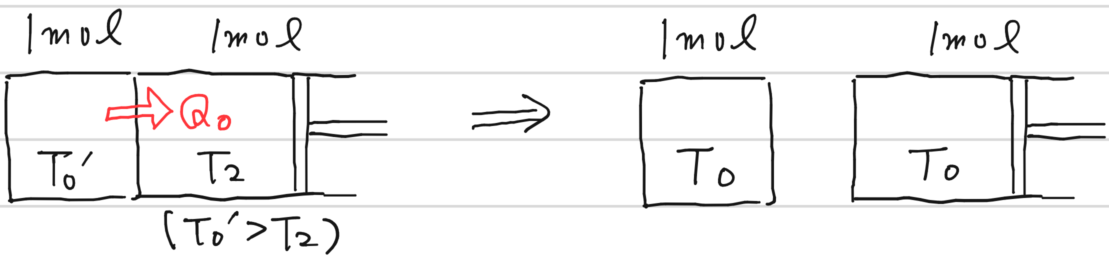
これより W は Tに比例するといえる。

よって

$$T_1 : T_2 = W_1 : W_2 \Rightarrow \frac{W_2}{W_1} = \frac{T_2}{T_1}$$ となる.

※問題を解くのにこの関係を使ってるわけではない.

(オ)(カ)



※(イ)(ウ)で容器が Q_0 うけとって
$T_0 \to T_0'$ になっているので
(オ)(カ)で $T_0' \to T_0$ になるときは
同じ量 Q_0 を放出してるのだ.

内部エネルギーの保存より

$$\frac{3}{2}\cdot 1\cdot RT_0' + \frac{3}{2}\cdot 1\cdot RT_2 = \frac{3}{2}\cdot 1\cdot RT_0 + \frac{3}{2}\cdot 1\cdot RT_0$$

$$\Rightarrow \quad T_0' + T_2 = 2T_0$$

$\boxed{160}$ (オ)(カ) 続き

(イ)．(ウ)の式 $T_0' = \frac{1}{2}T_0 + \frac{1}{2}T_1$ を代入して

$$\frac{1}{2}T_0 + \frac{1}{2}T_1 + T_2 = 2T_0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3}{2}T_0 = \frac{1}{2}T_1 + T_2$$

$$\therefore \quad T_0 = \underline{\frac{1}{3}T_1 + \frac{2}{3}T_2} \text{ //}$$ (オ)(カ)

(キ)

エネルギー表でシリンダーの気体の変化をまとめてみる

	Q_{in}	$=$ ΔU (値は省略)	+ W_{out}
F→A	$+q_2$	(+)	0
A→B	$+Q_1$	0	$+W_1$
B→C	$-Q_0$	(−)	0
C→D	$-q_1$	(−)	0
D→E	$-Q_2$	0	$-W_2$
E→F	$+Q_0$	(+)	0

ここで放出した分を ここで再利用している．

一方で熱効率の式について．

$$e = \frac{W_{out}\text{の和}}{Q_{in}\text{の}+\text{の和}}$$

ここは外から加えられた熱をカウントしているのだが，
E→Fの $+Q_0$ は自分でだした熱なのでカウントしなくてよいのだ．

よって

$$e = \frac{W_{out}\text{の和}}{Q_{in}\text{の}+\text{の和}} = \frac{W_1 - W_2}{+q_2 + Q_1}$$

$+Q_0$ はカウントしない．

となるのである。

160 (キ) 続き

$$e = \frac{W_1 - W_2}{+\mathscr{Q}_2 + Q_1}$$ の 〰 は使えない文字なので消していく.

(ア), (エ) より

$$W_1 = Q_1 \quad , \quad W_2 = Q_2$$

C_Vを使うと $\Delta U = nC_V \Delta T$ なので, $\boxed{F \to A}$ の熱力学第一法則より

$$Q_{in} = \Delta U + W_{out}$$

$$\Rightarrow \mathscr{Q}_2 = 1 \cdot C_V (T_1 - T_0) + 0$$

eの式にこれらを 代入して

$$e = \frac{Q_1 - Q_2}{C_V(T_1 - T_0) + Q_1}$$

ここで(オ)(カ)の式より $T_0 = \frac{1}{3}T_1 + \frac{2}{3}T_2$ なので

$$e = \frac{Q_1 - Q_2}{C_V\{T_1 - (\frac{1}{3}T_1 + \frac{2}{3}T_2)\} + Q_1}$$

$$= \underline{\frac{Q_1 - Q_2}{\frac{2}{3}C_V(T_1 - T_2) + Q_1}} \quad /\!/ \text{(キ)}$$