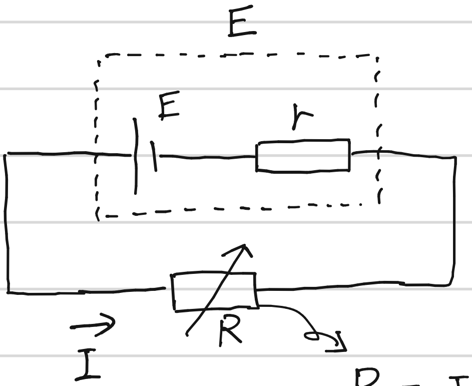
276

物理で相加・相乗平均の関係式 $\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$ を使うのは
この問題と熱の超マイナーな問題の2つ.
この問題の方は割と典型問題なのでおさえておこう.



$$P_R = I^2 R$$

Iがいくらか考える.
キルヒホッフ則より

$$E = \underbrace{IR}_{V_R} + \underbrace{Ir}_{V_r} \qquad \therefore\ I = \frac{E}{R+r}$$

(合成抵抗の公式を使ってもよい)

これより

$$P_R = I^2 R$$
$$= \left(\frac{E}{R+r}\right)^2 R = \frac{R}{(R+r)^2} E^2$$
$$= \frac{R}{R^2+2Rr+r^2} E^2 = \frac{1}{\underbrace{R}_{a\text{とする}} + 2r + \underbrace{\frac{r^2}{R}}_{b\text{とする}}} E^2$$

Rの関数部分 $a+b$ が最小となるときに P_R が最大といえる. ここで相加相乗平均の関係より

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab} \quad \Rightarrow \quad a+b \geqq 2\sqrt{ab}$$

となり $a+b$ の最小値は $2\sqrt{ab}$ といえるのだ.
ここで $a+b = 2\sqrt{ab}$ となるのは $a=b$ のときということから

$$R = \frac{r^2}{R} \qquad \therefore\ R = r$$

276 続き.

よって

$$P_R = \frac{1}{a+2r+b}E^2 \Rightarrow P_{max} = \frac{1}{2\sqrt{ab}+2r}E^2$$

$a+b$ の最小値は $2\sqrt{ab}$

$$= \frac{1}{2\sqrt{R\cdot\frac{r^2}{R}}+2r}E^2$$

$$= \frac{1}{2r+2r}E^2 = \underline{\frac{E^2}{4r}}_{//}$$

※これは体系物理の解答の別解にあたる. でも入試本番でこの計算を落ちついて行うのはきびしい.
数学の力を使って解こう.

$$P = \frac{1}{R+2r+\frac{r^2}{R}}E^2$$

$R+\frac{r^2}{R}$ の最小値を求めたい.

$f(R) = R+\frac{r^2}{R}$ として

$$f'(R) = 1 - r^2R^{-2} = 1-\frac{r^2}{R^2}$$

$f'(R) = 0$ となるのは

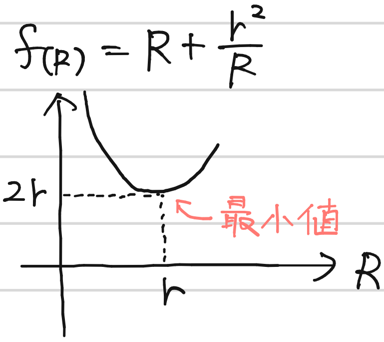
$$R = r, -r$$

のときである. 増減表を書くと

R>0なので無視

R	~~…~~	~~$-r$~~	~~…~~	0	…	r	…
$f'(R)$		~~0~~			$-$	0	$+$
$f(R)$				∞		$2r$	

$\Rightarrow$



$\boxed{276}$ 続き

$R+\dfrac{r^2}{R}$ が最小値をとるのが $R=r$ のときとわかったので

$$P_R=\frac{1}{R+2r+\frac{r^2}{R}}E^2 \Rightarrow P_{Max}=\frac{1}{r+2r+\frac{r^2}{r}}E^2$$

$$=\frac{1}{4r}E^2$$

※ 体系物理の模範解答にあるような

$$P=\frac{E^2}{R+2r+\frac{r^2}{R}}$$

$$=\frac{E^2}{\left(\sqrt{R}-\frac{r}{\sqrt{R}}\right)^2+4r}$$

という変形と，これによるグラフの作図は通常しないので
無視しましょう。

相加相乗平均か増減表を使うのが一般的です.