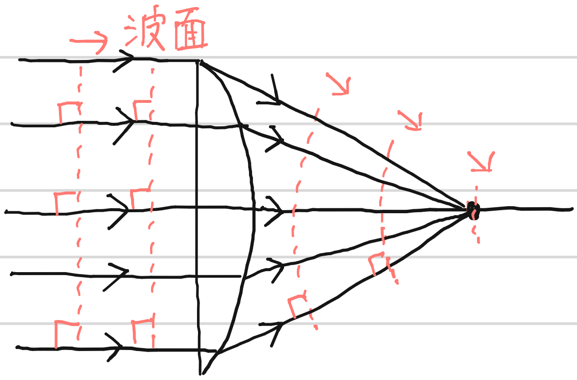
230

光が F に集まるには、I, II の光が同時に F に来ればいい、について

屈折後の光の経路を考える際は波面をベースに考えたい
(ホイヘンスの原理)



ある時刻に到達していた点をむすぶと波面になるので、
逆に考えると同一波面上の点まで到達するまでの時間は全ての経路で同じといえるのだ。

(ア)

屈折の法則より

$$n_{真空} c = n v$$

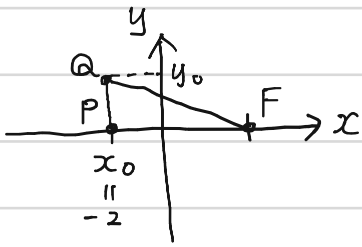
$$\therefore v = \frac{c}{n} \quad /\!/ \text{(ア)}$$

$n_{真空} = 1$ は屈折率の定義
一般に $n_{空気} \fallingdotseq n_{真空} = 1$ とする

(イ)

x_0 が負の値であることに注意

例えば下図のように $x_0 = -2$ の場合



$$\overline{PF} = f - (-2)$$
$$= f + 2$$

と計算する。

よって今回の場合

$$\overline{PF} = f - x_0$$

となり

$$\overline{QF} = \sqrt{\overline{PF}^2 + \overline{QP}^2} = \sqrt{(f - x_0)^2 + y_0^2} \quad /\!/ \text{(イ)}$$

$\boxed{230}$ 続き

(ウ)　(イ)を含む式を立てる

QとPは同一波面上なので同位相で、ここからFまでの時間を計算する.

$\boxed{\text{I}}$

$$t = \frac{\overline{QF}}{c} = \frac{\sqrt{(f-x_0)^2+y_0^2}}{c}$$

$\boxed{\text{II}}$

$$t = \underbrace{\frac{-x_0}{\frac{c}{n}}}_{P\to O\text{まで}} + \underbrace{\frac{f}{c}}_{O\to F\text{まで}}$$

これより

$$\frac{\sqrt{(f-x_0)^2+y_0^2}}{c} = \frac{f}{c} - \frac{x_0}{\frac{c}{n}}$$

← 問題文にある式

これを変形して

$$\sqrt{(f-x_0)^2+y_0^2} = f - nx_0$$

$$(f-x_0)^2+y_0^2 = (f-nx_0)^2$$

$$\cancel{f^2} - 2fx_0 + x_0^2 + y_0^2 = \cancel{f^2} - 2fnx_0 + n^2x_0^2$$

ここで $x_0 = -\frac{1}{2R}y_0^2$ より $y_0^2 = -2Rx_0$ であり、これを代入して

$$-2fx_0 + x_0^2 - 2Rx_0 = -2fnx_0 + n^2x_0^2$$

$$2x_0(n-1)f = (n^2-1)x_0^2 + 2Rx_0$$

$$f = \frac{(n^2-1)x_0 + 2R}{2(n-1)} \quad /\!/ \text{(ウ)}$$

(エ)　$R \gg x_0$ のとき

$\left(\frac{x_0}{R} \fallingdotseq 0\right.$, 2乗がないので荒い近似$\left.\right)$

$$f = \frac{R\left\{\frac{(n^2-1)x_0}{R} + 2\right\}}{2(n-1)} \fallingdotseq \frac{2R}{2(n-1)} = \frac{R}{n-1} \quad /\!/ \text{(エ)}$$