$\boxed{182}$ 誘導の通り式を合成する.

$$y_1 + y_2 = A\sin\underbrace{\left\{2\pi f\left(t - \frac{x}{v}\right) + \frac{\pi}{4}\right\}}_{\alpha\ とする} + A\sin\underbrace{\left\{2\pi f\left(t + \frac{x}{v}\right) + \frac{\pi}{4}\right\}}_{\beta\ とする}$$

$$= A(\sin\alpha + \sin\beta)$$

$$= 2A\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$= 2A\sin\frac{2\pi f\left(t-\frac{x}{v}\right)+\frac{\pi}{4} + 2\pi f\left(t+\frac{x}{v}\right)+\frac{\pi}{4}}{2} \cdot \cos\frac{2\pi f\left(t-\frac{x}{v}\right)+\frac{\pi}{4} - \left\{2\pi f\left(t+\frac{x}{v}\right)+\frac{\pi}{4}\right\}}{2}$$

$$= 2A\sin\left(\frac{4\pi f t + \frac{\pi}{2}}{2}\right)\cos\left(\frac{-4\pi f\frac{x}{v}}{2}\right)$$

$$= 2A\sin\left(2\pi f t + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(2\pi f\frac{x}{v}\right)$$

並びかえ

$$= \underbrace{2A\cos\left(2\pi f\frac{x}{v}\right)}_{\text{右側のパーツ}\ \sin(2\pi f t + \frac{\pi}{4})\ \text{の振幅と見なせる項（振幅項）}}\ \underbrace{\sin\left(2\pi f t + \frac{\pi}{4}\right)}_{\text{時間経過で変化する位相の項（振動項）}}$$

⇓

ここが0になるxの点では
どの時間でも $y=0$となる。⇒ 節となる

これが(1)の前までに説明されている内容となる.

$\boxed{182}$ 続き

$\cos\left(2\pi f \dfrac{x}{v}\right) = 0$ となる場所を探す.

$v = f\lambda$ を代入して

$\cos\left(2\pi \dfrac{x}{\lambda}\right) = 0$

$2\pi \dfrac{x}{\lambda} = (2m+1)\dfrac{\pi}{2}$ $(m = 0, \pm1, \pm2 \cdots)$

$\therefore x = \underline{\dfrac{2m+1}{4}\lambda}$ //

(2) 振幅項 $\cos\left(2\pi \dfrac{x}{\lambda}\right)$ が最大となる場所が腹となる

$\Rightarrow \cos\left(2\pi \dfrac{x}{\lambda}\right) = \pm 1$

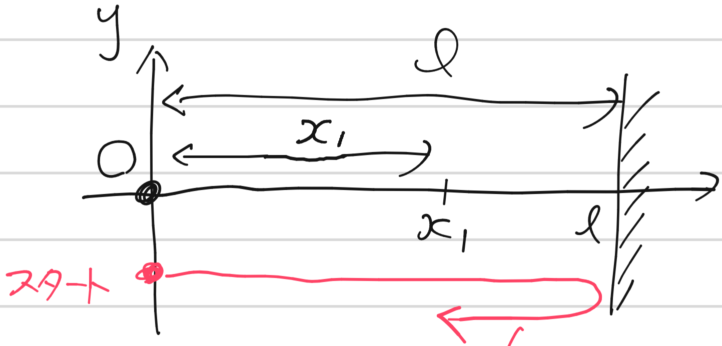
よって $2\pi \dfrac{x}{\lambda} = m\pi$ $(m = 0, \pm1, \pm2 \cdots)$

$\therefore x = \underline{\dfrac{m}{2}\lambda}$ //

$\boxed{183}$ 問題文の式

$$y = A\sin\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{v}\right)$$ ← $y_{入射}$と呼ぶ

やり方① 原点Oをスタートして、ずれを式に組み込む



スタートから $2l - x_1$ 進行した点といえる
(固定端反射なので1回位相が反転)

$y_{入射}$の式に代入 ⇓

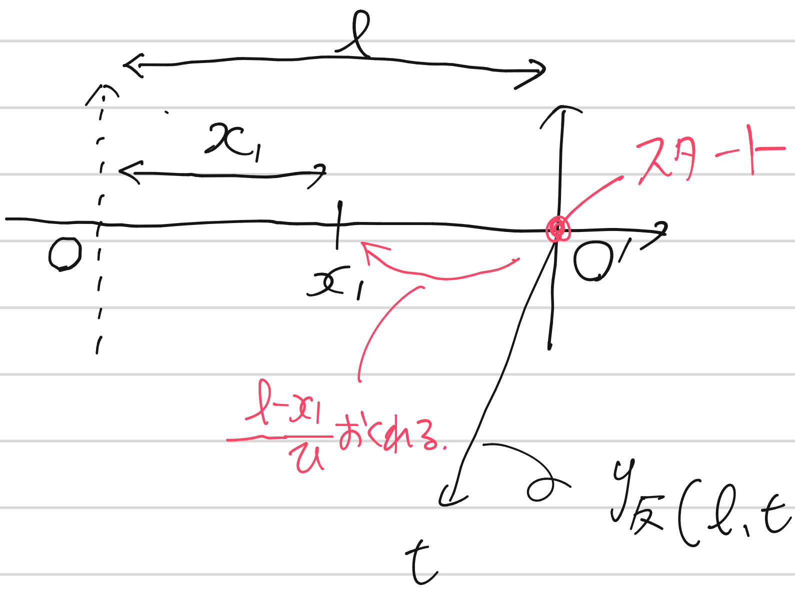
$$y_{反} = \underbrace{-}_{位相の反転} A\sin\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{\overbrace{2l - x_1}^{すすむ量x}}{v}\right)$$

解答の形にあわせると

$$y_{反} = -A\sin\frac{2\pi}{T}\left(t + \frac{x_1 - 2l}{v}\right)$$ //

183 続き

やり方② O'での反射波の式$y_{反}(l,t)$をつくり、そこからスタートしたときのずれを組み込む



位相の反転

$$y_{反}(l,t) = -y_{入}(l,t)$$

$$= -A\sin\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{l}{v}\right)$$

O'をスタートしてx_1までは$\frac{l-x_1}{v}$かかるので

$$y_{反}(x_1,t) = -A\sin\frac{2\pi}{T}\left\{\left(t-\frac{l-x_1}{v}\right)-\frac{l}{v}\right\}$$

$$= -A\sin\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{2l-x_1}{v}\right)$$

解答の形にあわせると

$$y_{反}(x_1,t) = \underline{-A\sin\frac{2\pi}{T}\left(t+\frac{x_1-2l}{v}\right)}$$ //

184 (1) tが一定 ⇒ tを指定した$y-x$グラフのこと

$y-x$グラフの型は

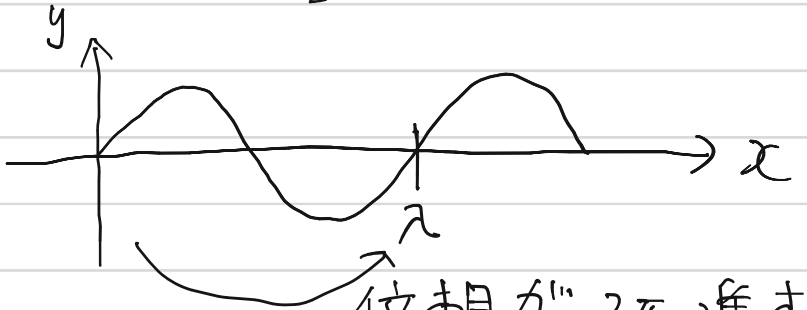
$$y = A\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x + \underbrace{\theta_0}_{初期位相\theta_0}\right)$$

今回は $\theta_0 = \omega t$

問題文の式 $y = A\sin(kx+\omega t)$ ととと比較して $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ //(ア)

※問題の誘導の仕方で考える

$y-x$グラフを書くと



位相が2π進むとxがλ増えてる

⇓ 式にすると

$$\underbrace{kx+\omega t}_{前} + \underbrace{2\pi}_{位相ずれ} = \underbrace{k(x+\lambda)+\omega t}_{後}$$

$\Rightarrow \ 2\pi = k\lambda$

$\therefore \ k = \frac{2\pi}{\lambda}$ //(ア)

$\boxed{184}$ 続き

(2) x が一定 ⇒ x を指定した $y-t$ グラフ．

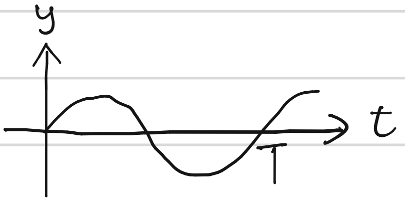
$y-t$ グラフの型は

$$y = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \underbrace{\theta_0}_{\text{初期位相 }\theta_0}\right)$$

今回は $\theta_0 = kx$

問題文の式 $y = A\sin(kx+\omega t)$ と比較して $\underline{\omega = \frac{2\pi}{T}}$ //(イ)

問題の誘導の仕方で考える

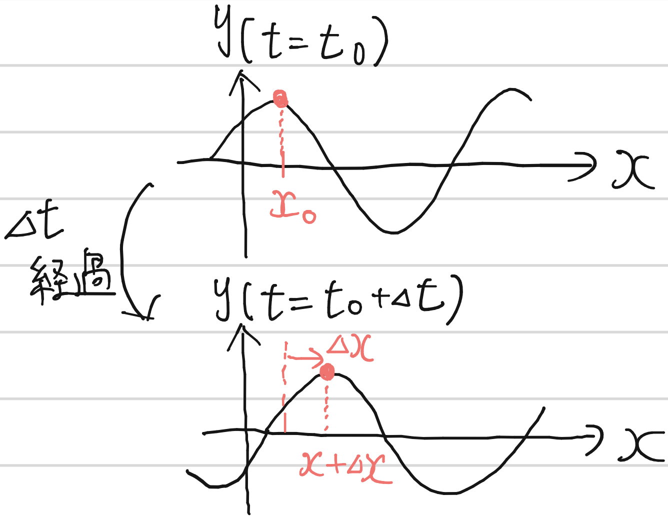


位相が 2π すすむと t が T 増えてる

⇓ 式にすると

$$\underbrace{kx+\omega t}_{\text{前}} + \underbrace{2\pi}_{\text{位相ずれ}} = \underbrace{kx+\omega(t+T)}_{\text{後}}$$

(3) 問題文では下図のようなことをいっている。



● … $A\sin(kx_0+\omega t_0)$

‖ 状態が等しい

● … $A\sin\{k(x_0+\Delta x)+\omega(t_0+\Delta t)\}$

よって $kx_0+\omega t_0 = k(x_0+\Delta x) + \omega(t_0+\Delta t)$

$$\Rightarrow k\Delta x = -\omega\Delta t$$

ここで ● の移動速度 v は $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ なので、これにあわせて変形すると

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \underbrace{-}_{\text{負の向き}}\underline{\frac{\omega}{k}}$$

負の向き //(エ)

$\frac{\omega}{k}$ //(オ)

} (ウ)

$\boxed{184}$ 続き

※ $v = -\frac{\omega}{k}$ の ω と k に $\frac{2\pi}{T}$、$\frac{2\pi}{\lambda}$ を代入すると

$$v = -\frac{\frac{2\pi}{T}}{\frac{2\pi}{\lambda}} = -\frac{\lambda}{T}$$ となり、

普段使っている波の式が導ける。

$\boxed{185}$

$$y = A\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

において、$\omega = \frac{2\pi}{T}$, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ とすると

$$y = A\sin(\omega t - kx)$$

となる.

(ア)

$(\omega t - kx)$ を位相 θ とおき、θ が一定の位置 x を考える。

$t=t$ のとき $x=x$ で、$t = t+\Delta t$ のとき $x = \Delta x$ に移動したとする.
位相 θ が一定の位置を考えているので

$$\omega t - kx = \omega(t+\Delta t) - k(x+\Delta x)$$
$$\Rightarrow 0 = \omega\Delta t - k\Delta x$$

となり. $v_p = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ にあわせると

$$v_p = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\omega}{k} \quad (ア)$$

(イ)

問題文の指示の通り, 代入、合成すると.

$$y = y_1 + y_2$$
$$= A\sin\{(\omega+\Delta\omega)t - (k+\Delta k)x\} + A\sin\{(\omega-\Delta\omega)t - (k-\Delta k)x\}$$
$$= A\sin\{(\omega t - kx) + (\Delta\omega t - \Delta kx)\} + A\sin\{\underbrace{(\omega t - kx)}_{A\text{とする}} - \underbrace{(\Delta\omega t - \Delta kx)}_{B\text{とする}}\}$$

185 (イ) 続き

$$= A\sin(A+B) + A\sin(A-B)$$

$$= 2A\cos B \sin A$$

$$= 2A\cos\underbrace{(\Delta\omega t - \Delta k x)}_{(イ)}\sin(\omega t - kx)$$

(ウ) $2A\cos(\Delta\omega t - \Delta k x)$ の変動の速さ v_g を考える.

(イ)と同様に考えて

$$(t=t,\ x=x\text{の位相}) = (t=t+\Delta t,\ x=x+\Delta x\text{の位相})$$

$$\Delta\omega t - \Delta k x = \Delta\omega(t+\Delta t) - \Delta k(x+\Delta x)$$

$$\Rightarrow 0 = \Delta\omega\Delta t - \Delta k \Delta x$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta x}{\Delta t} = \underbrace{\frac{\Delta\omega}{\Delta k}}_{(ウ)} \ (= v_g)$$

(エ) 位相速度 $v_p = \frac{\omega}{k}$ が等しいことから,

$$v_{p1} = v_{p2}$$

$$\Rightarrow \frac{\omega_1}{k_1} = \frac{\omega_2}{k_2}$$

$$\Rightarrow \frac{\omega+\Delta\omega}{k+\Delta k} = \frac{\omega-\Delta\omega}{k-\Delta k}$$

$$\Rightarrow (\omega+\Delta\omega)(k-\Delta k) = (\omega-\Delta\omega)(k+\Delta k)$$

$$\Rightarrow \cancel{\omega k} - \omega\Delta k + \Delta\omega k - \cancel{\Delta\omega\Delta k} = \cancel{\omega k} + \omega\Delta k - \Delta\omega k - \cancel{\Delta\omega\Delta k}$$

$$\Rightarrow \Delta\omega k = \omega\Delta k$$

$$\therefore \frac{\omega}{k} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$$

$$\therefore \underbrace{v_p = v_G}_{(エ)}$$

$\boxed{185}$ 続き

(オ) 船が作る波なので (ニ)の条件 $v_{p1} = v_{p2}$ とちがう条件になることに注意.

$$\omega = \sqrt{gk}$$

から速度の関係を考える.

$$\omega + \Delta\omega = \sqrt{g(k+\Delta k)}$$

と言え. $\Delta\omega$ について解くと、

$$\omega + \Delta\omega = \sqrt{gk}\left(1+\frac{\Delta k}{k}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\fallingdotseq \sqrt{gk}\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{\Delta k}{k}\right)$$

$$= \omega\left(1+\frac{\Delta k}{2k}\right)$$

これより

$$\Delta\omega = \frac{\omega}{2k}\Delta k$$

$$\therefore \underbrace{\frac{\omega}{k}}_{v_p} = 2\cdot\underbrace{\frac{\Delta\omega}{\Delta k}}_{v_G} \qquad \therefore \frac{v_G}{v_p} = \frac{1}{2} \text{ // (オ)}$$