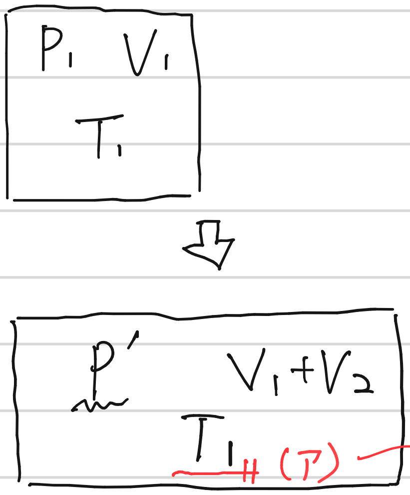
$\boxed{161}$ 自由膨張…体積が大きくなっているが、仕事をしているわけではない。(何も押してないので)

$\Rightarrow\ Q_{in} = \Delta U + \underset{\uparrow\ 0}{W_{out}}$

断熱ならば Q_{in} も 0 なので、$\Delta U = 0$。

つまり、膨張しても温度が変化しない。

(1)



状態方程式をたてる。

前 $P_1 V_1 = nRT_1$

後 $P'(V_1+V_2) = nRT_1$

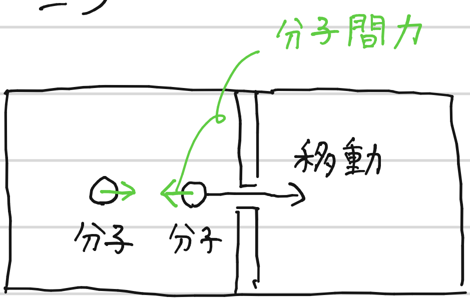
上の解説の通り $\Delta U = 0$ なので $\Delta T = 0$。
温度は変化しないのだ

辺々割って

$$\frac{P'(V_1+V_2)}{P_1 V_1} = \frac{nRT_1}{nRT_1} \qquad \therefore\ P' = \underline{\frac{V_1}{V_1+V_2} P_1}\ //\ (イ)$$

(2) 分子間力に逆らって移動する必要があるので、エネルギーを消費する。$\Rightarrow$ 温度は<u>下がる</u> // (ウ)

(イメージ)



162

(ア) ボルツマン定数kの定義より

$$k=\frac{R}{N_A}$$

物質量nをkで示すと

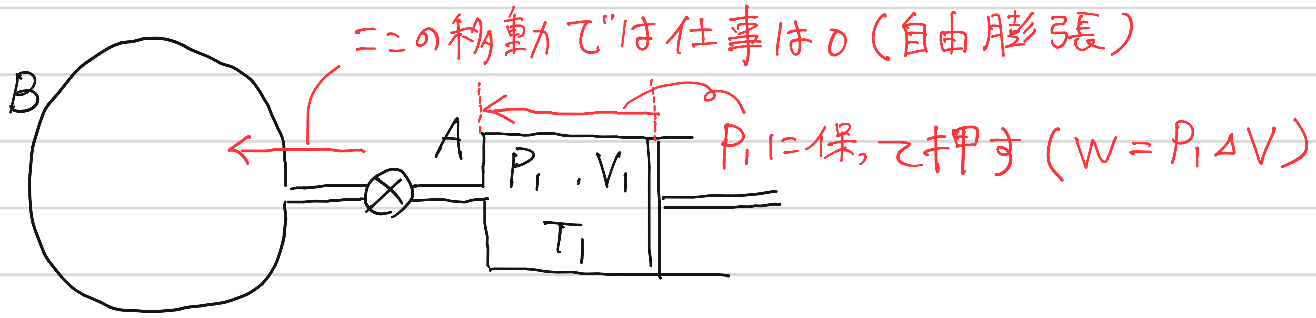
$$n=\frac{N}{N_A}=\frac{Nk}{R}$$

よって内部エネルギーUは

$$U=\frac{3}{2}nRT_1$$
$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{Nk}{R}\cdot RT_1$$
$$=\underline{\frac{3}{2}NkT_1}\ //(ア)$$

※ 分子1個の運動エネルギーが
$\frac{1}{2}m\overline{v^2}=\frac{3}{2}kT$とかけ
$U=N\cdot\frac{1}{2}m\overline{v^2}$なので
$U=\frac{3}{2}NkT_1$
としてもよい

(イ)



気体はピストンから仕事をされる.

$$W_{in}=P_1\Delta V$$
$$=\underline{P_1V_1}\ //(イ)$$

(ウ) 仕事された分, 内部エネルギーが増えるので

$$U'=\frac{3}{2}NkT_1+P_1V_1$$

状態方程式より

$$P_1V_1=nRT_1$$
$$=\frac{Nk}{R}RT_1$$
$$=NkT_1$$

これをU'の式に代入する.

162 (ウ) 続き

$$U' = \frac{3}{2}NkT_1 + P_1V_1$$ ↩ $P_1V_1 = NkT_1$ を代入して.

$$= \frac{3}{2}NkT_1 + NkT_1$$

$$= \underline{\frac{5}{2}NkT_1}_{\#} \quad (ウ)$$

※ 熱力学第一法則で考えると

$$Q_{in} = \Delta U + W_{out}$$

$$0 = (U' - U) + (-W_{in})$$

$$0 = U' - \frac{3}{2}NkT - P_1V_1$$

$$\Rightarrow U' = \frac{3}{2}NkT + P_1V_1 = \frac{5}{2}NkT_1$$

となるが、こう書くとまわりくどい感じがする.

(エ) T_2 を用いて U' を示すと.

$$U' = \frac{3}{2}NkT_2$$

なので

$$\frac{3}{2}NkT_2 = \frac{5}{2}NkT_1$$

$$\therefore T_2 = \underline{\frac{5}{3}T_1}_{\#} \quad (エ)$$

(オ) 平均の運動エネルギー $\overline{K}$ は

$$\frac{(\text{全エネルギー})}{(\text{個数})}$$

で計算ができるので

$$\Delta\overline{K} = \frac{W_{in}}{N} \quad (\because (\text{全エネルギーの変化}) = W_{in})$$

$$= \frac{P_1V_1}{N}$$

$$= \frac{NkT_1}{N} \qquad \therefore \Delta\overline{K} = \underline{kT_1}_{\#} \quad (オ)$$

163 ポアソンの式 … 断熱変化のときのみ, 成立する式.

主に変化後のPやTをだすのに使う.

$PV^{\gamma} = (一定)$ 基本の形 （γ…比熱比のこと. 定義：$\gamma = \frac{C_p}{C_v}$）

⇓ 状態方程式より　$PV = nRT \Rightarrow P = \frac{T}{V}nR$ より

$$\frac{T}{V}nR \cdot V^{\gamma} = (一定)$$

⇓

$$TV^{\gamma-1} = \frac{(一定)}{nR}$$

⇓ nが定数なら

$$TV^{\gamma-1} = (一定)$$ TとVの形

今回は、ポアソンの式を導く問題である.（必須事項ではないので、無理せず）

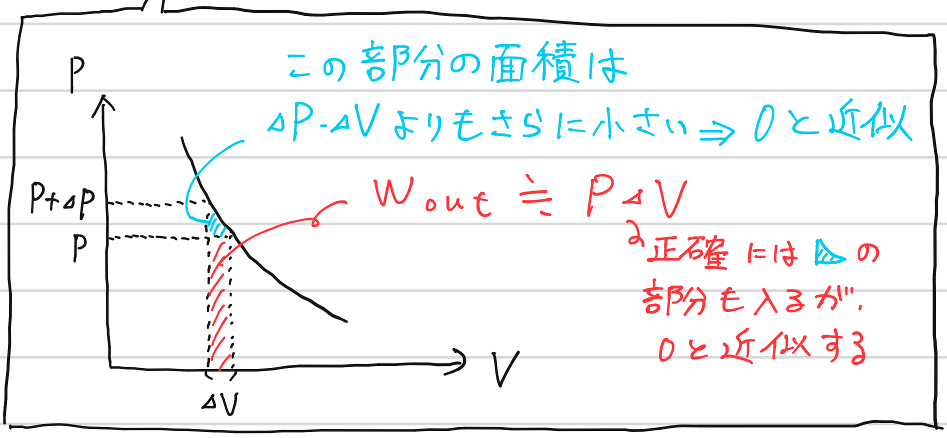
(導入)

断熱的に ΔP, ΔV, ΔT の変化があったとき.

熱力学第一法則より

$$0 = nC_v\Delta T + P\Delta V$$

↓ $\Delta U = nC_v\Delta T$ より　↓ グラフの面積より



$$P\Delta V = -nC_v\Delta T$$

一方, 状態方程式より

$$PV = nRT$$

$\boxed{163}$ (導入) 続き

辺々割って

$$\frac{P\Delta V}{PV} = \frac{-nC_V\Delta T}{nRT}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta V}{V} = -\frac{C_V}{R}\frac{\Delta T}{T}$$

$$\therefore \frac{\Delta T}{T} = -\frac{R}{C_V}\frac{\Delta V}{V}$$

これを積分すると

$$\int \frac{dT}{T} = \int -\frac{R}{C_V}\frac{dV}{V}$$

$$\Rightarrow \log T = -\frac{R}{C_V}\log V + C \quad (C:\text{積分定数}) \cdots ①$$

(ア) ところで、マイヤーの関係式 $C_p = C_V + R$ を C_V で割ると

$$\frac{C_p}{C_V} = \frac{C_V}{C_V} + \frac{R}{C_V}$$

$$\Rightarrow \frac{C_p}{C_V} = \underline{1+\frac{R}{C_V}}_{\text{//(ア)}} \quad (=\gamma)$$

(イ) これより

$$\frac{R}{C_V} = \underline{\gamma - 1}_{\text{//(イ)}}$$

(ウ) これを①に代入して

$$\log T = -(\gamma-1)\log V + C$$

$$\Rightarrow \log T + (\gamma-1)\log V = C$$

$$\Rightarrow \log T + \underline{(\gamma-1)\log V}_{\text{//(ウ)}} = (\text{一定})$$

C は定数なので

(エ) $\Rightarrow \log T + \log V^{\gamma-1} = (\text{一定})$

$$\Rightarrow \log \underline{(T\cdot V^{\gamma-1})}_{\text{//(エ)}} = (\text{一定})$$

(オ) $\therefore \underline{TV^{\gamma-1}}_{\text{//(オ)}} = (\text{一定})$

$\boxed{164}$ 熱サイクルでは エネルギー表を書く。

$\boxed{A \to B}$

① $U = \frac{3}{2}PV$ より ← $\boxed{U = \frac{3}{2}nRT \text{ と } PV = nRT \text{ より}}$

$$\Delta U = U_B - U_A$$

$$= \frac{3}{2}P_B V_A - \frac{3}{2}P_A V_A = \frac{3}{2}(P_B - P_A)V_A$$

② グラフの面積より

$$W_{out} = 0$$

③ $Q_{in} = \Delta U + W_{out}$ より

$$Q_{in} = \underline{\frac{3}{2}(P_B - P_A)V_A} \text{ // (ア)}$$

$\boxed{B \to C}$

① 断熱変化なので

$$Q_{in} = \underline{0} \text{ // (イ)}$$

② $U = \frac{3}{2}PV$ なので

$$\Delta U = U_C - U_B$$

断熱膨張なので温度さがる。よって $U_B > U_C$ である。

$$= -(U_B - U_C)$$

符合と大きさを見やすくする

$$= -\left(\frac{3}{2}P_B V_A - \frac{3}{2}P_A V_C\right)$$

$$= -\frac{3}{2}(P_B V_A - P_A V_C)$$

③ $Q_{in} = \Delta U + W_{out}$ より

$$0 = -\frac{3}{2}(P_B V_A - P_A V_C) + W_{out}$$

$$\therefore W_{out} = \frac{3}{2}(P_B V_A - P_A V_C)$$

断熱変化時の仕事は、面積からだせないので、このように
$Q_{in} = \Delta U + W_{out}$ から逆算することが多い。

$\boxed{164}$ 続き

$\boxed{C \to A}$

① $U = \frac{3}{2}PV$ より

$$\Delta U = U_A - U_C$$

← $P \times V$ の大きさを比べると，$T_C > T_A$ といえるので $U_C > U_A$ である．

$$= -(U_C - U_A)$$

← 符合と大きさを見やすくする

$$= -\left(\frac{3}{2}P_A V_C - \frac{3}{2}P_A V_A\right)$$

$$= -\frac{3}{2}P_A (V_C - V_A)$$

② グラフの面積より

$$W_{out} = -P_A (V_C - V_A)$$

※ Vが小さくなっているので W_{out} は負の仕事

③ $Q_{in} = \Delta U + W_{out}$ より

$$Q_{in} = -\frac{3}{2}P_A (V_C - V_A) + \{-P_A (V_C - V_A)\}$$

$$= \underline{-\frac{5}{2}P_A (V_C - V_A)} \;\; (ウ)$$

エネルギー表にまとめると

	Q_{in}	=	ΔU	+	W_{out}
A→B	$+\frac{3}{2}(P_B - P_A)V_A$		$\frac{3}{2}(P_B - P_A)V_A$		0
B→C	0		$-\frac{3}{2}(P_B V_A - P_A V_C)$		$+\frac{3}{2}(P_B V_A - P_A V_C)$
C→A	$-\frac{5}{2}P_A (V_C - V_A)$		$-\frac{3}{2}P_A (V_C - V_A)$		$-P_A (V_C - V_A)$
サイクル合計	$\frac{3}{2}P_B V_A - \frac{5}{2}P_A V_C + P_A V_A$		0		$\frac{3}{2}P_B V_A - \frac{5}{2}P_A V_C + P_A V_A$

元の温度に戻るので0になるはず

$\Delta U = 0$ なので同じになるはず．

サイクル合計で計算ミスをチェックできる．

$\boxed{164}$ 続き

$$e = \frac{W_{\text{out トータル}}}{Q_{\text{in の＋の和}}}$$ なので

$$e = \frac{\frac{3}{2}P_B V_A - \frac{5}{2}P_A V_C + P_A V_A}{\frac{3}{2}(P_B - P_A)V_A}$$

$$= \frac{\frac{3}{2}(P_B - P_A)V_A - \frac{5}{2}P_A V_C + \frac{5}{2}P_A V_A}{\frac{3}{2}(P_B - P_A)V_A}$$

$$= 1 - \frac{\frac{5}{2}P_A V_C - \frac{5}{2}P_A V_A}{\frac{3}{2}(P_B - P_A)V_A}$$

$$= 1 - \frac{5P_A(V_C - V_A)}{3(P_B - P_A)V_A} \quad (\text{I})$$

※ 別解（体系物理の解説の計算）
エネルギー表のサイクル合計の部分から

$$Q_{\text{in トータル}} = 0 + W_{\text{out トータル}}$$

といえて、

$$Q_{A\to B} + Q_{C\to A} = W_{\text{out トータル}}$$

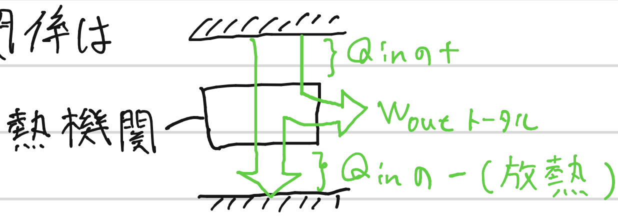
となる。よって

$$e = \frac{W_{\text{out トータル}}}{Q_{\text{in の＋の和}}} = \frac{Q_{A\to B} + Q_{C\to A}}{Q_{A\to B}}$$

$$= 1 + \frac{Q_{C\to A}}{Q_{A\to B}}$$ となる。

エネルギー表の計算をきちんとこなすと、$Q_{\text{in トータル}}$と$W_{\text{out トータル}}$の関係を理解できて、この発想にたどりつける。
はじめからこの方法を覚えようとしないこと。

※ この関係は



と示されることもある。ここからも

$$W_{\text{out トータル}} = Q_{\text{in の＋}} - |Q_{\text{in の－}}|$$

と立式できる。