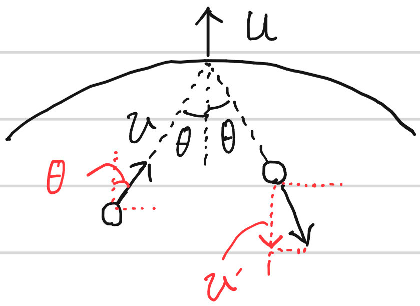
165 気体分子運動論の発展問題にあたる。(たまにでる)

(1)



(垂直成分をv'とおいているので注意)

$$e = \frac{|遠ざかる|}{|近づく|} \quad より$$

$$1 = \frac{v' + u}{v\cos\theta - u}$$ (弾性衝突なので $e=1$)

$$\Rightarrow v' + u = v\cos\theta - u$$

$$\therefore v' = \underline{v\cos\theta - 2u} \quad (1)$$

(2) 変化量なので、不変である平行成分は考えなくてよい。
垂直成分の速さから、運動エネルギーの変化量を求めると

$$\Delta K = \frac{1}{2}mv'^2 - \frac{1}{2}m(v\cos\theta)^2$$

$$= \frac{1}{2}m(v\cos\theta - 2u)^2 - \frac{1}{2}m(v\cos\theta)^2$$

$$= \frac{1}{2}m\left(\cancel{v^2\cos^2\theta} - 4vu\cos\theta + \underbrace{4u^2}_{\fallingdotseq 0} - \cancel{v^2\cos^2\theta}\right)$$

$$\fallingdotseq \frac{1}{2}m(-4vu\cos\theta)$$

$$= \underline{-2mvu\cos\theta}$$

(3) 半径が $r \to \Delta r$ になるまでの時間 t は

$$t = \frac{\Delta r}{u}$$

一方で、この時間での分子の移動距離は

$$vt \Rightarrow \frac{v\Delta r}{u}$$

(衝突するごとに v はおそくなるが、その差は小さいとみなし、v は一定とする)

問題文の図より分子は $2r\cos\theta$ すすむごとに1回衝突するので

$$\frac{\frac{v\Delta r}{u}}{2r\cos\theta} \Longrightarrow \underline{\frac{v\Delta r}{2ur\cos\theta}}$$ 回衝突するといえる。

165 続き

(4) 1回につき $-2mvu\cos\theta$ の変化があるので、回数をかけて、

$$\Delta K = -2mvu\cos\theta \cdot \frac{v\Delta r}{2ur\cos\theta}$$

$$= -\frac{mv^2\Delta r}{r}$$ //

(5) $\Delta V = (V+\Delta V) - V$

$$= \frac{4}{3}\pi(r+\Delta r)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$= \frac{4}{3}\pi r^3\left(1+\frac{\Delta r}{r}\right)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3$$

近似

$$\fallingdotseq \frac{4}{3}\pi r^3\left(1+3\cdot\frac{\Delta r}{r}\right) - \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$= \frac{4}{3}\pi r^3 + 4\pi r^2\Delta r - \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\therefore \Delta V = 4\pi r^2\Delta r$$ //

(6) 内部エネルギーUは運動エネルギーの総和なので

$$U = N_A \cdot \frac{1}{2}mv^2$$

問題文の誘導より $\Delta U = \Delta K \times$ (分子数) なので

$$\Delta U = \Delta K \times N_A$$

$$= -\frac{mv^2\Delta r}{r} \cdot N_A$$

2式より、

$$\frac{\Delta U}{U} = \frac{-\frac{mv^2\Delta r}{r}\cdot N_A}{N_A\cdot\frac{1}{2}mv^2}$$

$$= -\frac{2\Delta r}{r}$$ //

$\boxed{165}$ 続き

(7) 前問(5)より

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{4\pi r^2 \Delta r}{V}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta V}{V} = \frac{4\pi r^2 \Delta r}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{3\Delta r}{r}$$

前問(6)より

$$\frac{\Delta U}{U} = -\frac{2\Delta r}{r}$$

2式で $\frac{\Delta r}{r}$ を独立させて連立すると、

$$\frac{\Delta V}{3V} = -\frac{\Delta U}{2U}$$

$$\Rightarrow \underline{\frac{\Delta U}{U} = -\frac{2}{3}\frac{\Delta V}{V}}$$ //

(8) の前の文章について、

$$\Delta U = \frac{3}{2}P'V' - \frac{3}{2}PV$$

$$= \frac{3}{2}(P+\Delta P)(V+\Delta V) - \frac{3}{2}PV$$

$$= \frac{3}{2}(PV + P\Delta V + \Delta PV + \underbrace{\Delta P\Delta V}_{\fallingdotseq 0}) - \frac{3}{2}PV$$

$$= \frac{3}{2}(P\Delta V + \Delta PV)$$ としている。

(8) これを前問(7)に代入すると

$$\frac{\frac{3}{2}(P\Delta V + \Delta PV)}{\frac{3}{2}PV} = -\frac{2}{3}\frac{\Delta V}{V}$$

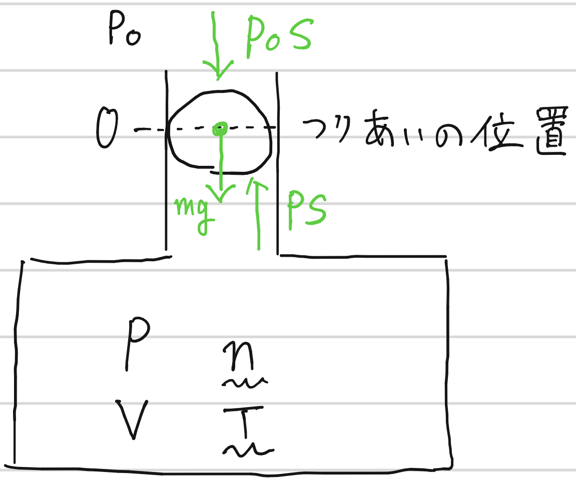
$$\Rightarrow \frac{\Delta V}{V} + \frac{\Delta P}{P} = -\frac{2}{3}\frac{\Delta V}{V}$$

$$\therefore \underline{\frac{\Delta P}{P} = -\frac{5}{3}\frac{\Delta V}{V}}$$ //

(問題文にある通り、この式を積分して、ポアソンの式 $PV^{\frac{5}{3}} = (一定)$ が求まる。)

166

(1) 力のつりあいより，Pを求める．



つりあいの式

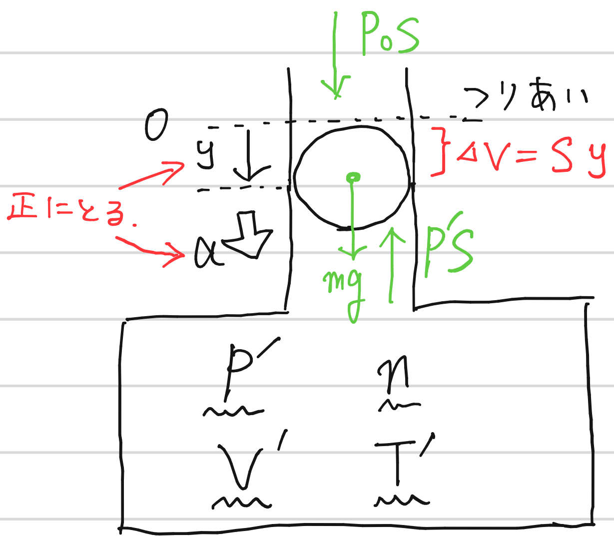
$$PS = P_0S + mg$$

$$\therefore P = P_0 + \frac{mg}{S}$$

(以後，Pは使っていい文字となる)

(2)

(a) 適当な変位yの作図を行う．



断熱変化なのでポアソンの式が成立する．

$$PV^\gamma = P'V'^\gamma \quad (\leftarrow \text{前}PV^\gamma = \text{後}PV^\gamma)$$

ここで

$$V' = V - \Delta V$$

$$\Rightarrow V' = V - Sy$$

なので

$$PV^\gamma = P'(V - Sy)^\gamma$$

$$\Rightarrow P' = \frac{V^\gamma}{(V-Sy)^\gamma}P = \left(\frac{V}{V-Sy}\right)^\gamma P$$

$$= \left\{\frac{V}{V\left(1-\frac{Sy}{V}\right)}\right\}^\gamma P$$

$$= \left(1-\frac{Sy}{V}\right)^{-\gamma} P$$

$$\fallingdotseq \left(1+\gamma\frac{Sy}{V}\right) P$$

166 続き

(b) 運動方程式をたてて

$$ma = P_0S + mg - P'S$$

つりあいより

$$ma = PS - P'S \quad (\because P_0S + mg = PS)$$

(a)より

$$ma = PS - \left(1 + \gamma\frac{Sy}{V}\right)PS \quad \left(\because P' = \left(1 + \gamma\frac{Sy}{V}\right)P\right)$$

$$ma = -\frac{\gamma PS^2}{V}y$$ ← 単振動の形「$-$ ◌ x」の形になった。

$$\Rightarrow a = -\frac{\gamma PS^2}{mV}y$$

(c) $a = -\omega^2 x$ とくらべて

$$\omega^2 = \frac{\gamma PS^2}{mV}$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{\gamma PS^2}{mV}}$$

$T = \frac{2\pi}{\omega}$ より

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{mV}{\gamma PS^2}}$$

(d) 説明はされていないが、T を実験で計測して γ を求めようとしているのだ。

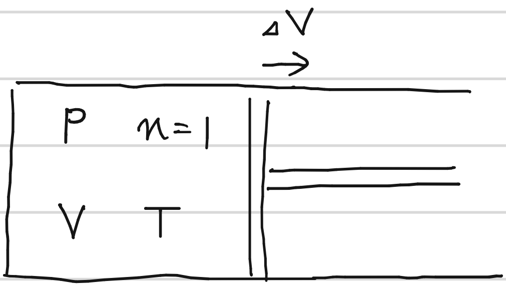
(C)の式を γ について解いて、

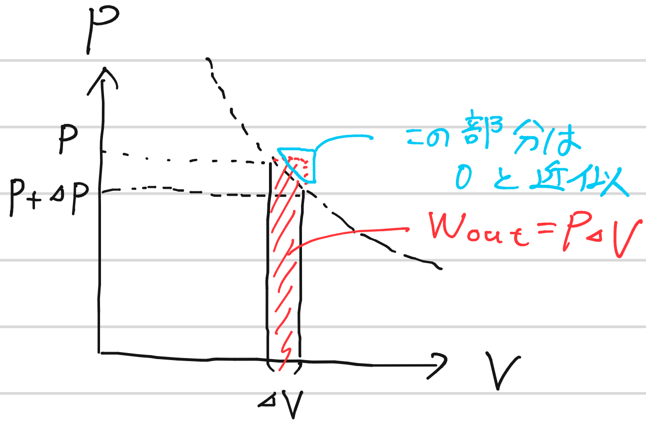
$$T^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{mV}{\gamma PS^2}$$

$$\therefore \gamma = \frac{4\pi^2 mV}{PS^2T^2}$$

$\boxed{167}$

(1)





グラフより $W_{out} \fallingdotseq P\Delta V$

状態方程式より

$$PV = 1 \cdot RT$$

$$\Rightarrow P = \frac{RT}{V}$$

これを代入して

$$W_{out} \fallingdotseq RT\frac{\Delta V}{V}$$

(2) 断熱変化なので $Q_{in}=0$ であり，$Q_{in}=\Delta U + W_{out}$ より，

$$0 = \Delta U + RT\frac{\Delta V}{V}$$

ここで $\Delta U = \frac{3}{2}nR\Delta T$ なので

$$0 = \frac{3}{2}R\Delta T + RT\frac{\Delta V}{V}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}R\Delta T = -RT\frac{\Delta V}{V}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta T}{T} = -\frac{2\Delta V}{3V}$$

$\boxed{167}$ 続き

(3) 状態方程式より

$$(P+\Delta P)(V+\Delta V)=1\cdot R(T+\Delta T)$$

$$\Rightarrow PV+P\Delta V+\Delta PV+\underbrace{\Delta P\Delta V}_{=0}=R(T+\Delta T)$$

前の状態方程式より
$PV=RT$

$$\Rightarrow \cancel{PV}+P\Delta V+\Delta PV=\cancel{PV}+R\Delta T$$

$$\Rightarrow P\Delta V+\Delta PV=R\Delta T$$

$\dfrac{\Delta P}{P}$を作るように変形する，全体を PV で割って

$$\frac{\Delta V}{V}+\frac{\Delta P}{P}=\frac{R}{PV}\Delta T$$

状態方程式より
$\dfrac{R}{PV}=\dfrac{1}{T}$

$$\Rightarrow \frac{\Delta P}{P}=\frac{\Delta T}{T}-\frac{\Delta V}{V}$$

(2)の答えより

$$\frac{\Delta P}{P}=-\frac{2\Delta V}{3V}-\frac{\Delta V}{V}$$

$$=-\frac{5\Delta V}{3V}$$

168

(1) ポアソンの式の立て方.

(一定)なので (前)PV^{γ} = (後)PV^{γ} となる)

$$T_1 V_A^{\gamma-1} = \underline{T_2 V_B^{\gamma-1}} \quad /\!/ (ア)$$

$$T_1 V_D^{\gamma-1} = \underline{T_2 V_C^{\gamma-1}} \quad /\!/ (イ)$$

辺々割って

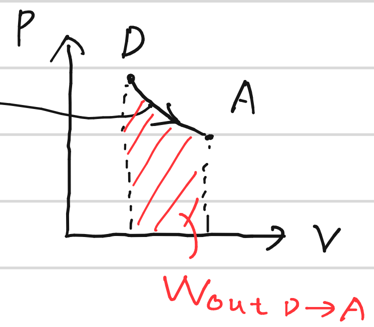
$$\frac{V_A^{\gamma-1}}{V_D^{\gamma-1}} = \frac{V_B^{\gamma-1}}{V_C^{\gamma-1}} \Rightarrow \frac{V_A}{V_D} = \frac{V_B}{V_C}$$

(2) (導入部分の文章について)

等温膨張時の仕事をグラフの面積で求める.

状態方程式 $PV = nRT$ より

$P = nRT_1 \cdot \frac{1}{V}$ ← グラフの式.



$V_D \to V_A$ の面積を求めると

$$\int_{V_D}^{V_A} nRT_1 \cdot \frac{1}{V} dV = nRT_1 \int_{V_D}^{V_A} \frac{1}{V} dV$$

$$= nRT_1 \left[\log|V| \right]_{V_D}^{V_A}$$

$$= nRT_1 (\log V_A - \log V_D)$$

$$= nRT_1 \log \frac{V_A}{V_D}$$ …これが $W_{out\ A\to B}$

熱力学第一法則の式をたてると

$$Q_{in\ D\to A} = 0 + W_{out\ D\to A}$$

$$Q_{D\to A} = nRT \log \frac{V_A}{V_D}$$

となる.

168 (2)続き

(ウ) (B→C)

同様に $W_{out\,B\to C}$ を求めると、

$$W_{out\,B\to C} = -nRT_2 \log\frac{V_B}{V_C}$$

(面積が $nRT_2\log\frac{V_B}{V_C}$. Vの小さくなる変化なので負の仕事。)

熱力学第一法則の式をたてると、

$$Q_{in\,B\to C} = 0 + W_{out\,BC}$$

$$\Rightarrow Q_{in\,B\to C} = -nRT_2\log\frac{V_B}{V_C}$$

今回、放出する熱量 $Q_{out\,B\to C}$ を Q_{BC} としているので、$Q_{in\,B\to C}$ の符合を逆にして、

$$Q_{B\to C} = nRT_2\log\frac{V_B}{V_C} \quad (ウ)$$

(エ) 断熱変化の部分は $Q_{in}=0$ なので、熱効率 e を Qベースで考えれば、$Q_{D\to A}$ と $Q_{B\to C}$ だけで立式できる。

$$e = \frac{W_{out\,トータル}}{Q_{in\,の+}}$$

(トータルで $\Delta U=0$ なので $Q_{in\,トータル} = 0 + W_{out\,トータル}$ であり $Q_{in\,トータル} = Q_{in\,D\to A} + Q_{in\,B\to C}$)

$$= \frac{Q_{in\,D\to A} + Q_{in\,B\to C}}{Q_{in\,D\to A}}$$

$$= 1 + \frac{Q_{in\,B\to C}}{Q_{in\,D\to A}}$$

$$= 1 + \frac{\left(-nRT_2\log\frac{V_B}{V_C}\right)}{nRT_1\log\frac{V_A}{V_D}}$$

$$= 1 - \frac{T_2\log\frac{V_B}{V_C}}{T_1\log\frac{V_A}{V_D}} \quad (エ)$$

(オ) (1)の結果 $\frac{V_B}{V_C} = \frac{V_A}{V_D}$ より (エ) を整理して、

$$e = 1 - \frac{T_2}{T_1} \quad (オ)$$

※この問題の設定のように in と out を混ぜて考えると、符合がややこしくなる。Qは in, Wは out を基本としよう。