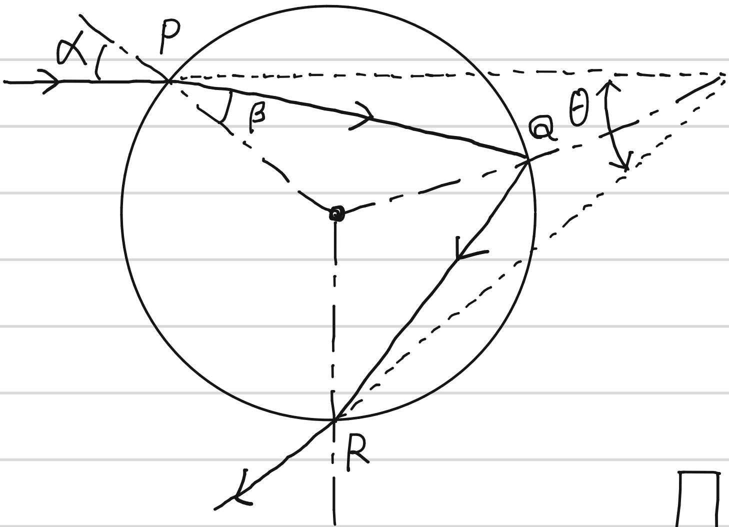
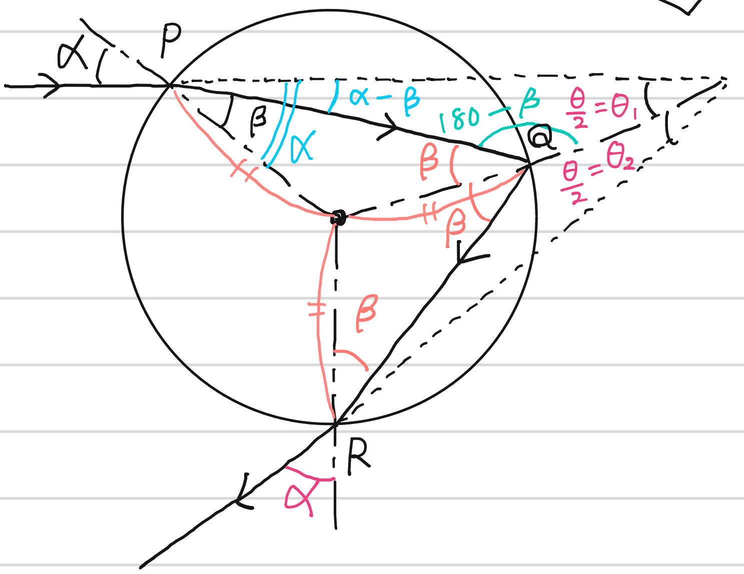
$\boxed{231}$

(ア) 屈折の法則より $1 \times \sin\alpha = n \sin\beta$ $\therefore\ n = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ // (ア)

(イ) 角度の追跡を自分でできた方がよい



この図からθとα,βの関係を書けるようになろう



① 二等辺三角形と反射の法則でβとなる角度がわかる。

② 対頂角でαを書け。
α−βとなる角度がわかる

③ 直線とβの関係から
180°−βとなる角度がわかる。

④ 屈折の法則より、でていくときの屈折角がαとわかり。
図の対称性から
$\theta_1 = \theta_2 = \dfrac{\theta}{2}$ とかける

⇒ PQP′の三角形に注目して

$$(\alpha - \beta) + (180 - \beta) + \frac{\theta}{2} = 180$$

$$\frac{\theta}{2} = 2\beta - \alpha$$

$$\theta = \underline{4\beta - 2\alpha} \text{ // (イ)}$$

※ PQP′の三角形の2角の和が外角になることから
$(\alpha - \beta) + \dfrac{\theta}{2} = \beta$ としてもよい。

231 続き

(ウ) 解説で簡略化されている計算を書くと以下のようになる。

$$\begin{cases} \theta_0 = 4\beta_0 - 2\alpha_0 \\ \theta' = 4(\beta_0 + \Delta\beta) - 2(\alpha_0 + \Delta\alpha) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta\theta = \theta' - \theta_0$$
$$= \{4(\beta_0 + \Delta\beta) - 2(\alpha_0 + \Delta\alpha)\} - \{4\beta_0 - 2\alpha_0\}$$
$$= 4\Delta\beta - 2\Delta\alpha$$

ここで $\Delta\theta = 0$ とすると

$$0 = 4\Delta\beta - 2\Delta\alpha$$

$$\therefore \Delta\alpha = \underbrace{2\Delta\beta}_{(ウ)}$$

(エ) 誘導の通り計算する。

屈折の法則より

$$1 \times \sin(\alpha_0 + \Delta\alpha) = n \times \sin(\beta_0 + \Delta\beta)$$

$$\Rightarrow n = \frac{\sin(\alpha_0 + \Delta\alpha)}{\sin(\beta_0 + \Delta\beta)}$$

$$= \frac{\sin\alpha_0 \underbrace{\cos\Delta\alpha}_{\fallingdotseq 1} + \cos\alpha_0 \underbrace{\sin\Delta\alpha}_{\fallingdotseq \Delta\alpha}}{\sin\beta_0 \underbrace{\cos\Delta\beta}_{\fallingdotseq 1} + \cos\beta_0 \underbrace{\sin\Delta\beta}_{\fallingdotseq \Delta\beta}}$$

$$\fallingdotseq \frac{\sin\alpha_0 + \Delta\alpha\cos\alpha_0}{\sin\beta_0 + \Delta\beta\cos\beta_0}$$

$$= \frac{\sin\alpha_0 + 2\Delta\beta\cos\alpha_0}{\sin\beta_0 + \Delta\beta\cos\beta_0}$$

ここで(イ)より $n = \dfrac{\sin\alpha_0}{\sin\beta_0}$ なので、

$$\frac{\sin\alpha_0}{\sin\beta_0} = \frac{\sin\alpha_0 + 2\Delta\beta\cos\alpha_0}{\sin\beta_0 + \Delta\beta\cos\beta_0}$$

$\boxed{231}$ (エ) 続き

$$\sin\alpha_0(\cancel{\sin\beta_0}+\Delta\beta\cos\beta_0)=\sin\beta_0(\cancel{\sin\alpha_0}+2\Delta\beta\cos\alpha_0)$$

$$\sin\alpha_0\cdot\cancel{\Delta\beta}\cos\beta_0=\sin\beta_0\cdot2\cancel{\Delta\beta}\cos\alpha_0$$

$$\therefore\ \cos\alpha_0=\frac{\sin\alpha_0}{2\sin\beta_0}\cos\beta_0 \quad \text{(エ)}$$

(オ) α_0を消去するため $\sin\alpha_0$と $\cos\alpha_0$を作る。

(ア)より $n=\dfrac{\sin\alpha_0}{\sin\beta_0}$ なので

$$\sin\alpha_0=n\sin\beta_0$$

また $\cos^2\alpha_0=1-\sin^2\alpha_0$ なので

$$\cos\alpha_0=\sqrt{1-(n\sin\beta_0)^2}$$

これらを(エ)の式に代入すると

$$\sqrt{1-(n\sin\beta_0)^2}=\frac{n\cancel{\sin\beta_0}}{2\cancel{\sin\beta_0}}\cos\beta_0$$

$\sin\beta_0$について解いて

$$1-(n\sin\beta_0)^2=\frac{n^2}{4}\cos^2\beta_0$$

$$1-(n\sin\beta_0)^2=\frac{n^2}{4}(1-\sin^2\beta_0)$$

$$1-n^2\sin^2\beta_0=\frac{n^2}{4}-\frac{n^2}{4}\sin^2\beta_0$$

$$\frac{3}{4}n^2\sin^2\beta_0=1-\frac{n^2}{4}$$

$$\sin^2\beta_0=\frac{4-n^2}{4}\left(\frac{4}{3n^2}\right)$$

$$\sin^2\beta_0=\frac{4-n^2}{3n^2}$$

$$\therefore\ \sin\beta_0=\frac{1}{n}\sqrt{\frac{4-n^2}{3}} \quad \text{(オ)}$$

$\boxed{231}$ 続き

(カ)

屈折の法則の式

$$1 \times \sin \alpha_0 = n \times \sin \beta_0$$

に (ホ)の式を代入して

$$\sin \alpha_0 = n \cdot \frac{1}{n} \sqrt{\frac{4-n^2}{3}}$$

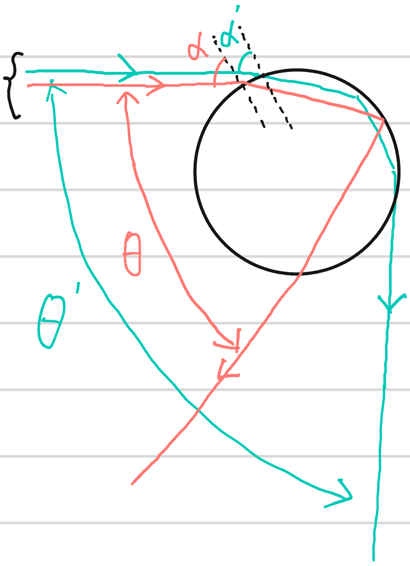
$$\therefore \sin \alpha_0 = \sqrt{\frac{4-n^2}{3}} \text{ // (カ)}$$

$\boxed{231}$ 続き

※ 重要 この計算と虹の原理を結びつけよう。

①「θとθ'の変化が小さいとき強度最大」について

太陽光線は平行に複数入射する



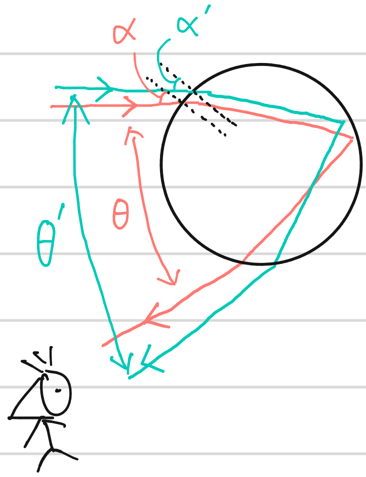
例えば左図の

→ と → の光線は

入射角αが微小変化した

光だがθが大きく変化している。

結果、光は散らばっている。



そして左図のように

θとθ'の変化が小さいときは、

2本の光線がほぼ同じ向きに

進む。

⇒ 観測される光が多く、

強度が大きいといえるのだ。

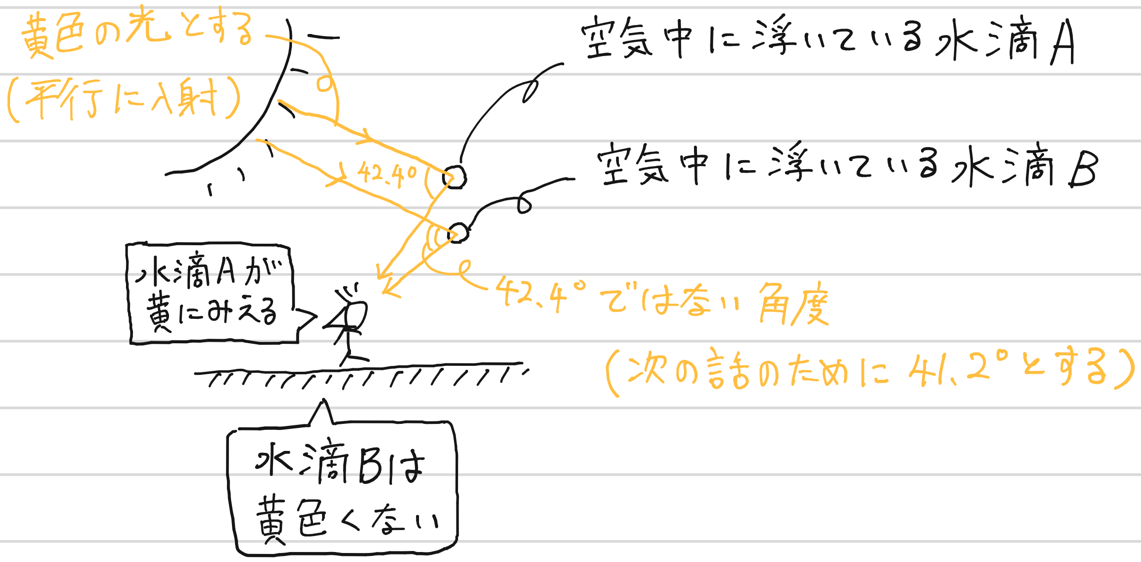
⇒ 今回は、$\Delta\theta=0$になるようなα, β, θを

求め、強度が最大となる角度を求めた。

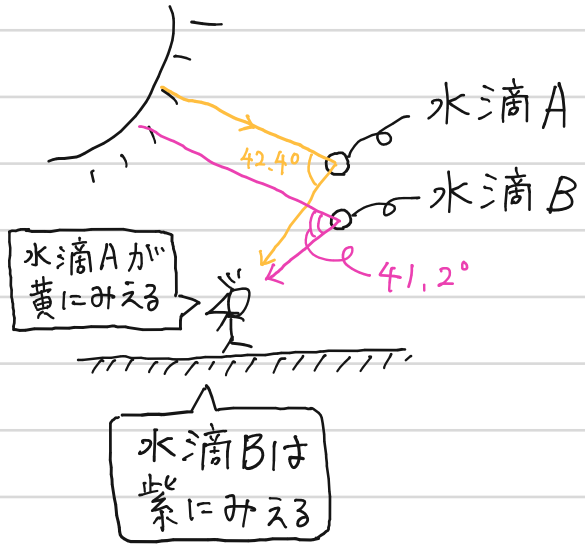
231 続き

② 実際の虹の見え方

- 問題文より $n=1.33$ だと $\theta_0=42.4°$ で強度最大。



- 光は色(波長)のちがいで屈折率がかわり、紫色はすごく曲がりやすく $n=1.34$ 程度になる。赤は曲がりづらく $n=1.32$ くらい。
$n=1.34$ だと $\alpha_0=59.0°$, $\beta_0=39.8°$, $\theta_0=41.2°$ が得られる。



すると左図のように黄に見えなかった水滴Bは紫に見えたりする。

太陽光には様々な色の光が含まれ、水滴の場所により強度が大きい色がかわるので、水滴ごとに色が異なり虹となるのである。
(下側に紫などの入が小さい光がくることもわかる)